Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Statistika

Teoretični izpit

15. junij 2018

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 10, ocena pa je enaka navzgor zaokroženemu številu pravilnih odgovorov. Ko je ponujenih več možnosti, je lahko pravilnih odgovorov več. Ko ni ponujenih odgovorov, na kratko pojasnite vaš razmislek.

Naloga	Točke
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	
7.	
8.	
9.	
10.	
Skupaj	

1. Vrstice slučajne matrike $\mathbf{X}$ naj bodo med sabo neodvisni slučajni vektorji z porazdelitvijo $\mathrm{N}(0, \mathbf{\Sigma})$. Naj bodo $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ fiksni vektorji ustreznih dimenzij. Naj bo $Z = \mathbf{c}^T \mathbf{X} \mathbf{a}$ in $\mathbf{Y} = \mathbf{X} \mathbf{b}$. Izračunajte

$$E\left(Z | \mathbf{Y}\right) .$$

2. Naj bosta $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$ pozitivno definitni matriki z istimi lastnimi vektorji. Naj bo $\mathbf{Z} \sim \mathrm{N}(0, \mathrm{I})$. Sta lahko

$$U = \mathbf{Z}^T \mathbf{A} \mathbf{Z} \qquad \text{in} \qquad V = \mathbf{Z}^T \mathbf{B} \mathbf{Z}$$

neodvisni? Utemeljite odgovor.

3. Naj bo (X, Y, Z) diskreten slučajni vektor. Predpostavite, da je par (X, Z) neodvisen od Y. Utemeljite, da je

$$E(Z|X, Y) = E(Z|X) .$$

4. V dokazu centralnega limitnega izreka smo za neodvisne slučajne spremenljivke $X_1, \ldots, X_n$ in $Z_1, \ldots, Z_n$ z $E(X_k) = E(Z_k)$ in $\mathrm{var}(X_k) = \mathrm{var}(Z_k)$ in za vsako trikrat zvezno odvedljivo funkcijo f z omejenim tretjim odvodom dokazali, da velja

$$\left|E\left[f(X_1 + \cdots + X_n)\right] - E\left[f(Z_1 + \cdots + Z_n)\right]\right| \leq C \sum_{k=1}^{n} E\left[|X_k|^3\right] ,$$

kjer je C konstanta in je Z_k normalno porazdeljena. Ali velja neenačba tudi v primeru, ko namesto neodvisnosti predpostavljamo

$$E(X_k|X_1, \ldots, X_{k-1}, Z_{k+1}, \ldots, Z_n) = E(Z_k|X_1, \ldots, X_{k-1}, Z_{k+1}, \ldots, Z_n)$$

in

$$E(X_k^2|X_1,\dots,X_{k-1},Z_{k+1},\dots,Z_n)=E(Z_k^2|X_1,\dots,X_{k-1},Z_{k+1},\dots,Z_n)$$

za $k=1,\dots,n$. Utemeljite odgovor.

5. Predpostavite, da iz populacije velikosti N izberemo verjetnostni vzorec velikosti n. Naj bo verjetnost, da v vzorec izberemo enoto i, znana in enaka $\pi_i>0$, $i=1,2,\dots,N$. Predlagajte nepristransko cenilko populacijskega povprečja μ.

6. Naj opazovane vrednosti $x_1,x_2,\dots,x_n$ nastanejo kot neodvisne, enako porazdeljene slučajne spremenljivke $X_1,X_2,\dots,X_n$ z $X_k\sim\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ za $k=1,2,\dots,n$. Pokažite, da lahko cenilko parametra σ, dano z

$$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k-\bar{X}\right)^2},$$

popravite tako, da bo nepristranska.

Namig: razmišljajte o porazdelitvi statistike $\sum_{k=1}^{n}\left(X_k-\bar{X}\right)^2$.

7. Predpostavite, da vzorčne vrednosti $x_1,x_2,\dots,x_n$ nastanejo kot med sabo neodvisne enako porazdeljene slučajne spremenljivke z $X_k\sim\exp(\lambda)$. Navedite nepristransko cenilko parametra λ. Utemeljite, da je nepristranska. Predpostavite $n\geq 2$.

8. Generator slučajnih števil generira zaporedje med sabo neodvisnih slučajnih spremenljivk $X_1, X_2, \ldots$, za katere je $X_k \sim \mathrm{N}(\mu, 1)$ za vse $k \geq 1$. Predpostavite, da je $\mu \in \{0, 1\}$. Testirati želimo

$$H_0\colon \mu = 0 \quad \text{proti} \quad H_1\colon \mu = 1\,.$$

Predlagajte testno statistiko in pri dani $\alpha \in (0,1)$ določite približno velikost vzorca, da bo moč testa vsaj 0,8. Velikost vzorca lahko izrazite s porazdelitveno funkcijo Φ standardizirano normalne porazdelitve.

9. Predpostavite regresijski model

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}$$

kjer predpostavljamo $E(\boldsymbol{\epsilon}) = 0$ in

$$\mathrm{var}(\boldsymbol{\epsilon}) = \sigma^2(\mathbf{I} + \mathbf{1}\mathbf{1}^T)\,,$$

pri čemer je

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}$$

in $\sum_{k=1}^n x_k = 0$. Matrika $\mathbf{X}$ naj ima poln rang. Pokažite, da je najboljša linearna nepristranska cenilka parametra β_2 enaka

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum_{k=1}^n x_k Y_k}{\sum_{k=1}^n x_k^2}\,.$$

Namig: $(\mathbf{I} + \mathbf{1}\mathbf{1}^T)^{-1} = \mathbf{I} + b\mathbf{1}\mathbf{1}^T$ *za nek* b.

10. Predpostavite regresijski model

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}$$

kjer predpostavljamo $E(\boldsymbol{\epsilon}) = 0$ in

$$\mathrm{var}(\boldsymbol{\epsilon}) = \sigma^2(\mathbf{I} + \mathbf{1}\mathbf{1}^T)\,,$$

pri čemer je

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}$$

in $\sum_{k=1}^{n} x_k = 0$. Matrika $\mathbf{X}$ naj ima poln rang. Predlagajte nepristransko ceniko parametra σ^2.

Namig: $(\mathbf{I} + \mathbf{1}\mathbf{1}^T)^{-1} = \mathbf{I} + b\mathbf{1}\mathbf{1}^T$ *za neki* b.