Ime in priimek: ______________________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Statistika

Teoretični izpit

20. junij 2019

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 10, ocena pa je enaka navzgor zaokroženemu številu pravilnih odgovorov. Ko je ponujenih več možnosti, je lahko pravilnih odgovorov več. Ko ni ponujenih odgovorov, na kratko pojasnite vaš razmislek.

Naloga	Točke
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	
7.	
8.	
9.	
10.	
Skupaj	

1. Naj bo (X, Y, Z) večrazsežen normalen slučajen vektor. Pokažite, da velja

$$\operatorname{var}(Y + Z|X) = \operatorname{var}(Y) + \operatorname{var}(Z) + 2\operatorname{cov}(Y, Z) - \frac{(\operatorname{cov}(Y, X) + \operatorname{cov}(Z, X))^2}{\operatorname{var}(X)}.$$

2. Naj bo $\mathbf{Z} \sim \mathrm{N}(0, \mathbf{I})$. Naj bosta $\mathbf{H}$ in $\mathbf{K}$ idempotentni matriki, za kateri velja $\mathbf{HK} = \mathbf{KH} = \mathbf{K}$. Navedite porazdelitev slučajne spremenljivke

$$U = \mathbf{Z}^T (\mathbf{H} - \mathbf{K})\, \mathbf{Z}.$$

Navedba porazdelitve bo vsebovala ranga matrik $\mathbf{H}$ in $\mathbf{K}$.

3. Slučajni vektor (X, Y, Z) naj bo večrazsežen normalen in naj bo $\operatorname{var}(Y|X) > 0$. Utemeljite, da je

$$E(Z|X, Y) = E(Z|X) + \frac{\operatorname{cov}(Y, Z|X)}{\operatorname{var}(Y|X)} (Y - E(Y|X)).$$

4. Predpostavite, da je $E(|Z|) < \infty$, $E(|ZY|) < \infty$ in

$$E(Z|X, Y) = \psi(X)$$

za neko funkcijo ψ. Utemeljite, da je

$$E(YZ|X) = E(Y|X) \cdot E(Z|X).$$

Namig: Lastnost gnezdenja.

5. Čarovnik ima dve škatli: prvo s povprečjem 1 in standardnim odklonom 10, drugo pa s povprečjem -1 in standardnim odklonom 10. Ponuja nam naslednjo igro na srečo: naskrivaj bo izbral eno izmed škatel, vsako z verjetnostjo $1/2$. Nato bo iz izbrane škatle izbral $n = 100$ listkov s ponavljanjem in nam povedal vsoto. Če prav uganemo, katero škatlo je izbral, dobimo nagrado. Odločimo se, da bomo uganjevali na naslednji način: če je vsota pozitivna, bomo "uganili" škatlo s povprečjem 1, če pa bo vsota negativna, bomo "uganili" škatlo s povprečjem -1. Kolikšna je približno verjetnost, da boste prav uganili na podlagi vsote števil na 100 naključno izbranih lističih? Upoštevajte, da je $\Phi(-1) \doteq 0{,}16$.

6. Populacija velikosti $N = 2M$ je razdeljena na dva enaka stratuma velikosti M. V populaciji so enote ali tipa A ali tipa B. Označimo delež enot tipa A v prvem stratumu z a_1, v drugem pa z a_2. Predpostavite, da izberemo stratificiran vzorec velikosti $n = 2m$, tako da v vsakem stratumu izberemo enostavni slučajni vzorec velikosti m. Za cenilko deleža a vzamemo vzorčni delež $\hat{a}$ enot tipa A. Navedite nepristransko cenilko variance $\mathrm{var}(\hat{a})$.

7. Privzemite, da so opazovani pari $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ nastali kot med sabo neodvisni, enako porazdeljeni pari $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_n, Y_n)$ z

$$\begin{pmatrix} X_k \\ Y_k \end{pmatrix} \sim \mathrm{N}\left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Poiščite tako konstanto c, da bo

$$\hat{\rho} = c \sum_{k=1}^{n} (X_k - \bar{X})(Y_k - \bar{Y})$$

nepristranska cenilka parametra ρ.

8. Predpostavljamo, da so opazovane vrednosti vzorec med sabo neodvisnih, normalno porazdeljenih slučajnih spremenljivk $X_1, \ldots, X_n$ s parametroma μ in $\sigma^2 > 0$. Kako bi preverili domnevo

$$H_0\colon \sigma^2 = 1 \qquad \text{proti} \qquad H_1\colon \sigma^2 \neq 1?$$

Kako bi našli kritično vrednost pri stopnji tveganja $\alpha \in (0,1)$? Bi bila ta kritična vrednost aproksimativna ali točna?

9. Naj velja

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{pmatrix}$$

in

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y_1 \\ 1 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix},$$

pri čemer je $E(\boldsymbol{\epsilon}) = E(\boldsymbol{\eta}) = 0$ in $\mathrm{var}(\boldsymbol{\epsilon}) = \mathrm{var}(\boldsymbol{\eta}) = \sigma^2\mathbf{I}$ ter $\mathrm{cov}(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\eta}) = 0$. Eksplicitno navedite najboljšo linearno nepristransko cenilko razlike $\beta - \gamma$. Utemeljite, da je navedena cenilka najboljša.

10. Opazimo

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{V}\boldsymbol{\epsilon}\,,$$

pri čemer je $E(\boldsymbol{\epsilon}) = 0$ in $\mathrm{var}(\boldsymbol{\epsilon}) = \sigma^2\mathrm{I}$, $\mathbf{V}$ pa je znana $n \times n$ obrnljiva matrika. Predpostavljamo, da ima znana matrika $\mathbf{X}$ poln rang enak $m < n$. Navedite nepristransko cenilko $\hat{\sigma}^2$ parametra σ^2.