Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Statistika

Pisni izpit

6. julij 2018

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Za pozitiven rezultat morate zbrati vsaj 45 točk od 100 možnih. Veliko uspeha!

Naloga	a.	b.	c.	d.	
1.					
2.				•	
3.				•	
4.			•	•	
Skupaj	•	•	•	•	

REŠITVE

1. (25) Pogojno varianco vektorja $\boldsymbol{Y}$ glede na vektor $\boldsymbol{X}$ definiramo kot

$$\operatorname{var}(\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X}) = \begin{pmatrix} \operatorname{var}(Y_1|\boldsymbol{X}) & \operatorname{cov}(Y_1,Y_2|\boldsymbol{X}) & \cdots & \operatorname{cov}(Y_1,Y_n|\boldsymbol{X}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \operatorname{cov}(Y_n,Y_1|\boldsymbol{X}) & \operatorname{cov}(Y_n,Y_2|\boldsymbol{X}) & \cdots & \operatorname{var}(Y_n|\boldsymbol{X}) \end{pmatrix}.$$

Naj bosta $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ slučajna vektorja in naj za $\rho \in (-1,1)$ velja

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{Y} \end{pmatrix} \sim \mathrm{N}\left(\begin{pmatrix} \mu\mathbf{1} \\ \nu\mathbf{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \rho\mathbf{I} \\ \rho\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \right).$$

Za pare $(X_1,Y_1),\ldots,(X_n,Y_n)$ to pomeni, da so neodvisni in porazdeljeni dvorazsežno normalno z $E(X_k)=\mu$, $E(Y_k)=\nu$, $\operatorname{var}(X_k)=\operatorname{var}(Y_k)=1$ ter $\operatorname{cov}(X_k,Y_k)=\rho$ za $k=1,2,\ldots,n$ in $\rho\in(-1,1)$.

a. (5) Pokažite, da v splošnem velja

$$\operatorname{var}(\mathbf{A}\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X}) = \mathbf{A}\operatorname{var}(\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X})\,\mathbf{A}^T$$

za vsako slučajno matriko $\mathbf{A}$ primernih dimenzij, ki je odvisna le od $\boldsymbol{X}$.

Rešitev: Formulo izpeljemo na enak način kot sorodno nepogojno formulo, pri čemer upoštevamo linearnost pogojne pričakovane vrednosti.

Najprej izpeljemo, da za vsako slučajno matriko $\mathbf{B}$ *primernih dimenzij velja*

$$E(\mathbf{AB}|\boldsymbol{X}) = \mathbf{A}\,E(\mathbf{B}|\boldsymbol{X}).$$

Za ta namen označimo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n1} & \cdots & B_{np} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{m1} & \cdots & C_{mp} \end{pmatrix}.$$

Velja $C_{ik} = \sum_{j=1}^n A_{ij}B_{jk}$. *Iz linearnosti pogojne pričakovane vrednosti in dejstva, da so slučajne spremenljivke* A_{ij} *odvisne le od* $\boldsymbol{X}$*, dobimo*

$$E(C_{ik}|\boldsymbol{X}) = \sum_{j=1}^n E(A_{ij}B_{jk}|\boldsymbol{X}) = \sum_{j=1}^n A_{ij}\,E(B_{jk}|\boldsymbol{X}).$$

Leva stran je natančno element, ki je v i*-ti vrstici in* k*-tem stolpcu slučajne matrike* $E(\mathbf{C}|\boldsymbol{X}) = E(\mathbf{AB}|\boldsymbol{X})$*, desna stran pa je natančno element, ki je v* i*-ti vrstici in* k*-tem stolpcu slučajne matrike* $\mathbf{A}\,E(\mathbf{B}|\boldsymbol{X})$*. Formula sledi.*

Ustrezna enakost velja tudi za množenje z $\mathbf{A}$ *z desne strani, saj je*

$$\begin{aligned} E(\mathbf{MA}|\boldsymbol{X}) &= E\Big[\big(\mathbf{A}^T\mathbf{M}^T\big)^T \;\Big|\; \boldsymbol{X}\Big] \\ &= \Big[E\big(\mathbf{A}^T\mathbf{M}^T \mid \boldsymbol{X}\big)\Big]^T \\ &= \Big[\mathbf{A}^T\, E\big(\mathbf{M}^T \mid \boldsymbol{X}\big)\Big]^T \\ &= E(\mathbf{M}|\boldsymbol{X})\mathbf{A}\,. \end{aligned}$$

Končno lahko izpeljemo zahtevano formulo: velja

$$\begin{aligned} \operatorname{var}(\mathbf{A}\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X}) &= E\big((\mathbf{A}\boldsymbol{Y})(\mathbf{A}\boldsymbol{Y})^T \mid \boldsymbol{X}\big) - \big(E(\mathbf{A}\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X})\big)\big(E(\mathbf{A}\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X})\big)^T \\ &= E\big(\mathbf{A}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{Y}^T\mathbf{A}^T \mid \boldsymbol{X}\big) - \big(E(\mathbf{A}\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X})\big)\big(E(\mathbf{A}\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X})\big)^T \\ &= \mathbf{A}\,E(\boldsymbol{Y}\boldsymbol{Y}^T|\boldsymbol{X})\,\mathbf{A}^T - \big(\mathbf{A}\,E(\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X})\big)\big(\mathbf{A}\,E(\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X})\big)^T \\ &= \mathbf{A}\,E(\boldsymbol{Y}\boldsymbol{Y}^T|\boldsymbol{X})\,\mathbf{A}^T - \big(\mathbf{A}\,E(\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X})\big)\big(E(\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X})\big)^T\mathbf{A}^T \\ &= \mathbf{A}\Big(E(\boldsymbol{Y}\boldsymbol{Y}^T|\boldsymbol{X}) - \big(E(\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X})\big)\big(E(\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X})\big)^T\Big)\mathbf{A}^T \\ &= \mathbf{A}\operatorname{var}(\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X})\,\mathbf{A}^T\,. \end{aligned}$$

b. (5) Izračunajte $\operatorname{var}(Y_k|X_1,\ldots,X_n)$ in $\operatorname{cov}(Y_k,Y_l|X_1,\ldots,X_n)$ za $k\neq l$.

Rešitev: Po formulah za večrazsežno normalno porazdelitev je

$$\boldsymbol{Y}|_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}} \sim \mathrm{N}\left(\nu\mathbf{1} + \rho\,(\boldsymbol{x}-\mu\mathbf{1})\,,(1-\rho^2)\mathbf{I}\right)\,.$$

Iz tega preberemo

$$\operatorname{var}(Y_k|X_1,\ldots,X_n) = 1-\rho^2 \quad \textit{in} \quad \operatorname{cov}(Y_k,Y_l|X_1,\ldots,X_n) = 0\,.$$

c. (10) Naj bo $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k$ in $\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n Y_k$. Naj bo

$$R = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n (X_k-\bar{X})(Y_k-\bar{Y})\,.$$

Izračunajte $E(R|X_1,\ldots,X_n)$ in $\operatorname{var}(R|X_1,\ldots,X_n)$.

Namig: zapišete lahko

$$R = \frac{1}{n}\,\boldsymbol{X}^T\mathbf{H}\boldsymbol{Y}$$

z idempotentno matriko

$$\mathbf{H} = \mathbf{I} - \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}^T\,.$$

Rešitev:

Prvi način: z uporabo namiga. *Iz prejšnje točke razberemo*

$$E(\boldsymbol{Y}\,|\,\boldsymbol{X}) = (\nu - \rho\mu)\mathbf{1} + \rho\boldsymbol{X}\,.$$

Z uporabo prvega koraka pri rešitvi točke a. in upoštevajoč, da je $\mathbf{H1} = 0$, *izračunamo*

$$E(R|\boldsymbol{X}) = \frac{1}{n}\,\boldsymbol{X}^T\mathbf{H}\,E(\boldsymbol{Y}\,|\,\boldsymbol{X}) = \frac{\rho}{n}\,\boldsymbol{X}^T\mathbf{H}\boldsymbol{X} = \frac{\rho}{n}\sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2\,.$$

Nadalje je

$$\begin{aligned}\operatorname{var}(R|X_1,\ldots,X_n) &= \frac{1}{n^2}\,\boldsymbol{X}^T\mathbf{H}\operatorname{var}(\boldsymbol{Y}\,|\,\boldsymbol{X})\,\mathbf{H}\boldsymbol{X}\\ &= \frac{1-\rho^2}{n^2}\,\boldsymbol{X}^T\mathbf{H}\boldsymbol{X}\\ &= \frac{1-\rho^2}{n^2}\sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2\,.\end{aligned}$$

Drugi način: po komponentah. *Iz prejšnje točke razberemo*

$$E(Y_k|X_1,\ldots,X_n) = \nu + \rho(X_k - \mu)\,.$$

Z uporabo linearnosti dobimo

$$E(\bar{Y}|X_1,\ldots,X_n) = \nu + \rho(\bar{X} - \mu)\,,$$

torej

$$E(Y_k - \bar{Y}|X_1,\ldots,X_n) = \rho(X_k - \bar{X})\,,$$

Sledi

$$E(R|X_1,\ldots,X_n) = \frac{\rho}{n}\sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2\,,$$

kar je isto kot prej.

Za izračun variance pa opazimo, da je $R = \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})Y_k$. *Upoštevajoč, da so* $Y_1,\ldots,Y_n$ *pogojno nekorelirane, dobimo*

$$\begin{aligned}\operatorname{var}(R|X_1,\ldots,X_n) &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2\operatorname{var}(Y_k|X_1,\ldots,X_n) =\\ &= \frac{1-\rho^2}{n^2}\sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2\,,\end{aligned}$$

kar je spet isto kot prej.

d. (5) Izračunajte $\operatorname{var}(R)$.

Rešitev: Uporabimo formulo

$$\operatorname{var}(R) = E\big[\operatorname{var}(R|\boldsymbol{X})\big] + \operatorname{var}\big[E(R|\boldsymbol{X})\big]$$

in dejstvo, da je

$$\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)\,.$$

Iz pričakovane vrednosti porazdelitve hi kvadrat dobimo

$$E\big[\mathrm{var}(R|\boldsymbol{X})\big] = \frac{1-\rho^2}{n^2}\cdot(n-1)\,,$$

iz variance te porazdelitve pa

$$\mathrm{var}\big[E(R|\boldsymbol{X})\big] = \frac{\rho^2}{n^2}\cdot 2(n-1)\,.$$

Sledi

$$\mathrm{var}(R) = \frac{(1+\rho^2)(n-1)}{n^2}\,.$$

2. (25) Privzemite, da vsaki enoti v populaciji velikosti N pripadata dve vrednosti statističnih spremenljivk X in Y. Označite vrednosti z $(x_1, y_1), \ldots, (x_N, y_N)$. Privzemite, da sta populacijsko povprečje in populacijska varianca spremenljivke X znani, ter ju označite z μ_X in σ_X^2.

Iz populacije izberemo enostavni slučajni vzorec velikosti n. Označite vrednosti spremenljivk za vzorčne enote z $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$. Iz zgoraj povedanega izhaja, da je

$$E(X_k) = \mu_X \qquad \text{in} \qquad \operatorname{var}(X_k) = \sigma_X^2$$

za $k = 1, 2, \ldots, n$.

a. (10) Označite $c = \operatorname{cov}(X_1, Y_1)$. Izračunajte $\operatorname{cov}(X_k, Y_l)$ za $k \neq l$.

Namig: kaj je $\operatorname{cov}(X_k\,,\ Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_N)$*?*

Rešitev: Zaradi simetrije so kovariance $\operatorname{cov}(X_k, Y_l)$ *enake za vse* $k \neq l$*. Kovarianca v namigu je* 0*, ker je druga vsota konstanta. Iz bilinearnosti za kovariance sledi*

$$\operatorname{cov}(X_k, Y_k) + (N-1)\operatorname{cov}(X_k, Y_l) = 0\,,$$

torej

$$\operatorname{cov}(X_k, Y_l) = -\frac{c}{N-1}\,.$$

b. (10) Privzemite, da je kovarianca $c = \operatorname{cov}(X_1, Y_1)$ znana. Oceniti želimo populacijsko povprečje μ_Y spremenljivke Y. Predlagana je naslednja cenilka:

$$\tilde{Y} = \bar{Y} - \frac{c}{\sigma_X^2}\,(\bar{X} - \mu_X)\,.$$

Pokažite, da je cenilka nepristranska, in izračunajte njeno varianco.

Rešitev: Nepristanskost sledi iz nepristranskosti cenilk $\bar{X}$ *in* $\bar{Y}$ *ter linearnosti pričakovane vrednosti. Računamo*

$$\begin{aligned}
\operatorname{var}(\tilde{Y}) &= \operatorname{var}(\bar{Y}) + \frac{c^2}{\sigma_X^4}\operatorname{var}(\bar{X}) - \frac{2c}{\sigma_X^2}\operatorname{cov}(\bar{Y}, \bar{X}) \\
&= \frac{\sigma_Y^2}{n}\cdot\frac{N-n}{N-1} + \frac{c^2}{\sigma_X^4}\cdot\frac{\sigma_X^2}{n}\cdot\frac{N-n}{N-1} - \frac{2c}{n^2\sigma_X^2}\left(nc - (n^2-n)\,\frac{c}{N-1}\right) \\
&= \frac{N-n}{N-1}\,\frac{1}{n}\left(\sigma_Y^2 - \frac{c^2}{\sigma_X^2}\right).
\end{aligned}$$

c. (5) Privzemite, da je $c = \operatorname{cov}(X_1, Y_1)$ znana. Je cenilka $\tilde{Y}$ vedno boljša od cenilke $\bar{Y}$? Utemeljite odgovor.

Rešitev: Obe cenilki sta nepristranski, tako da lahko primerjamo njuni varianci. Varianca cenilke $\tilde{Y}$ *je očitno vedno manjša ali enaka, enakost pa velja natanko tedaj, ko je* $c = 0$*.*

3. (25) Opazimo vrednosti $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n$, ki so vse neodvisne realizacije enorazsežne normalne porazdelitve. Za $k = 1, 2, \ldots, n$ vrednosti x_k in y_k izhajata iz $\mathrm{N}(\mu_k, \sigma^2)$. Za različne k so torej pričakovane vrednosti lahko različne, medtem ko morajo biti vse variance enake.

a. (10) Poiščite cenilke parametrov $\mu_1, \ldots, \mu_n$ in σ po metodi največjega verjetja.

Rešitev: Logaritemska funkcija verjetja je

$$\begin{aligned}
&\ell(\mu_1, \ldots, \mu_n, \sigma | x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \\
&\qquad = -2n \log \sigma - n \log(2\pi) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(x_k - \mu_k)^2 + (y_k - \mu_k)^2}{2\sigma^2}
\end{aligned}$$

in parcialni odvodi so

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ell}{\partial \mu_i} &= \frac{2\mu_k - x_k - y_k}{\sigma^2}, \\
\frac{\partial \ell}{\partial \sigma} &= -\frac{2n}{\sigma} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(x_k - \mu_k)^2 + (y_k - \mu_k)^2}{\sigma^3}.
\end{aligned}$$

Izenačimo z nič in po krajšem računu dobimo cenilke

$$\hat{\mu}_k = \frac{x_k + y_k}{2}, \qquad \hat{\sigma} = \left[\frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2\right]^{1/2}.$$

b. (10) Katere od cenilk za $\mu_1, \ldots, \mu_k$ in σ^2 (ne σ) po metodi največjega verjetja so nepristranske? Morebitne pristranske popravite tako, da bodo nepristranske.

Rešitev: Če opažene vrednosti $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k$ nadomestimo z ustreznimi slučajnimi spremenljivkami $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_k$, velja $E(X_k) = E(Y_k) = \mu_k$, torej je tudi $E(\hat{\mu}_k) = \mu_k$. Cenilke za μ_k so torej nepristranske.

Cenilka za σ^2 po metodi največjega verjetja je seveda

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2.$$

Ker je $X_k - Y_k \sim \mathrm{N}(0, 2\sigma^2)$, je $E\big[(X_k - Y_k)^2\big] = \mathrm{var}(X_k - Y_k) = 2\sigma^2$, torej je $E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2/2$. Cenilka za σ^2 je torej pristranska in ni niti asimptotično nepristranska (kar pomeni, da niti dosledna ni). Lahko pa jo popravimo v nepristransko cenilko

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2.$$

c. (5) Izračunajte variance vseh nepristranskih cenilk iz prejšnje točke.

Namig: varianca kvadrata standardne normalne slučajne spremenljivke je enaka 2.

Rešitev: Velja

$$\operatorname{var}(\hat{\mu}_k) = \frac{\operatorname{var}(X_k) + \operatorname{var}(Y_k)}{4} = \frac{\sigma^2}{2}\,.$$

Nadalje iz namiga sklepamo, da je $\operatorname{var}\big[(X_k - Y_k)^2\big] = 8\sigma^4$, *od koder dobimo*

$$\operatorname{var}(\tilde{\sigma}^2) = \frac{2\sigma^4}{n}\,.$$

Ko gre n proti neskončno, gre to gre proti nič, kar pomeni, da je $\tilde{\sigma}^2$ dosledna cenilka za σ^2. To velja tudi za $\tilde{\sigma}$ kot cenilko za σ.

4. (25) Predpostavite, da je pravi regresijski model

$$\boldsymbol{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}$$

za $E(\boldsymbol{\epsilon}) = 0$ in $\mathrm{var}(\boldsymbol{\epsilon}) = \sigma^2\mathbf{I}$. Privzemite, da je $\mathbf{X}$ matrika dimenzij $n \times m$ z $m < n$ in s polnim rangom. Označite z $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ cenilko $\boldsymbol{\beta}$ po metodi najmanjših kvadratov. Kot znano privzemite lemo za inverz bločne matrike: če je matrika oblike

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix},$$

je levi zgornji kot inverza enak

$$\boldsymbol{\Sigma}^{11} = \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} + \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{12}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{22} - \boldsymbol{\Sigma}_{21}\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{12}\right)^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21}\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1},$$

spodnji desni kot pa

$$\boldsymbol{\Sigma}^{22} = (\boldsymbol{\Sigma}_{22} - \boldsymbol{\Sigma}_{21}\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{12})^{-1}.$$

a. (10) Privzemite, da pri modeliranju pozabimo del neodvisnih spremenljivk. Privzamemo torej, da so opazovane vrednosti nastale v skladu z napačno enačbo

$$\boldsymbol{Y} = \mathbf{X}_1\boldsymbol{\beta}_1^* + \boldsymbol{\epsilon}^*,$$

kjer je $\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1; \mathbf{X}_2]$ ter še $E(\boldsymbol{\epsilon}^*) = 0$ in $\mathrm{var}(\boldsymbol{\epsilon}^*) = \sigma^2\mathbf{I}$. Pišimo $\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \end{pmatrix}$. V skladu z napačnim modelom ocenimo $\boldsymbol{\beta}_1^*$ z $\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^* = \left(\mathbf{X}_1^T\mathbf{X}_1\right)^{-1}\mathbf{X}_1^T\boldsymbol{Y}$. Naj bo $\hat{\boldsymbol{\beta}}_1$ najboljša linearna nepristranska cenilka za $\boldsymbol{\beta}_1$ v pravilnem modelu. Pokažite, da je

$$\mathrm{var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1) - \mathrm{var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^*) = \sigma^2\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^T,$$

kjer je

$$\mathbf{A} = \left(\mathbf{X}_1^T\mathbf{X}_1\right)^{-1}\mathbf{X}_1^T\mathbf{X}_2 \quad \text{in} \quad \mathbf{B} = \mathbf{X}_2^T\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_2^T\mathbf{X}_1\mathbf{A}.$$

Rešitev: Pri izračunu variance (natančneje, kovariančne matrike) cenilke $\boldsymbol{\beta}_1^*$ *moramo upoštevati pravi model*

$$\boldsymbol{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{X}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2 + \boldsymbol{\epsilon},$$

torej

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^* = \left(\mathbf{X}_1^T\mathbf{X}_1\right)^{-1}\mathbf{X}_1^T\left(\mathbf{X}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2 + \boldsymbol{\epsilon}\right).$$

Ker je $\mathbf{X}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ *modeliran kot determinističen (čeprav neznan) vektor, ga lahko pri izračunu variance zanemarimo. Velja torej*

$$\mathrm{var}\big(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^*\big) = \Big(\left(\mathbf{X}_1^T\mathbf{X}_1\right)^{-1}\mathbf{X}_1^T\Big)\mathrm{var}(\boldsymbol{\epsilon})\Big(\left(\mathbf{X}_1^T\mathbf{X}_1\right)^{-1}\mathbf{X}_1^T\Big)^T.$$

Upoštevajoč, da je $\mathrm{var}(\boldsymbol{\epsilon}) = \sigma^2\mathbf{I}$*, po krajšem računu dobimo*

$$\mathrm{var}\big(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^*\big) = \sigma^2\left(\mathbf{X}_1^T\mathbf{X}_1\right)^{-1}.$$

Za izračun variance najboljše linearne nepristranske cenilke v pravem modelu pa lahko porabimo teorijo linearne regresije: to je levi zgornji blok matrike $\sigma^2\big(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\big)^{-1}$. Velja

$$\mathbf{X}^T\mathbf{X} = \begin{pmatrix}\mathbf{X}_1^T\\ \mathbf{X}_2^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{X}_1^T\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_1^T\mathbf{X}_2\\ \mathbf{X}_2^T\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2^T\mathbf{X}_2\end{pmatrix}.$$

Vstavimo v formulo za inverz bločne matrike in dobimo

$$\begin{aligned}\operatorname{var}\big(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1\big) = \sigma^2\Big[&\big(\mathbf{X}_1^T\mathbf{X}_1\big)^{-1} + \big(\mathbf{X}_1^T\mathbf{X}_1\big)^{-1}\mathbf{X}_1^T\mathbf{X}_2 \times\\ &\times\Big(\mathbf{X}_2^T\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_2^T\mathbf{X}_1\big(\mathbf{X}_1^T\mathbf{X}_1\big)^{-1}\mathbf{X}_1^T\mathbf{X}_2\Big)^{-1}\mathbf{X}_2^T\mathbf{X}_1\big(\mathbf{X}_1^T\mathbf{X}_1\big)^{-1}\Big].\end{aligned}$$

Primerjamo z definicijama matrik $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$ in vidimo, da je to res enako $\big(\mathbf{X}_1^T\mathbf{X}_1\big)^{-1} + \mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^T$.

b. (15) Utemeljite, da je matrika $\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^T$ pozitivno semi-definitna, kar pomeni, da ima lahko $\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^*$ manjšo varianco kot $\hat{\boldsymbol{\beta}}_1$. Zakaj to ni v nasprotju z izrekom Gauss–Markova?

Namig: če je $\mathbf{C}$ pozitivno definitna, je tudi $\mathbf{C}^{-1}$ pozitivno definitna. Poleg tega je tudi vsak minor pozitivno definitne matrike pozitivno definiten.

Rešitev: Ker je

$$\big\langle \mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^T\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{u}\big\rangle = \big\langle \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^T\boldsymbol{u},\, \mathbf{A}^T\boldsymbol{u}\big\rangle,$$

je dovolj dokazati, da je matrika $\mathbf{B}^{-1}$ pozitivno definitna. Slednja pa se po namigu ujema s spodnjim desnim blokom, torej minorjem matrike $\big(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\big)^{-1}$. Ker je $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ pozitivno definitna, to velja tudi za njen inverz in njen minor.

Po izreku Gauss–Markova ima $\hat{\boldsymbol{\beta}}_1$ najmanjšo varianco med vsemi linearnimi nepristranskimi cenilkami za $\boldsymbol{\beta}_1$. Cenilka $\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^*$ ima lahko manjšo varianco, ker je lahko pristranska. Velja namreč

$$E\big(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^*\big) = \big(\mathbf{X}_1^T\mathbf{X}_1\big)^{-1}\mathbf{X}_1^T\big(\mathbf{X}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2\big) = \boldsymbol{\beta}_1 + \big(\mathbf{X}_1^T\mathbf{X}_1\big)^{-1}\mathbf{X}_1^T\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2\,.$$