Ime in priimek: ______________________ Vpisna št.: | | | | | | | | |

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Statistika

Teoretični izpit

9. september 2016

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 10, ocena pa je enaka navzgor zaokroženemu številu pravilnih odgovorov. Ko je ponujenih več možnosti, je lahko pravilnih odgovorov več. Ko ni ponujenih odgovorov, na kratko pojasnite vaš razmislek.

Naloga	Točke
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	
7.	
8.	
9.	
10.	
Skupaj	

1. Naj bodo Z_1, Z_2 in X neodvisne slučajne spremenljivke, za katere je $Z_1, Z_2 \sim \mathrm{N}(0,1)$ in
$$X \sim \mathrm{N}\left(0,\ \frac{1}{1-\rho^2}\right)$$
za $\rho \in (-1,1)$. Definirajmo
$$Y = \rho X + Z_1 \qquad \text{in} \qquad Z = \rho Y + Z_2\,.$$
Izračunajte
$$\operatorname{cov}(X, Z|Y)\ .$$

2. Naj bodo Z_1, Z_2, Z_3 neodvisne standardizirano normalne slučajne spremenljivke in a_1, a_2, a_3 števila, za katera velja $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$. Pojasnite, zakaj imata slučajni spremenljivki
$$U = \frac{Z_1^2}{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2} \qquad \text{in} \qquad V = \frac{(a_1 Z_1 + a_2 Z_2 + a_3 Z_3)^2}{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}$$
enako porazdelitev.

3. Naj bo $Z = (Z_1, Z_2, Z_3)^T \sim \mathrm{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$. Naj bosta $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ ortogonalna enotska vektorja. Pojasnite, zakaj je
$$\frac{\left(\mathbf{a}^T \mathbf{Z}\right)^2}{\left(\mathbf{b}^T \mathbf{Z}\right)^2} \sim F_{1,1}\,.$$

4. Naj bodo U, V, W med sabo neodvisne slučajne spremenljivke, porazdeljene enakomerno na $(0,1)$. Definirajmo

$$X = U\,, \quad Y = V(1-U) \quad \text{in} \quad Z = W(1-V)(1-U)\,.$$

Izračunajte

$$E(Z|X,Y)\,.$$

Namig: kaj je $1-X-Y$*?*

5. Populacija je razdeljena na K stratumov velikosti $N_1, N_2, \ldots, N_K$. Izbrali bomo stratificiran vzorec, velikosti enostavnih slučajnih vzorcev po stratumih pa bodo $n_1, n_2, \ldots, n_K$. Označite $w_k = N_k/N$ za $k = 1, 2, \ldots, K$ in naj bodo $\mu_1, \ldots, \mu_K$ populacijska povprečja po stratumih. Predlagajte nepristransko cenilko za količino

$$\gamma = \sum_{1\le k<l\le K} w_k w_l \mu_k \mu_l\,.$$

Utemeljite, da je cenilka nepristranska.

6. Iz populacije velikosti N izberemo verjetnostni vzorec na tak način, da bo vsaka enota izbrana v vzorec z enako verjetostjo in vsak par enot izbran v vzorec z enako verjetnostjo. Za cenilko populacijskega povprečja izberemo vzorčno povprečje. Utemeljite, zakaj je izbrana cenilka nepristranska in ima enako varianco kot pri enostavnem slučajnem vzorčenju.

7. Predpostavite, da so podatki $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nastali kot slučajne neodvisne enako porazdeljene slučajne spremenljivke $X_1, \ldots, X_n$ z gostoto

$$f(x) = \frac{1}{\lambda^2}\, x\, e^{-x/\lambda}$$

za $x > 0$. Pokažite, da je

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} X_k$$

nepristranska cenilka parametra λ, in izračunajte njeno eksaktno standardno napako.

8. Pri preizkušanju domnev se lahko zgodi, da ničelno domnevo zavrnemo, čeprav drži. Recimo, da smo si izbrali stopnjo tveganja α. Kolikšna je verjetnost, da bomo ničelno domnevo zavrnili?

9. Predpostavite regresijski model

$$Y_k = \beta x_k + \epsilon_k$$

za $k = 1, 2, \ldots, n$ kjer so $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ nekorelirani, $E(\epsilon_k) = 0$ in $\mathrm{var}(\epsilon_k) = \sigma^2$ za $k = 1, 2, \ldots, n$. Predpostavite, da je $x_k > 0$ za vse $k = 1, 2, \ldots, n$. Pokažite, da je

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{k=1}^{n} Y_k}{\sum_{k=1}^{n} x_k}$$

nepristranska cenilka parametra β, in utemeljite, da ni najboljša nepristranska linearna cenilka.

10. Predpostavite linearni regresijski model oblike

$$\boldsymbol{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}\,,$$

kjer je $\boldsymbol{\epsilon} \sim \mathrm{N}\left(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}\right)$, za matriko $\mathbf{X}$ velikosti $n \times m$ pa predpostavljamo, da ima poln rang. Naj bo

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}\,,$$

kjer je $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ cenilka po metodi najmanjših kvadratov. Kakšna je porazdelitev vsote

$$\sum_{k=1}^{n} \hat{\epsilon}_k^2\,?$$