Ime in priimek: ______________________________ Vpisna št.: | | | | | | | | |

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Statistika

Teoretični izpit

8. julij 2019

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 10, ocena pa je enaka navzgor zaokroženemu številu pravilnih odgovorov. Ko je ponujenih več možnosti, je lahko pravilnih odgovorov več. Ko ni ponujenih odgovorov, na kratko pojasnite vaš razmislek.

Naloga	Točke
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	
7.	
8.	
9.	
10.	
Skupaj	

1. Naj bodo $Z_0, Z_1, Z_2, \ldots$ neodvisne standardizirano normalne slučajne spremenljivke in naj bo $\theta \in \mathbb{R}$. Za $k = 1, 2, \ldots$ definirajte

$$X_k = Z_k + \theta Z_{k-1} \,.$$

Izračunajte $E(X_k | X_1, \ldots, X_{k-1})$.

2. Naj bodo Z_1, Z_2, Z_3 neodvisne standardizirano normalne slučajne spremenljivke. Utemeljite, da sta slučajni spremenljivki

$$U = \tfrac{1}{2}(Z_1^2 + Z_3^2) + Z_2^2 + Z_1 Z_3 \quad \text{in} \quad V = \tfrac{1}{2}(Z_1^2 + Z_3^2) - Z_1 Z_3$$

neodvisni.

3. Naj za zaporedje slučajnih spremenljivk $X_1, X_2, \ldots$ velja $E(|X_n|) < \infty$ in

$$E(X_{n+1} | X_1, X_2, \ldots, X_n) = X_n$$

za $n = 1, 2, \ldots$. Za $m > n$ izračunajte $E(X_m | X_1, \ldots, X_n)$.

4. Vektorja $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ in $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ naj bosta neodvisna. Predpostavite, da so $Y_1, \ldots, Y_n$ neodvisne med sabo. Predpostavite, da je $\mathrm{var}(Y_k) = 1$ za $k = 1, 2, \ldots, n$. Izračunajte

$$\mathrm{var}(X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + \cdots + X_n Y_n | X_1, X_2, \ldots, X_n) \,.$$

Utemeljite korake.

5. Naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ neodvisne, enako porazdeljene celoštevilske slučajne spremenljivke z $E(X_1) = 0$ in $\mathrm{var}(X_1) = 1$. Naj bo $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Utemeljite, da je

$$\lim_{n \to \infty} P(S_n = 0) = 0\,.$$

6. Iz populacije velikosti N izberemo verjetnostni vzorec velikosti n in označimo s $\pi_k = P(k\text{-ta enota bo izbrana v vzorec})$. Naj bodo $X_1, X_2, \ldots, X_n$ vzorčne vrednosti in $\Pi_1, \ldots, \Pi_n$ pripadajoče verjetnosti izbire (t. j. če je i-ta enota po vrsti v vzorcu odgovarja k-ti enoti v populaciji, je X_i vrednost spremenljivke na tej enoti in velja $\Pi_i = \pi_k$). Pokažite, da je

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{\Pi_i}$$

nepristranska cenilka populacijskega povprečja.

Namig: indikatorji.

7. Naj opazovane vrednosti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nastanejo kot neodvisne, enako porazdeljene slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots, X_n$ z $X_k \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ za $k = 1, 2, \ldots, n$. Nepristranska cenilka parametra σ^2 je

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} \left(X_k - \bar{X}\right)^2 ,$$

kjer je $\bar{X}$ povprečje vzorčnih vrednosti. Kot znano predpostavite, da za $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ velja $E(Z^4) = 3$. Izračunajte standardno napako cenilke $\hat{\sigma}^2$.

Namig: razmišljajte o porazdelitvi statistike $\sum_{k=1}^{n} \left(X_k - \bar{X}\right)^2$.

8. Naj opazovane vrednosti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nastanejo kot neodvisne, enako porazdeljene slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots, X_n$ z $X_k \sim \mathrm{N}(\mu, 1)$ za $k = 1, 2, \ldots, n$. Pri stopnji tveganja $\alpha \in (0,1)$ domnevo
$$H_0\colon \mu = 0 \qquad \text{proti} \qquad H_1\colon \mu = 1$$
preizkušamo s testno statistiko $\bar{X}$ in H_0 zavrnemo, če je $\bar{X} > c_\alpha$ za ustrezno kritično vrednost c_α. Izrazite verjetnost, da H_0 ne zavrnemo, čeprav ne drži.

9. Predpostavite regresijski model
$$Y_k = \beta x_k + \epsilon_k$$
za $k = 1, 2, \ldots, n$. Naj bo $\boldsymbol{\epsilon}^T = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$. Predpostavite, da je
$$E(\boldsymbol{\epsilon}) = 0 \qquad \text{in} \qquad \mathrm{var}(\boldsymbol{\epsilon}) = \sigma^2 \left(\mathbf{I} + \rho \mathbf{1}\mathbf{1}^T\right)$$
za znano konstanto $\rho > 0$. Predpostavite $\sum_{k=1}^n x_k = 0$ in $\sum_{k=1}^n x_k^2 = 1$. Poiščite najboljšo nepristransko linearno cenilko parametra β.

Namig: lahko uporabite, da je $\left(\mathbf{I} + \rho \mathbf{1}\mathbf{1}^T\right)^{-1} = \mathbf{I} + a\mathbf{1}\mathbf{1}^T$ *za neki* a.

10. Predpostavite regresijski model
$$Y_k = \beta x_k + \epsilon_k$$
za $k = 1, 2, \ldots, n$. Naj bodo $\boldsymbol{\epsilon}^T = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ in $\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ter $\mathbf{Y}^T = (Y_1, \ldots, Y_n)$. Predpostavite, da je
$$E(\boldsymbol{\epsilon}) = 0 \qquad \text{in} \qquad \mathrm{var}(\boldsymbol{\epsilon}) = \sigma^2 \left(\mathbf{I} + \rho \mathbf{1}\mathbf{1}^T\right)$$
za znano konstanto $\rho > 0$. Predpostavite $\sum_{k=1}^n x_k = 0$ in $\sum_{k=1}^n x_k^2 = 1$. Pokažite, da je
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\mathbf{Y}^T \left(\mathbf{I} - \mathbf{x}\mathbf{x}^T\right) \mathbf{Y}}{n - 1 + \rho n}$$
nepristranska cenilka parametra σ^2.