Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Statistika

Teoretični izpit

7. september 2020

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 10, ocena pa je enaka navzgor zaokroženemu številu pravilnih odgovorov. Ko je ponujenih več možnosti, je lahko pravilnih odgovorov več. Ko ni ponujenih odgovorov, na kratko pojasnite vaš razmislek.

Naloga	Točke
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	
7.	
8.	
9.	
10.	
Skupaj	

1. Predpostavite, da je $\operatorname{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = a\mathbf{1}_m\mathbf{1}_n^T$ za število a, pri čemer je $\mathbf{1}_r$ vektor dimenzije r z vsemi komponentami enakimi 1. Definirajte

$$\tilde{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} X_1 - \bar{X} \\ X_2 - \bar{X} \\ \vdots \\ X_m - \bar{X} \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad \tilde{\mathbf{Y}} = \begin{pmatrix} Y_1 - \bar{Y} \\ Y_2 - \bar{Y} \\ \vdots \\ Y_n - \bar{Y} \end{pmatrix},$$

kjer sta $\bar{X}$ in $\bar{Y}$ povprečji komponent $\mathbf{X}$ oziroma $\mathbf{Y}$. Izračunajte $\operatorname{cov}(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}})$.

2. Matrika $\mathbf{A}$ naj bo dimenzije $n \times 2$. Naj bosta stolpca matrike ortogonalna vektorja dolžine 1 in dimenzije n. Naj bosta X in Y neodvisni standardizirano normalni slučajni spremenljivki. Definirajte

$$\mathbf{W} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

Navedite porazdelitev slučajne spremenljivke $W_1^2 + W_2^2 + \cdots + W_n^2$.

3. Naj bo $(X, Y, Z)^T$ večrazsežen normalni vektor in naj bo njegova varianca obrnljiva matrika. Naj bo

$$\operatorname{cov}(E(Y|X), E(Z|X)) = 0.$$

Ugotovite, kaj je $\operatorname{cov}(X, Y) \cdot \operatorname{cov}(X, Z)$.

4. Naj bodo $\xi_1, \xi_2, \ldots$ neodvisne in celoštevilske slučajne spremenljivke z $E(\xi_k) = 0$ za vse $k = 1, 2, \ldots$. Definirajte

$$X_n = \sum_{1 \le i < j < k \le n} \xi_i \xi_j \xi_k.$$

Izračunajte $E\left(X_{n+1}|X_n\right)$.

5. Privzemite, da so slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ neodvisne in porazdeljene po porazdelitvi $\chi^2(m)$, kjer je m enak 1 ali 2, vendar ne veste, kateri. Naj bo $\bar{X} = \frac{1}{100}\sum_{k=1}^{n} X_k$. Če je $\bar{X} > \sqrt{2}$, se odločite, da je $m = 2$, sicer pa, da je $m = 1$. Utemeljite, da ta algoritem odločanja privede do pravilne odločitve s približno enako verjetnostjo ne glede na to, ali je m enak 1 ali 2, in to verjetnost tudi navedite. Kot znano privzemite, da za $Z \sim \chi^2(1)$ velja $\mathrm{var}(Z) = 2$.

6. Iz populacije velikosti N izberemo verjetnostni vzorec velikosti n in označimo s $\pi_k = P(k\text{-ta enota bo izbrana v vzorec})$. Naj bodo $X_1, X_2, \ldots, X_n$ vzorčne vrednosti in $\Pi_1, \ldots, \Pi_n$ pripadajoče verjetnosti izbire (t. j. če je i-ta enota po vrsti v vzorcu odgovarja k-ti enoti v populaciji, je X_i vrednost spremenljivke na tej enoti in velja $\Pi_i = \pi_k$). Pokažite, da je

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{\Pi_i}$$

nepristranska cenilka populacijskega povprečja.

7. Naj bodo $x_1, \ldots, x_n$ vzorčne vrednosti, za katere predpostavljamo, da so nastale kot neodvisne, enako porazdeljene slučajne spremenljivke z eksponentno porazdelitvijo z gostoto

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

za $x, \lambda > 0$. Ocena po metodi največjega verjetja je

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}}\,,$$

kjer je $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$. Z množenjem s primerno konstanto popravite cenilko, da bo nepristranska.

8. Predpostavljamo, da so opazovane vrednosti nastale kot neodvisne, enako porazdeljene slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots, X_n$ s porazdelitvijo $\mathrm{N}(\mu, 1)$. Preizkusiti želimo domnevo

$$H_0\colon \mu = 0 \quad \text{proti} \quad H_1\colon \mu \neq 0\,.$$

Po metodi kvocienta verjetja dobimo $\lambda = n\bar{x}^2$ z $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$. Navedite najprej aproksimativno porazdelitev testne statistike po Wilksovem izreku v primeru, ko H_0 drži. Je ta aproksimativna porazdelitev tudi eksaktna? Obrazložite odgovor.

9. Označite z $\mathbf{1}_r$ vektor dimenzije r, ki ima vse komponente enake 1. Naj bo $m < n$ in naj velja

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}\,,$$

pri čemer je $\boldsymbol{\epsilon} \sim \mathrm{N}(\mathbf{0}, \sigma^2\boldsymbol{\Sigma})$ za neznan parameter σ^2 in

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{I} + \rho\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n^T$$

za znan $\rho \in (0,1)$. Privzemite, da je $\mathbf{X}^T\mathbf{1}_n = a\mathbf{1}_m$ za znano konstanto a. Navedite najboljšo linearno nepristransko cenilko parametra β.

10. Predpostavite, da je $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}$ za $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $E(\boldsymbol{\epsilon}) = 0$ in $\mathrm{var}(\boldsymbol{\epsilon}) = \sigma^2\boldsymbol{\Sigma}$ za znano obrnljivo matriko $\boldsymbol{\Sigma}$. Naj bo $m = \mathrm{rang}(\mathbf{X})$. Utemeljite, da je

$$\hat{\sigma}^2 \;=\; \frac{1}{n-m}\mathbf{Y}^T\left[\boldsymbol{\Sigma}^{-1} - \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X}\left(\mathbf{X}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\right]\mathbf{Y}$$

nepristranska cenilka parametra σ^2.