Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Statistika

Teoretični izpit

5. september 2019

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 10, ocena pa je enaka navzgor zaokroženemu številu pravilnih odgovorov. Ko je ponujenih več možnosti, je lahko pravilnih odgovorov več. Ko ni ponujenih odgovorov, na kratko pojasnite vaš razmislek.

Naloga	Točke
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	
7.	
8.	
9.	
10.	
Skupaj	

1. Naj bo (X, Y, Z) večrazsežen normalen slučajen vektor. Pokažite, da velja

$$\operatorname{var}(Y + Z|X) = \operatorname{var}(Y) + \operatorname{var}(Z) + 2\operatorname{cov}(Y, Z) - \frac{\left(\operatorname{cov}(Y, X) + \operatorname{cov}(Z, X)\right)^2}{\operatorname{var}(X)}\,.$$

2. Naj bo $\mathbf{Z} = (Z_1, \ldots, Z_n)^T$ slučajen vektor z neodvisnimi standardizirano normalnimi komponentami z $n \geq 3$. Naj bosta $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$ ortogonalna enotska vektorja v $\mathbb{R}^n$. Navedite porazdelitev spremenljivke

$$X = \mathbf{Z}^T\mathbf{Z} - \left(\mathbf{a}^T\mathbf{Z}\right)^2 - \left(\mathbf{b}^T\mathbf{Z}\right)^2\,.$$

3. Predpostavite, da je $E(|Z|) < \infty$, $E(|ZY|) < \infty$ in

$$E\left(Z|X, Y\right) = \psi(X)$$

za neko funkcijo ψ. Utemeljite, da je

$$E\left(YZ|X\right) = E(Y|X) \cdot E(Z|X)\,.$$

Namig: Lastnost gnezdenja.

4. Naj bo vektor (X, Y, Z) večrazsežen normalen z $E(X) = E(Y) = E(Z) = 0$ in $\operatorname{var}(X) = \operatorname{var}(Y) = \operatorname{var}(Z) = 1$. Izrazite

$$E(Z|aX + bY)$$

z ustreznimi kovariancami.

5. Naj bo $X_n \sim \chi^2(n)$. Utemeljite, da velja

$$\lim_{n\to\infty} P\left(X_n \leq n + x\sqrt{2n}\right) = \Phi(x)$$

za $x \in \mathbb{R}$, kjer je Φ porazdelitvena funkcija standardizirano normalne porazdelitve.

6. Populacija velikosti $N = 2M$ je razdeljena na dva enaka stratuma velikosti M. V vsakem stratumu izberemo enostavni slučajni vzorec velikosti m. Predlagajte nepristransko cenilko populacijske variance σ^2. Utemeljite, da je nepristranska.

Namig: lahko utemeljite, da je

$$\sigma^2 = \tfrac{1}{2}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2\right) + \tfrac{1}{8}\left(\mu_1 - \mu_2\right)^2 \ ,$$

kjer sta μ_i in σ_i^2 populacijsko povprečje in populacijska varianca za stratum $i =$ $1, 2$.

7. Predpostavljamo, da so opazovane vrednosti vzorec med sabo neodvisnih, normalno porazdeljenih slučajnih spremenljivk $X_1, \ldots, X_n$ s parametroma μ in σ^2. Ali obstaja taka konstanta c_n, da je

$$\hat{\sigma} = c_n \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (X_k - \bar{X})^2}$$

nepristranska cenilka parametra σ?

8. Naj opazovane vrednosti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nastanejo kot neodvisne, enako porazdeljene slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots, X_n$ z $X_k \sim \mathrm{N}(\mu, 1)$ za $k = 1, 2, \ldots, n$. Pri stopnji tveganja $\alpha \in (0, 1)$ domnevo

$$H_0 \colon \mu = 0 \qquad \text{proti} \qquad H_1 \colon \mu = 1$$

preizkušamo s testno statistiko $\bar{X}$ in H_0 zavrnemo, če je $\bar{X} > c_\alpha$ za ustrezno kritično vrednost c_α. Izrazite verjetnost, da H_0 ne zavrnemo, čeprav ne drži.

9. Naj bo za $k = 1, 2, \ldots, n$

$$Y_k = \alpha + \beta x_k + \epsilon_k \,,$$

pri čemer je $E(\boldsymbol{\epsilon}) = 0$ in $\mathrm{var}(\boldsymbol{\epsilon}) = \sigma^2 \boldsymbol{\Sigma}$ za obrnljivo matriko

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{I} + q\mathbf{1}\mathbf{1}^T$$

z znanim $q > 0$ in neznanim parametrom σ^2. Predpostavljajte, da je $\sum_{k=1}^n x_k = 0$. Naj bo $\hat{\beta}$ najboljša linearna nepristranska cenilka parametra β. Pokažite, da je

$$\mathrm{se}(\hat{\beta}) = \frac{\sigma}{\sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}} \,.$$

Namig: Prevedite problem na regresijski model, v katerem je $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{I}$. Kot znano privzemite, da je

$$\left(\mathbf{I} + q\mathbf{1}\mathbf{1}^T\right)^{-1} = \mathbf{I} - \frac{q}{1 + nq}\mathbf{1}\mathbf{1}^T \,.$$

10. Naj bo

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon} \,,$$

pri čemer je $\boldsymbol{\epsilon} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$ za neznan parameter σ^2. Kakšna je porazdelitev izraza

$$\frac{\hat{\beta}_k}{\sqrt{c_{kk} \cdot \frac{1}{n-m} \sum_{i=1}^n \hat{\epsilon}_i^2}} \,,$$

kjer je c_{kk} diagonalni element matrike $\mathbf{C} = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}$ in

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}} = (\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X})\mathbf{Y}$$

vektor rezidualov?