Izbrana poglavja iz verjetnosti in statistike

# Seminarska naloga

## Navodila

Naloge so sestavni del predmeta. Oceno dobite, ko oddate rešitve.

Izjava: S podpisom potrjujem, da so rešitve moje delo. Ime: ________________________
Podpis: ______________________.

## Teorija mere

1. ❍ Za dogodke $A_1, A_2 \ldots$ velja $P(A_n) \to 0$ in $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n \cap A_{n+1}^c) < \infty$. Dokažite, da je $P(\limsup_n A_n) = 0$.

2. ◗ Naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ neodvisne slučajne spremenljivke in za $1 \leq m \leq n$ definirajte

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{j=1}^{n} X_j \\ S_{m,n} &= \sum_{j=m+1}^{n} X_j \end{aligned}$$

   $(S_{n,n} = 0)$

   a. Naj bo $\epsilon > 0$ and $T = \inf\{1 \leq j \leq n \colon |S_j| > 2\epsilon\}$, pri čemer je $\inf\{\emptyset\} = \infty$. Dokažite, da je

$$\cup_{j=1}^{n} \{T = j, |S_{j,n}| \leq \epsilon\} \subset \{|S_n| > \epsilon\}\,.$$

   b. Dokažite Ottavianijevo neenačbo

$$P\left(\max_{1 \leq j \leq n} |S_j| > 2\epsilon\right) \leq \frac{P(|S_n| > \epsilon)}{\min_{1 \leq j \leq n} P(S_{j,n} \leq \epsilon)}\,.$$

3. ◗ Naj bo $\mu$ končna mera na $[0,1)$. Ali obstaja taka Borelova množica $A$, da za vsak interval $[a,b) \subset [0,1)$ velja $\mu([a,b) \cap A) = \frac{\mu([a,b))}{2}$?

4. ● Naj bo $\lambda$ Lebesgueova mera na $[0,1)$. Ali obstaja taka Borelova podmnožica $A \subset [0,1)$, da za vsak interval $[a,b) \subset [0,1)$ velja

$$0 < \lambda([a,b) \cap A) < \lambda([a,b))\,?$$

5. ❍ Naj bodo $\mu_n$ za $n \geq 1$ pozitivne mere na merljivem prostoru $(S, \mathcal{S})$ in $f \colon S \to \mathbb{R}_+$ merljiva funkcija. Definirajte $\mu = \sum_{n \geq 1} \mu_n$. Pokažite, da je $\mu$ mera in velja

$$\int f(x)\,\mu(\mathrm{d}x) = \sum_{n \geq 1} \int f(x)\,\mu_n(\mathrm{d}x)\,.$$

6. ◗ Naj bodo $f_n \geq 0$ in $f \geq 0$ merljive funkcije in naj $f_n \to f$, ko $n \to \infty$ s.g.. Predpostavljajte, da velja

$$\int f_n(x)\,\mu(\mathrm{d}x) \to \int f(x)\,\mu(\mathrm{d}x)\,,$$

ko $n \to \infty$ in dokažite, da velja

$$\int |f_n(x) - f(x)|\,\mu(\mathrm{d}x) \to 0\,,$$

ko $n \to \infty$. (Trditev je znana kot Scheffféjev izrek).

7. ◗ ☞ Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ verjetnostni prostor in naj bo dan $\pi$–sistem $\mathcal{A} \in \mathcal{F}$. Predpostavimo $\Omega \in \mathcal{A}$. Predpostavite, da družina slučajnih spremenljivk $\mathcal{M}$ izpolnjuje naslednje pogoje:

   (i) $\mathcal{M}$ je vektorski prostor, torej iz $X_1, X_2 \in \mathcal{M}$ sledi $\alpha X_1 + \beta X_2 \in \mathcal{M}$ za poljubna $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

   (ii) Če je $X_1 \leq X_2 \leq \ldots$ naraščajoče zaporedje slučajnih spremenljivk in je $X(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) < \infty$ za vsak $\omega \in \Omega$, potem je $X \in \mathcal{M}$.

   (iii) $I_A \in \mathcal{M}$ za vsak $A \in \mathcal{A}$.

   Dokažite:

   a. Družina $\mathcal{M}$ vsebuje natanko $\sigma(\mathcal{A})$ merljive slučajne spremenljivke. *Ta trditev je izrek o monotonih razredih.*

   b. Naj bosta $X$ in $Y$ slučajni spremenljivki in naj bo $Y$ merljiva glede na $\sigma(X)$. Uporabite (a) za dokaz, da obstaja Borelova funkcija $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ z $Y = \phi(X)$. *Namig:* $\mathcal{A} = \sigma(X)$.

   c. Če je $Y$ merljiva glede na $\sigma(X)$ in neodvisna od $X$, kaj lahko rečemo o slučajni spremenljivki $Y$?

8. ☞ ◗ Naj bo $\mathcal{A}$ algebra dogodkov na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Predpostavljajte, da je $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{A})$, torej algebra $\mathcal{A}$ generira $\mathcal{F}$.

a. Dokažite, da za poljuben dogodek $A \in \mathcal{F}$ in za poljuben $\epsilon > 0$ obstaja dogodek $A_\epsilon \in \mathcal{A}$, tak da je

$$P\left((A \cap A_\epsilon^c) \cup A^c \cap A_\epsilon)\right) = P(A \triangle A_\epsilon) < \epsilon\,.$$

b. Naj bo $\{X_t \colon t \in \mathbb{Z}^d\}$ družina neodvisnih, enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk, pri čemer je $P(X_t = 1) = p$ in $P(X_t = 0) = 1 - p$ za nek $p \in (0,1)$. Predpostavljajte, da je $A$ dogodek v $\sigma(\{X_t \colon t \in \mathbb{Z}^d\})$ invarianten na translacije v naslednjem smislu:

$$I_A = \Phi(X)$$

za neko merjlivo funkcijo na $\Phi \colon \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d} \to [0,1]$ in velja

$$I_A = \Phi(X^s) \ \text{ s.g.}$$

za vsak $s \in \mathbb{Z}^d$, kjer je $X_t^s = X_{t+s}$. Pokažite, da je ali $P(A) = 0$ ali $P(A) = 1$.

*Namig: Oglejte si najprej $\Phi$, ki so odvisne samo od končno mnogo komponent $X$. Nato uporabite a.*

9. ❍ Naj bosta $X$ in $Y$ slučajni spremenljivki in predpostavimo, da je $E(|X+Y|) < \infty$. Če sta $X$ in $Y$ neodvisni, sledi potem iz predpostavke, da je $E(|X|) < \infty$?

10. ◗ Naj bosta $\mu$ in $\nu$ končni meri na $[0,1]$ in definirajte za $x \in [0,1]$

$$F(x) = \mu([0,x]) \qquad \text{in} \qquad G(x) = \nu([0,x])$$

Pokažite, da velja formula za integracijo *per partes* oblike

$$\int_{[0,1]} F(x)\nu(\mathrm{d}x) = F(1)G(1) - \int_{[0,1]} G(x)\mu(\mathrm{d}x) + \int_{[0,1]} \mu(\{x\})\,\nu(\mathrm{d}x)\,.$$

*Namig: Uporabite Fubinijev izrek za funkcijo $1_{(0 \le y \le x \le 1)}$.*

11. ◗ Naj bo $f$ merljiva funkcija na kartezičnem produktu $(S_1 \times S_2, \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2)$. Predpostavite, da sta meri $\mu$ in $\nu$ $\sigma$-končni in velja

$$\int_{S_1} \mu(\mathrm{d}s_1) \int_{S_2} |f(x,y)|\,\nu(\mathrm{d}y) < \infty\,.$$

Pokažite, da je potem

$$\begin{aligned}\int_{S_1} \mu(\mathrm{d}s_1) \int_{S_2} f(s_1, s_2)\, \nu(\mathrm{d}s_2) \;&=\; \int_{S_1\times S_2} f(s_1, s_2)\, (\mu \times \nu)(\mathrm{d}s_1, \mathrm{d}s_2) \\ &=\; \int_{S_2} \nu(\mathrm{d}s_2) \int_{S_1} f(s_1, s_2)\, \mu(\mathrm{d}s_1)\end{aligned}$$

(Izrek je znan kot Tonelli-Hobsonov izrek).

12. ◗ Naj bosta $\mu$ in $\nu$ verjetnostni meri meri na kvadratu $[0, 1]^2$ in predpostavljajte $\nu \ll \mu$. Naj bosta $\nu_x$ in $\mu_x$ projekciji danih mer na $[0, 1]$ definirani z

$$\mu_x(B) = \mu(B \times [0, 1]) \qquad \text{in} \qquad \nu_x(B) = \nu(B \times [0, 1])\,.$$

Očitno je tudi $\nu_x \ll \mu_x$. V kakšni zvezi je ta odvod z odvodom

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}\,?$$

13. Naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ slučajne spremenljivke z $E|X_k| < \infty$ za $k \geq 1$. Naj $X_k \overset{\text{s.g.}}{\to} X$, ko $k \to \infty$. Pokažite, da v primeru, ko je $E|X| < \infty$ in velja $E|X_n| \to E|X|$, ko $n \to \infty$, velja $E|X_n - X| \to 0$, ko $n \to \infty$.

14. Naj bo $S = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ množica vseh zaporedij ničel in enk. Množico $S$ opremimo s produktno topologijo, kjer na faktorjih $\{0, 1\}$ v produktu vzamemo diskretno topologijo. Naj bo $P_n$ projekcija $S$ na $n$-to komponento. Naj bo $\mathcal{T}$ topologija na $S$ z bazo odprtih množic, ki so končni preseki množic oblike $P_n^{-1}(\{0\})$ in $P_n^{-1}(\{1\})$. Pokažite, da je Borelova $\sigma$-algebra generirana z baznimi odprtimi množicami.

15. Naj bo $f$ Lebesgue integrabilna funkcija na $\mathbb{R}$. Dokažite, da vrsta

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x + n)$$

konvergira absolutno za skoraj vse $x \in \mathbb{R}$.

16. Privzemite, da je $1 \leq p_0 < p_1$. Naj bo za $0 < t < 1$

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}\,.$$

Dokažite, da iz $f \in L^{p_0}(\mu) \cap L^{p_1}(\mu)$ sledi, da je $f \in L^{p_t}(\mu)$ in velja

$$\|f\|_{p_t} \leq \|f\|_{p_0}^{1-t} \|f\|_{p_1}^{t}\,.$$

## Osnove verjetnostnega računa

17. ◗ Kovanec mečemo dokler ne dobimo ali $r$ grbov ali $t$ števil zaporedoma. Predpostavljajte, da je $P(grb) = p$ in so meti med sabo neodvisni in označite $q = 1 - p$.

   a. Naj bo $A$ dogodek, da dobimo prej $r$ grbov zapovrstjo kot $t$ števil zapovrstjo. Naj bo $B = \{\text{prvi met je grb}\}$ in označite

   $$p_s = P(A|B) \qquad \text{in} \qquad p_f = P(A|B^c)\,.$$

   Izpeljite

   $$\begin{aligned} P(A) &= p^r + (1-p^r)p_f \\ P(A) &= (1-q^t)p_s \end{aligned}$$

   b. Izračunajte $P(A)$.

18. ● John Foobar ima probleme z zaposlitvijo. Če je neko jutro brezposeln, bo zvečer dobil delo z verjetnostjo $p_h$, neodvisno od preteklih dni. Če bo neko jutro zaposlen, bo zvečer zgubil delo z verjetnostjo $p_f$, tudi neodvisno od preteklih dni. John Foobar bo tako negotovo življenje živel $n$ dni.

   a. Označite z $F_n(s)$ rodovno funkcijo števila večerov, ko bo John Foobar zaposlen, pri pogoju, da je brezposeln prvo jutro. Podobno označite z $G_n(s)$ rodovno funkcijo števila večerov, ko bo John

Foobar zaposlen pri pogoju, da je zaposlen prvo jutro. Pokažite, da je

$$\begin{array}{l} F_n(s) = p_h\, s\, G_{n-1}(s) + q_h F_{n-1}(s) \\ G_n(s) = p_f\, F_{n-1}(s) + q_f\, s\, G_{n-1}(s) \end{array},$$

kjer je $q_h = 1 - p_h$, $q_f = 1 - p_f$ in $F_0(s) = G_0(s) = 1$.

b. (10) Izpeljite, da je

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n(s) t^n = \frac{A(t)}{1 - sB(t)},$$

kjer je

$$B(t) = \frac{t(q_f - (q_f - p_h)t)}{1 - q_h t} \qquad \text{in} \qquad A(t) = \frac{1 - B(t)}{1 - t}.$$

c. Prepričajte se, da je

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n'(1) t^n = \frac{\alpha t}{(1-t)^2} + \frac{\beta}{(1-t)} - \frac{\beta}{1 - (q_f - p_h)t}$$

za primerna $\alpha$ in $\beta$ in izračunajte $E(X_n)$ pri pogoju, da je J. F. prvo jutro zaposlen.

## Pogojne porazdelitve in pogojna matematična upanja

19. ◗ Naj bo $(X,Y)$ slučajna spremenljivka z vrednostmi v $\mathbb{R}^2$ in porazdelitvijo $\mu_{X,Y}$. Naj bo $\mathcal{G} = \sigma(|X|,|Y|)$. Opišite pogojno porazdelitev vektorja $(X,Y)$ glede na $\sigma$–algebro $\mathcal{G}$.

20. ◗ Naj bo $X$ slučajna spremenljivka z vrednostmi v poljskem prostoru $(S,\mathcal{S})$ z Borelovo $\sigma$–algebro. Privzemite, da obstaja končna grupa $(T_\alpha)$ merljivih transformacij $(S,\mathcal{S})$, takih, da je porazdelitev $X$ invariantna za vsak $T_\alpha$, torej
$$\mu_X(T_\alpha^{-1}(B)) = \mu_X(B)$$
za vsak $B \in \mathcal{S}$. Naj bo $\tau$ družina vseh merljivih podmnožic $(S,\mathcal{S})$, ki so invariantne za vse $T_\alpha$, torej
$$T_\alpha^{-1}(B) = B\,.$$

    a. Dokažite, da je $\tau$ $\sigma$–algebra.

    b. Naj bo $\mathcal{G} = X^{-1}\tau$. Opišite pogojno porazdelitev $X$ glede na $\mathcal{G}$.

21. ◗ Naj imata slučajni spremenljivki $X$ in $Y$ s vrednostmi v $\mathbb{R}$ gostoto $f_{X,Y}$. V elementarni verjetnosti je pogojna porazdelitev $X$ glede na $\sigma(Y)$ definirana kot
$$Q(\omega,B) = \begin{cases} \dfrac{\int_B f_{X,Y}(x,Y(\omega))\,\mathrm{d}x}{f_Y(Y(\omega))}\,, & \text{če je } f_Y(Y(\omega)) \neq 0 \\ \nu(B) & \text{sicer,} \end{cases}$$
kjer je $\nu$ lahko poljubna verjetnostna mera.

    a. Dokažite po vseh pravilih dlakocepstva, da $Q$ res zadošča definiciji pogojne porazdelitve.

    b. Recimo, da je $T$ celoštevilska slučajna spremenljivka in je funkcija $P(X \leq x, T = n) = \int_{-\infty}^x g_n(u)\,\mathrm{d}u$ za vsak $x$ za neko funkcijo $g_n \geq 0$ za vsak $n \in \mathbb{Z}$. Pokažite, spet po vseh pravilih dlakocepstva, da je
$$E(T|X) = \psi(X)\,,$$

kjer je

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{f_X(x)} \sum_{\mathbb{Z}} n \cdot g_n(x) & \text{če je } f_X(x) \neq 0 \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

Obstoj gostote $f_X$ spremenljivke $X$ je del naloge.

c. Naj bodo $Z_0, Z_1, Z_2, \ldots$ med sabo neodvisne enako porazdeljene slučajne spremenljivke z porazdelitveno funkcijo $G$ in zvezno gostoto $g > 0$. Označimo $T = \inf\{n > 0 \colon Z_n > Z_0\}$ (vemo, da je $P(T < \infty) = 1$).

$$P(Z_T \leq t, T = n) = \frac{G^{n+1}(t)}{n(n+1)}\,.$$

d. Oznaka $1_\Lambda$ pomeni indikator množice $\Lambda$. Izračunajte

$$E(1_{(T=n)}|Z_T)\,.$$

22. ☞ ● Naj bodo $X_1, X_2, \ldots, X_n$ neodvisne, enako porazdeljene strogo pozitivne slučajne spremenljivke. Predpostavite $n \geq 3$. Naj bo $J$ celoštevilska slučajna spremenljivka z vrednostmi v $\{1, 2, \ldots, n\}$, za katero velja

$$P(J = j|X_1, X_2, \ldots, X_n) = \frac{X_j}{S_n}\,,$$

kjer je $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

Definirajte vektor $X^* = (X_1^*, \ldots, X_{n-1}^*)$ s predpisom

$$X_i^* = \begin{cases} X_i, & \text{če } i < J \\ X_{i+1}, & \text{če } i \geq J\,. \end{cases}$$

a. Pokažite, da za poljubno omejeno Borelovo funkcijo $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ velja

$$E[f(X_J, X_1^*, \ldots, X_{n-1}^*)] = nE[\frac{X_1}{S_n} f(X_1, X_2, \ldots, X_n)]\,.$$

b. Naj bo $S_{n-1}^* = X_1^* + \cdots + X_{n-1}^*$. Pokažite, da za poljubne omejene Borelove funkcije $f, h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $g \colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ velja

$$E\left[f(X_J)g(X^*)h(S_{n-1}^*)\right] = nE\left[\frac{X_1}{S_n} f(X_1)g(X_{n-1})h(S_{n-1})\right]\,,$$

kjer je $X_{n-1} = (X_2, \ldots, X_n)$ in $S_{n-1} = X_2 + \cdots + X_n$.

c. Dokažite

$$E\left[g(X^*)|X_J, S^*_{n-1}\right] = E\left[g(X^*)|S^*_{n-1}\right] .$$

d. Sklepajte, da je

$$E\left[f(X_J)g(X^*)|S^*_{n-1}\right] = E\left[f(X_J)|S^*_{n-1}\right] E\left[g(X^*)|S^*_{n-1}\right] .$$

23. ☞ ● Naj bo $X$ slučajna spremenljivka na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ in naj bo $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$.

   a. Predpostavite $E(X^2) < \infty$ in $E(X|\mathcal{G}) \stackrel{d}{=} X$. Pokažite, da je $E(X|\mathcal{G}) = X$ s.g.

   b. Predpostavite, da je $E|X| < \infty$ in $E(X|\mathcal{G}) \stackrel{d}{=} X$. Pokažite, da je tudi v tem primeru $E(X|\mathcal{G}) = X$ s.g.

24. ❍ Naj bodo $X_1, X_2, \ldots, X_n$ neodvisne enako porazdeljene slučajne spremenljivke z $X_1 > 0$, $EX_1 = \mu$ in $E(X_1^q) < \infty$ za $1 < q \leq 2$. Dokažite

$$(EX_1)^q \leq E(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j)^q \leq E\left[X_1\left(\frac{X_1 + (n-1)\mu}{n}\right)^{q-1}\right] .$$

   *Namig: Pogojni Jensen.*

25. ◗ Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ verjetnostni prostor in $L^2(P)$ Hilbertov prostor vseh slučajnih spremenljivk s končnim drugim momentom.

   a. Naj bo $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ poljubna $\sigma$–algebra. Dokažite, da je podprostor vseh ekvivalenčnih razredov v $L^2(P)$, ki imajo $\mathcal{G}$–merljivega predstavnika, zaprt.

   b. Naj bo za slučajno spremenljivko $X \in L^2(P)$ spremenljivka $\pi_{\mathcal{G}}(X)$ ortogonalna projekcija $X$ na zaprt podprostor iz a. Pokažite, da je poljuben $\mathcal{G}$–merjiv predstavnik te ortogonalne projekcije v $L^2(P)$ verzija pogojnega matematičnega upanja $E(X|\mathcal{G})$.

c. Ali lahko uporabite b. za dokaz eksistence pogojnega upanja za poljubno spremenljikvo v $L^1(P)$?

d. Interpretirajte formulo

$$\mathrm{var}(X) = E(\mathrm{var}(X|\mathcal{G})) + \mathrm{var}(E(X|\mathcal{G}))$$

v luči zgornje definicije pogojnega matematičnega upanja.

26. ◗ Naj bodo $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ neodvisne slučajne spremenljivke in naj za $i = 1, \ldots, n$ velja $\xi_i \sim \Gamma(p_i, \lambda)$. Naj bo $\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i$.

a. Opišite pogojno porazdelitev $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ glede na $\sigma(\xi)$.

b. Opišite pogojno porazdelitev $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)/\xi$ glede na $\sigma(\xi)$.

*Opomba: Ta pogojna porazdelitev se imenuje Dirichletova porazdelitev s parametrom* $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$.

c. Naj ima vektor $P = (P_1, \ldots, P_n)$ Dirichletovo porazdelitev s parametrom $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$. Predpostavljajte, da je pogojna porazdelitev vektorja $\mathbf{M} = (M_1, \ldots, M_n)$ s celoštevilskimi komponentami glede na $\sigma(\mathbf{P})$ multinomialna definirana s

$$P(M_1 = k_1, \ldots, M_n = k_n|\mathbf{P}) = \frac{n!}{k_1!k_2! \ldots, k_n!} \prod_{i=1}^n P_i^{k_i}$$

za $\sum_{i=1}^n k_i = n$. Poiščite pogojno porazdelitev vektorja $\mathbf{P}$ glede na $\sigma(\mathbf{M})$.

27. Predpostavljajte, da za integrabilni slučajni spremenljivki $X$ in $Y$ velja $E(X|Y) = Y$ in $E(Y|X) = X$.

a. Dokažite, da za poljuben $x \in \mathbb{R}$ velja

$$\begin{aligned} 0 &\leq E[(X-Y)1(Y \leq x < X)] = E[(Y-X)1(X > x, Y > x)] \\ 0 &\geq E[(X-Y)1(X \leq x < Y)] = E[(Y-X)1(X > x, Y > x)] \end{aligned}$$

b. Dokažite, da je $X = Y$ s.g.

28. Naj bodo $X_n$ slučajne spremenljivke na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Predpostavite, da je $|X_n| \leq Y$ za vse $n$ in je $EY < \infty$. Predpostavite, da $X_n \to X$ skoraj gotovo, ko $n \to \infty$.

   a. Naj bo $\mathcal{G}_n$ naraščajoče zaporedje $\sigma$-algeber z $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{F}$. Naj bo $\mathcal{G}$ najmanjša $\sigma$-algebra, ki vsebuje $\cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_n$. Pokažite, da velja skoraj gotovo
$$E\left(X_n | \mathcal{G}_n\right) \to E\left(X | \mathcal{G}\right) \,,$$
   ko $n \to \infty$.

   b. Naj bo $\mathcal{G}_n$ padajoče zaporedje $\sigma$-algeber z $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{F}$. Naj bo $\mathcal{G} = \cap_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_n$. Pokažite, da velja skoraj gotovo
$$E\left(X_n | \mathcal{G}_n\right) \to E\left(X | \mathcal{G}\right) \,,$$
   ko $n \to \infty$.

## Martingali

29. ● Naj bo $(X_n, \mathcal{F}_n)$ pozitivni supermartingal in naj bo $U(a,b)$ število prečkanj intervala $(a,b)$ za $0 < a < b < \infty$. Dokažite Dubinsovo neenakost
$$P(U(a,b) \geq k) \leq \left(\frac{a}{b}\right)^k E \min\left(\frac{X_0}{a}, 1\right) \,.$$

30. Naj bodo $S_1, S_2, \ldots, S_n$ delne vsote zaporedja neodvisnih slučajnih spremenljivk s pričakovano vrednostjo 0. Dokažite naslednje trditve:

   a. $E(S_1^+) \leq E(S_2^+) \leq \cdots \leq E(S_n^+)$.

   b. $P(S_j \geq -2E(S_n^+)) \geq 1/2$ za vse $1 \leq j \leq n$.

   c. Za poljuben $a \geq 0$ je
$$P(\max_{1 \leq j \leq n} S_j \geq a + 2E(S_n^+)) \leq 2P(S_n \geq a) \,.$$

31. ● Naj bodo $(X_n)$, $(Y_n)$ in $(Z_n)$ pozitivna adaptirana zaporedja glede na filtracijo $(\mathcal{F}_n)$. Predpostavljajte $E|X_n| < \infty$ in

$$E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \leq (1 + Z_n) \cdot X_n + Y_n$$

in $\sum_n Y_n < \infty$ in $\sum_n Z_n < \infty$ s.g. Dokažite, da $(X_n)$ konvergira s.g. proti končni limiti.

*Namig: $(X_n)$ je "skoraj" super-martingal.*

32. ◗ Dano je zaporedje slučajnih spremenljivk $X_1, X_2, \ldots$ z vrednostmi na intervalu $(0, 1)$, ki ustrezajo zvezam

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} &= aX_n + (1-b)|X_0, X_1, \ldots, X_n) = X_n \\ P(X_{n+1} &= aX_n|X_0, X_1, \ldots, X_n) = 1 - X_n \end{aligned}$$

pri čemer je $X_0 = x_0 \in (0, 1)$ konstanta in $0 < a < b < 1$.

a. Dokažite, da je $(X_n)$ ne-negativni supermartingal.
b. Dokažite, da $X_n \to X_\infty$ s.g., ko $n \to \infty$.
c. Izračunajte $P(X_\infty = 0)$.

   *Namig: Izračunajte $E(X_\infty)$.*

33. ● Predpostavljajte, da igrate ruleto in vedno stavite na rdeče. Če stavite $x$ enot denarja, potem v primeru, da se kroglica ne ustavi na rdečem, izgubite stavo, sicer pa vam stavo vrnejo in dobite še enkrat $x$ enot denarja, tako da ste $x$ enot bogatejši. *Martingalska strategija* predpisuje, da začnemo igrati s stavo 1. Če zgubimo, v naslednji igri stavo podvojimo, torej stavimo 2 enoti. Če spet zgubimo, stavo spet podvojimo. S podvajanjem nadaljujemo, dokler se ne pojavi rdeče ali dokler nam ne zmanjka denarja za podvajanje. V vsaki "rundi" bodisi zaslužimo 1 enoto bodisi nam zmanjka denarja za podvajanje. Verjetnost, da se kroglica ustavi na rdečem je $p = 18/37$.

a. Recimo, da imate na začetku $2^{n+1} - 1$ enot denarja in runde ponavljate, dokler jih dobivate, kakor hitro pa rundo zgubite, odstopite. Kolikšna je verjetnost, da vam bo na ta način uspelo podvojiti vaš denar?

b. Recimo, da uporabljate martingalsko strategijo, ampak se kot strasten kockar ne morete ustaviti. Pokažite, da boste pri poljubni končni začetni vsoti z verjetnostjo 1 izgubili ves denar.

34. ● Naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ slučajne spremenljivke na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Naj bo $A \in \sigma(X_1, X_2, \ldots)$. V tem primeru lahko zapišemo

$$1_A = \Phi(X_1, X_2, \ldots)\,,$$

kjer je $\phi\colon \mathbb{R}^\infty \to [0,1]$ merljiva glede na ustrezno definirano $\sigma$-algebro na $\mathbb{R}^\infty$ (kakšno?). Dogodek $A$ je simetričen, če za vsako permutacijo $\tau \in \mathbb{S}_n$ velja

$$1_A = \Phi(X_1, X_2, \ldots) = \Phi(X_{\tau(1)}, \ldots, X_{\tau(n)}, X_{n+1}, \ldots)\,.$$

a. Najdite dva primera simetričnih dogodkov, ki niso v "repni" $\sigma$-algebri zaporedja slučajnih spremenljivk.

b. Naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke. Hewitt-Savageov izrek pravi, da je v tem primeru ali $P(A) = 0$ ali $P(A) = 1$. Poskusite dokazati s pomočjo martingalov.

35. ● Naj bo $(X_n)$ martingal z lastnostjo $\sup_n E|X_n| < \infty$. Dokažite, da obstajata pozitivna martingala $(Y_n)$ in $(Z_n)$, taka da je $\sup_n E|Y_n| < \infty$ in $\sup_n E|Z_n| < \infty$, ter $X_n = Y_n - Z_n$.

36. Naj bo $M$ nenegativen martingal z $M_0 = 0$ in $E(X_n^2) < \infty$ za vse $n \geq 0$. Pokažite, da za $x \geq 0$ velja

$$P\left(\max_{0\leq k\leq n} M_k > x\right) \leq \frac{E(X_n^2)}{E(X_n^2) + x^2}\,.$$

37. Ta naloga je povzeta po članku S-Y. R. Li, A martingale approach to the study of occurence of sequence patterns in repeated experiments, *Annals of Probability*, (1980), str. 1171-1176 in po G. Blom, L. Holst, D. Sandell, *Problems and Snapshots from the World of Probability*, Springer Verlag, 1994, str. 207.

Opica tipka na pisalni stroj z $m$ znaki. Matematično privzamemo, da so natipkane črke zaporedje med sabo neodvisnih, enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk $X_1, X_2, \ldots$ z vrednostmi v množici "črk"

$\{1, \ldots, m\}$ in dano skupno porazdelitvijo $P(X_1 = k) = p_k$ za $1 \leq k \leq m$. Dano je $n$ različnih končnih nizov črk. Če bi šlo za resnični pisalni stroj, bi bila recimo dana niza "ABRAKADABRA", "TO BE, OR NOT TO BE" in morda še kaj. Opica bo prej ali slej napisala enega od danih $n$ nizov. Vprašanje je, s kolikšno verjetnostjo bo kateri od danih nizov prišel v zaporedju $X_1, X_2, \ldots$ na vrsto prvi in kako dolgo bomo morali čakati v povprečju, da se bo pojavil eden od danih nizov.

Naj bodo dani nizi $S_1, S_2, \ldots, S_n$ z dolžinami $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Najprej definiramo *prekrivanje* nizov $S_i$ in $S_j$ z

$$e(S_i, S_j) = \sum_{r=1}^{k} \frac{\epsilon_r(i,j)}{p_{c_1} \cdots p_{c_r}},$$

kjer je $k = \min(k_i, k_j)$ in $\epsilon_r(i,j) = 1$, če se niz $S_i$ konča z znaki $c_1 c_2 \ldots c_r$ in $S_j$ začne s temi znaki, sicer je $\epsilon_r(i,j) = 0$.

a. Naj bo $l$ dano nenegativno celo število. Za dana $1 \leq i, j \leq n$ naj bo $S_i^l$ slučajni niz, ki ga dobimo tako, da niz $S_i$ nadaljujemo z $X_1, X_2, \ldots, X_l$ ($S_i^0 = S_i$). Definirajmo slučajni spremenljivki

$$e(l) = e(S_i^l, S_j) \qquad \text{in} \qquad Y_l = e(l) - l\,.$$

Definirajmo še

$$\begin{aligned} N_j &= \inf\{n \geq 0\colon X_{n-k_j+1} X_{n-k_j+2} \ldots X_n = S_j\} \\ N_{ij} &= \inf\{r \geq 0\colon S_i X_1 X_2 \ldots X_r = S_j \text{ ali } X_{r-k_j+1} \ldots X_r = S_j\}\,. \end{aligned}$$

Dokažite, da je

$$M_l = Y_{l \wedge N_{ij}}$$

martingal glede na $\mathcal{F}_l = \sigma(X_1, \ldots, X_l)$.

b. Uporabite izrek o opcijskem ustavljanju za dokaz, da je

$$E(Y_{N_{ij}}) = E(Y_0)\,.$$

c. Dokažite, da je

$$\begin{aligned} E(Y_0) &= e(S_i, S_j) \\ E(Y_{N_{ij}}) &= e(S_j, S_j) - E(N_{ij}) \end{aligned}$$

d. Izpeljite, da je

$$\begin{aligned} E(N_j) &= e(S_j, S_j) \\ E(N_{ij}) &= e(S_j, S_j) - e(S_i, S_j)\,. \end{aligned}$$

e. Naj bo $N = \min(N_1, \ldots, N_n)$ in $\pi_j = P(N = N_j)$. Prepričajte se, da je

$$E(N_i - N | N = N_j) = e(S_i, S_i) - e(S_j, S_i)\,.$$

f. Dokažite, da velja

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} e(S_j, S_i)\pi_j &= E(N) \text{ in} \\ \sum_{j=1}^{n} \pi_j &= 1\,. \end{aligned}$$

g. Na običajnem pisalnem stroju je recimo 40 znakov vključno s presledki in vejicami. Predpostavite, da opica izbira tipke z enako verjetnostjo. Kolikšna je verjetnost, da bo prej natipkala “ABRAKADABRA” kot “TO BE, OR NOT TO BE”?

38. Naj bo $(X_n, \mathcal{F}_n)$ martingal na $(\Omega, \mathcal{G}, P)$. Spodnje trditve ali dokažite ali ovrzite s protiprimerom.

a. Če $X_n$ konvergira s.g. proti neki slučajni spremenljivki $X$, je $\sup_n E(X_n^+) < \infty$.

b. Če je $X_0 = 1$ in je $(|X_n|, \mathcal{F}_n)$ martingal, je $X_n \geq 0$ s.g. za vsak $n \geq 0$.

c. Naj bo $a_n$ zaporedje realnih števil. Obstaja martingal $X$, da je

$$P(\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) = a_n \text{ za } n \geq N(\omega)\}) = 1\,,$$

pri čemer je $N$ s.g. končna slučajna spremenljivka.

d. Če je

$$P(X_n < 0 \text{ neskončno mnogokrat}) = 0\,,$$

potem $X_n$ s.g. konvergira proti končni limiti.

39. Naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ neodvisne in enako porazdeljene. Naj bo $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Predpostavite, da za $t \in \mathbb{R}$ velja $\phi(t) = \log(M_{X_1}(t)) < \infty$.

    a. Prepričajte se, da je $M_n = \exp(tS_n - n\phi(t))$ martingal.
    b. Če je $t \geq 0$ in $\phi(t) \geq 0$, je za vsak opcijski čas
    $$P(S_T \geq x, T \leq n) \leq e^{-tx+\phi(t)n}\,.$$
    Dokažite.
    c. Predpostavite, da so $X_k$ porazdeljene standardno normalno. Naj bo $x_n = \alpha f(\alpha^{n-1})$ za $\alpha > 1$, kjer je
    $$f(\alpha) = (2\alpha \log\log\alpha)^{1/2}\,.$$
    Dokažite, da je
    $$P(\sup_{k\leq\alpha^n} S_k \geq x_n) \leq ((n-1)\log\alpha)^{-\alpha}\ .$$
    d. Dokažite, da je
    $$\limsup_{k\to\infty} \frac{S_k}{\sqrt{2k\log\log k}} \leq 1 \qquad \text{s.g.}\,.$$

40. (Časovno nehomogeni procesi razvejanja) Kot pri časovno homogenem procesu razvejanja začnemo z enim posameznikom, torej $X_0 = 1$. Na koraku $n-1$ posameznik *umre* z verjetnostjo $1-p_n$ ali *se razdeli* v dva posameznika z verjetnostjo $p_n$. Z $X_n$ označimo število pozameznikov v $n$-ti generaciji.

    Bolj formalno predpostavljamo, da imamo družino $(Y_{nk}\colon n \geq 1, k \geq 1)$ neodvisnih slučajnih spremenljivk, takih da je $P(Y_{nk} = 2) = p_n$ in $P(Y_{nk} = 0) = 1 - p_n$ za $k \geq 1$ in $n \geq 1$. Slučajne spremenljivke $X_n$ definiramo rekurzivno z
    $$\begin{aligned} X_0 &= 1 \\ X_n &= \sum_{k=1}^{X_{n-1}} Y_{n,k} \qquad \text{za } n \geq 1\,. \end{aligned}$$
    Če je $X_{n-1} = 0$ je seveda $X_n = 0$.

    Predpostavljajte $p_n \downarrow 1/2$.

a. Dokažite, da je
$$E(X_n) = \prod_{k=1}^{n} (2p_k)$$
in
$$E(X_n^2) = E(X_n)^2 \left[ 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{E(X_k)} (1 - p_k) \right]$$
za $n = 1, 2, \ldots$.

b. Prepričajte se, da je $M_n = X_n / E(X_n)$ martingal glede na filtracijo $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$. Pokažite, da je ta martingal omejen v $L^2$, če in samo če je
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{E(X_k)} < \infty \,.$$

c. Dokažite, da proces izumre z verjetnostjo 1, t.j. $X_n = 0$ slej ko prej v $n$ s.g., če je
$$\sum_{k=1}^{\infty} (2p_k - 1) < \infty$$
in preživi s pozitivno verjetnostjo, t.j. $X_n > 0$ za vse $n$ s pozitivno verjetnostjo, če je
$$\sum_{k=1}^{\infty} \exp\Big( -\alpha \sum_{i=1}^{k} (2p_i - 1) \Big) < \infty$$
za nek $\alpha < 1$.

d. Naj bo $p_n = (1/2 + n^{-\gamma}) \wedge 1$. Za katere $\gamma$ proces preživi s pozitivno verjetnostjo?

## Konvergenca slučajnih spremenljivk

41. ◗ Naj bo $X_1, X_2, \ldots$ zaporedje slučajnih spremenljivk z vrednostmi v $\mathbb{R}$.

a. Predpostavite $X_n \xrightarrow{P} X$. Dokažite, da obstaja podzaporedje $X_{n_k}$, ki konvergira skoraj gotovo proti $X$.

b. Predpostavite, da ima vsako podzaporedje $X_{n_k}$ nadalnje podzaporedje, ki konvergira v verjetnosti proti neki spremenljivki $X$. Ali lahko trdite, da zaporedje $X_1, X_2, \ldots$ konvergira v verjetnosti proti $X$?

c. Naj bo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Dokžite, da iz $X_n \xrightarrow{P} X$ sledi $f(X_n) \xrightarrow{P} f(X)$.

d. Naj $X_n \xrightarrow{P} X$ in naj bo $|X_n| \leq Y$ za vsak $n$ za neko slučajno spremenljivko $Y$ z $E(Y) < \infty$. Dokažite, da $E(X_n) \to E(X)$, ko $n \to \infty$. (*Izrek o dominirani konvergenci velja, če slučajne spremenljivke konvergirajo samo v verjetnosti.*)

42. ● Naj bodo $X_1, \ldots$ spremenljivke z vrednostmi v poljskem metričnem prostoru $(M, d)$.

a. Dokažite ekvivalenco naslednjih dveh definicij konvergence v verjetnosti:

(i) $X_n \xrightarrow{P} X$, če za vsak $\epsilon > 0$ velja $P(d(X_n, X) > \epsilon) \to 0$, ko $n \to \infty$.

(ii) Za vsako odprto množico $U$ velja $P(X \in U, X_n \notin U) \to 0$, ko $n \to \infty$.

b. Uporabite a. za ponoven dokaz, da iz $X_n \xrightarrow{P} X$ sledi $f(X_n) \xrightarrow{P} f(X)$ za poljubno zvezno funkcijo $f\colon (M, d) \to (M', d')$.

43. ❍ Računalniško generiranih slučajnih števil ni. Seveda pa obstajajo generatorji psevdo–slučajnih števil. Zaporedja takih psevdo–slučajnih števil naj bi imela čim več lastnosti res teoretičnih zaporedij neodvisnih slučajnih spremenljivk. Donald Knuth v *The art of Computer Programming, Vol. 2* postulira, da je generator psevdo–slučajnih števil "dober", če za vsak $k$ in za vsako omejeno Borelovo funkcijo $f\colon [0,1)^k \to \mathbb{R}$ velja

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k} f(U_j, U_{j+1}, \ldots, U_{j+k-1}) = \int_{[0,1)^k} f(x_1, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n\,. \tag{$*$}$$

Dokažite, da $(*)$ velja za zaporedje neodvisnih slučajnih spremenljivk $U_1, U_2, \ldots$, ki so vse enakomerno porazdeljene na $[0, 1)$.

44. ❍ Naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ nenegativne slučajne spremenljivke in naj bo $S_n = X_1 + X_2 + \ldots X_n$. Za realno število $x$ označimo z $[x]$ celi del $x$. Predpostavite, da obstaja konstanta $c$, taka da za vsak $a > 1$ velja

$$\frac{S_{[a^n]}}{[a^n]} \to c \quad \text{s.g., ko } n \to \infty.$$

Dokažite, da

$$\frac{S_n}{n} \to c \quad \text{s.g., ko } n \to \infty.$$

45. ● Naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ neodvisne, enako porazdeljene simetrične slučajne spremenljivke s

$$P(|X_i| > y) = \frac{1}{y^2} \quad \text{za } y \geq 1.$$

Naj bo $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Poiščite čim manjši $\alpha > 0$, za katerega bo veljalo

$$\frac{S_n}{(\log n)^\alpha \sqrt{n}} \to 0 \quad \text{s.g.}$$

46. ☞ ● Naj bosta $\mu$ in $\nu$ verjetnostni meri na $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ in naj bosta funkciji $F$ in $G$ definirani kot

$$F(x) = \mu((-\infty, x]) \qquad \text{in} \qquad G(x) = \nu((-\infty, x])\,.$$

Lévyjeva metrika na množici $\Pr(\mathbb{R})$ je definirana kot

$$d_L(\mu, \nu) = \inf\{\epsilon > 0 \colon F(x - \epsilon) - \epsilon \leq G(x) \leq F(x + \epsilon) + \epsilon\}.$$

Splošno definiramo na $\Pr(M)$, kjer je $(M, d)$ poljski prostor, metriko Prohorova $\rho$ s predpisom

$$\rho(\mu, \nu) = \inf\{\epsilon > 0 \colon \mu(F) < \nu(F^\epsilon) + \epsilon \text{ za vse } F \in \mathcal{C}\}\,.$$

kjer je $F^\epsilon = \{x \in M \colon d(x, F) < \epsilon\}$ in je $\mathcal{C}$ družina vseh zaprtih množic na $(M, d)$.

a. Dokažite, da metrika $d_L$ porodi šibko topologijo na $\Pr(\mathbb{R})$, kot smo jo definirali na predavanjih.

b. Prepričajte se, da je $\rho$ res metrika in dokažite, da ta metrika porodi šibko topologijo na $\Pr(M)$.

47. ● Naj bosta $\{X_n\}$ in $\{Y_n\}$ zaporedji slučajnih spremenljivk z vrednostmi v $\mathbb{R}$ definirani na istem verjetnostnem prostoru, prav tako pa tudi spremenljivki $X$ in $Y$.

    a. Dokažite najprej, da se lahko pri definiciji šibke konvergence za slučajne spremenljivke z vrednostmi v poljskem metričnem prostoru omejimo na enakomerno zvezne funkcije. Če torej konvergirajo matematična upanja $E(g(X_n)) \to E(g(X))$, ko $n \to \infty$ za vsako omejeno enakomerno zvezno funkcijo $g$, potem velja isto za vsako omejeno zvezno funkcijo.

    b. Predpostavite $X_n \xrightarrow{d} X$ in $Y_n \xrightarrow{d} c$, kjer je $c$ konstanta. Naj bo $f$ zvezna funkcija $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Dokažite, da potem $f(X_n, Y_n) \xrightarrow{d} f(X, c)$.

       *Namig: Kaj se dogaja z $(X_n, Y_n)$?*

    c. Najdite primer, ko $X_n \xrightarrow{d} X$ in $Y_n \xrightarrow{d} Y$, ko $n \to \infty$, $X_n + Y_n$ pa ne konvergira proti $X + Y$ v porazdelitvi.

    d. Naj bosta za vsak $n$ slučajni spremenljivki $X_n$ in $Y_n$ neodvisni in naj $X_n \xrightarrow{d} X$, $Y_n \xrightarrow{d} Y$, ko $n \to \infty$. Če sta tudi $X$ in $Y$ neodvisni, dokažite da potem $(X_n, Y_n) \xrightarrow{d} (X, Y)$, ko $n \to \infty$.

       *Namig: Skorohod.*

48. ● Naj bo dano zaporedje $X_n$ slučajnih spremenljivk z vrednostmi v poljskem metričnem prostoru $(M, d)$ in naj $X_n \xrightarrow{d} X$, ko $n \to \infty$. Naj bo $f\colon (M, d) \to (M', d')$ merjiva funkcija glede na Borelove $\sigma$-algebre.

    a. Dokažite, da je množica $D_f = \{x \in M\colon f \text{ ni zvezna v } x\}$ merljiva.

    b. Predpostavite, da je $P(X \in D_f) = 0$. Dokažite, da potem velja $f(X_n) \xrightarrow{d} f(X)$.

    c. Naj bo $(M, d)$ prostor $C[0, 1]$ s supremum normo in naj bo

$$f\colon C[0,1] \to \mathbb{R}$$

definirana z

$$f(w) = \int_0^1 1_{[0,\infty)}(w(s))\,\mathrm{d}s\,.$$

Dokažite, da je $D_f$ množica vseh funkcij $w \in C[0,1]$, za katere je $\lambda(\{x\colon w(x) = 0\}) > 0$, kjer je $\lambda$ Lebesgueova mera na $[0,1]$.

d. Za Wienerjevo mero je $W(\{w : w(t) \leq x\}) = \Phi(x/\sqrt{t})$, kjer je $\Phi$ porazdelitvena funkcija standardne normalne porazdelitve. Uporabite to dejstvo in Fubinijev izrek za dokaz, da za zgoraj definirani $f$ velja $W(D_f) = 0$.

e. Wienerjevo mero smo definirali kot limito porazdelitev slučajnih spremenljivk $W_n$. Elementarni izračun (glej Grimmett in Stirzaker) pove, da je $f(W_{2n})$ porazdeljena po zakonu

$$P(f(W_{2n}) = 2k/2n) = \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}.$$

za $k = 0,1,2,\ldots,n$. Dokažite, da je limitna porazdelitev spremenljivk $f(W_n)$, ko $n \to \infty$, porazdelitev z gostoto

$$g(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}} \quad \text{za } 0 < x < 1\,.$$

49. ◗ Za poljuben $q \in (0,1)$ in $N \geq 1$ naj bo

$$M_{q,N} = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_N\}\,,$$

kjer so $\{X_i\}$ med sabo neodvisne slučajne spremenljivke porazdeljene po geometrijskem zakonu s parametrom $q$, torej $P(X_1 = k) = (1-q)q^{k-1}$ za $k \geq 1$.

a. Kakšna je porazdelitev slučajne spremenljivke $M_{q,N}$.

b. Poiščite zaporedji $a_{q,N}$ in $b_{q,N}$, da bo veljalo

$$\frac{M_{q,N} - a_{q,N}}{b_{q,N}} \xrightarrow{d} Y\,,$$

ko $q \uparrow 1$ in $N \to \infty$, pri čemer porazdelitev $Y$ ne bo skoncentrirana v eni točki.

50. ◗ Naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ med seboj neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke z gostoto

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{za } |x| < 1 \\ |x|^{-3} & \text{za } |x| \geq 1 \end{cases}$$

a. Za vsak $n$ naj bo

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \text{in} \qquad Z_n = \sum_{i=1}^{n} X_i 1_{[-\sqrt{n},\sqrt{n}]}(X_i)\,.$$

Dokažite, da

$$Y_n - Z_n \xrightarrow{\mathrm{P}} 0\,,$$

b. Dokažite, da je

$$\frac{1}{\sqrt{n\log(n)}} Z_n \xrightarrow{\mathrm{d}} N(0,1)\,,$$

ko $n \to \infty$.

*Namig: Lindeberg.*

c. Sklepajte, da

$$\frac{1}{\sqrt{n\log n}} \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{d} N(0,1)\,,$$

ko $n \to \infty$.

51. ◗ Predpostavite $X_n \xrightarrow{d} X$ in $a_n X_n + b_n \xrightarrow{d} Y$, ko $n \to \infty$ in sta $\{a_n\}$ in $\{b_n\}$ dani zaporedji. Privzemite, da porazdelitvi spremenljivk $X$ in $Y$ nista skoncentrirani v eni točki.

a. (10) Pokažite, da na vsakem omejenem intervalu $\phi_{X_n}(t) \to \phi_X(t)$ enakomerno, ko $n \to \infty$.

*Namig:* $|e^{itx} - e^{ity}| \leq |t| \cdot |x-y|$ *in lahko privzamemo, da* $|X_n - X| \xrightarrow{P} 0$, *ko* $n \to \infty$. *Zakaj?*

b. (10) Dokažite, da

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = a > 0\,.$$

c. (10) Sklepajte, da zaporedje $\{a_n\}$ konvergira.

*Namig:* $\{a_n\}$ *ne more imeti več stekališč.*

d. (10) Pokažite še, da $b_n \to b$, ko $n \to \infty$.

*Namig:* $e^{itb_n} \to \phi_Y(t)/\phi_X(at)$. *Nato integrirajte.*

52. ◗ Naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ med sabo neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke z $X_i \sim \mathrm{Po}(1)$. Označite $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

a. (10) Naj bo $x_- = \max\{-x, 0\}$. Dokažite, da velja

$$\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}}\right)_- \xrightarrow{d} Z_- \qquad \text{in} \qquad E\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}}\right)_- \to E(Z_-) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,,$$

ko $n \to \infty$, kjer je $Z \sim N(0,1)$.

b. (10) Pokažite, da je

$$E\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}}\right)_- = e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{n-k}{\sqrt{n}}\right)\frac{n^k}{k!} = \frac{n^{n+1/2}e^{-n}}{n!}$$

in sklepajte, da je

$$n! \sim \sqrt{2\pi}n^{n+1/2}e^{-n}\,.$$

53. ❍ Naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ neodvisne, enako porazdeljene slučajne spremenljivke z $\mathrm{var}(X_k) = \sigma^2 < \infty$.

a. Definirajte

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X})^2\,,$$

kjer je $\bar{X} = (X_1 + \cdots + X_n)/n$. Dokažite, da

$$\sigma_n^2 \to \sigma^2 \qquad \text{s.g., ko } n \to \infty.$$

b. Predpostavite še $E(X_k^4) < \infty$. Dokažite, da

$$\sqrt{n}(\sigma_n^2 - \sigma^2) \xrightarrow{d} Z\,.$$

Kakšna je porazdelitev $Z$?

*Namig: Brez škode za splošnost predpostavite, da je* $E(X_1) = 0$. *Prepričajte se, da* $\sqrt{n}\bar{X}^2 \xrightarrow{P} 0$.

54. ◗ Predpostavite $X_n \xrightarrow{d} X$ in $a_n X_n + b_n \xrightarrow{d} Y$, ko $n \to \infty$ in sta $\{a_n\}$ in $\{b_n\}$ omejeni pozitivni zaporedji.

    a. Pokažite, da na vsakem omejenem intervalu enakomerno $\phi_{X_n}(t) \to \phi_X(t)$, ko $n \to \infty$.

    *Namig:* $|e^{itx} - e^{ity}| \leq |t| \cdot |x - y|$ *in lahko privzamemo, da* $|X_n - X| \xrightarrow{P} 0$*, ko* $n \to \infty$*. Zakaj?*

    b. Privzemite, da $Y$ ni konstanta. Dokažite, da

    $$\liminf_{n\to\infty} a_n = a > 0\,.$$

    c. Sklepajte, da zaporedje $\{a_n\}$ konvergira.

    *Namig:* $\{a_n\}$ *ne more imeti več stekališč.*

    d. Pokažite še, da $b_n \to b$, ko $n \to \infty$.

55. ● Naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ med sabo neodvisne, simetrične slučajne spremenljivke, za katere je $P(X_1 \neq 0) > 0$. Označimo $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Predpostavite, da za neko zaporedje $c_n > 0$ velja

    $$S_n \stackrel{d}{=} c_n X_1\,.$$

    a. Pokažite, da velja $c_{rk} = c_r c_k$ in $c_{r^k} = c_r^k$.

    b. Pokažite, da za poljubna $m, n$ in $x > 0$ velja

    $$P(c_{m+n} X_1 > c_n x) \geq \frac{1}{2} P(X_1 > x)$$

    in sklepajte, da je $c_n$ nepadajoče zaporedje in je $c_k > 1$ za $k \geq 2$.

    *Namig: Za dokaz monotonosti vzemite* $n = r^k$ *in* $m+n = (r+1)^k$.

    c. Pokažite, da mora biti $c_n = n^{1/\alpha}$.

    *Namig: Pokažite, da je za fiksna* $j, r > 1$

    $$\frac{l}{l+1} \cdot \frac{\log j}{\log c_j} < \frac{\log r}{\log c_r} < \frac{l+1}{l} \cdot \frac{\log j}{\log c_j}\,.$$

d. Sklepajte, da zaporedje $n^{-1/\alpha}S_n$ konvergira v porazdelitvi in je karakteristična funkcija $\phi$ spremenljivke $X_1$ oblike

$$\phi(t) = e^{-c|t|^\alpha}$$

za neko konstanto $c > 0$.

56. ● ☞ Naj bo $\{\mathcal{F}_{n,j}\colon n \geq 1, j \geq 1\}$ družina $\sigma$-algeber. Nabor slučajnih spremenljivk $\{X_{n,j}\colon n \geq 1, j \geq 1\}$ imenujemo shema martingalskih razlik glede na družino $\{\mathcal{F}_{n,j}\colon n \geq 1, j \geq 1\}$, če velja:

   1. $E(X_{n,j}^2) = \sigma_{n,j}^2 < \infty$ za vse pare $n, j$ in je $X_{n,j}$ merljiva glede na $\mathcal{F}_{n,j}$.
   2. $\mathcal{F}_{n,j-1} \subset \mathcal{F}_{n,j}$ za vse pare $n, j$.
   3. $E(X_{n,j}|\mathcal{F}_{n,j-1}) = 0$ za vse pare $n, j$.

   Dokažite naslednjo verzijo CLI:

   Naj bo $\{X_{n,j}\colon n \geq 1, j \geq 1\}$ shema martingalskih razlik glede na $\sigma$-algebre $\{\mathcal{F}_{n,j}\colon n \geq 1, j \geq 1\}$. Naj velja

   (i)
$$\sup_n E\left(\max_{1\leq j\leq n} X_{n,j}^2\right) < \infty\,.$$

   (ii)
$$\max_{1\leq j\leq n} |X_{n,j}| \xrightarrow{P} 0\,,$$

   ko $n \to \infty$.

   (iii)
$$\sum_{j=1}^n X_{n,j}^2 \xrightarrow{P} 1\,,$$

   ko $n \to \infty$.

   Če označimo $S_n = X_{n,1} + \cdots + X_{n,n}$, velja

$$S_n \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)\,,$$

   ko $n \to \infty$.

   Namigi:

a. Pokažite, da je tudi

$$Z_{n,j} = X_{n,j} \cdot 1(\sum_{k=1}^{j-1} X_{n,k}^2 \leq 2)$$

shema martingalskih razlik za isto družino $\sigma$-algeber. Pokažite, da je

$$P(Z_{n,j} \neq X_{n,j} \text{ za nek } 1 \leq j \leq n) \to 0\,,$$

ko $n \to \infty$.

b. Utemeljite, da je dovolj pokazati

$$\sum_{j=1}^{n} Z_{n,j} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)\,.$$

c. Pokažite, da za $x \in \mathbb{R}$ in $|x| < 1$ velja

$$\log(1 + ix) = ix - \frac{(ix)^2}{2} - r(x)\,,$$

kjer je $|r(x)| \leq |x|^3$.

d. Uporabite zvezo

$$e^{ix} = (1 + ix) \cdot \exp(-\frac{x^2}{2} + r(x))$$

za dokaz enakosti

$$I_n = \exp(it \sum_{j=1}^{n} Z_{n,j}) = T_n e^{-t^2/2} + V_n\,,$$

kjer je

$$T_n = \prod_{j=1}^{n} (1 + itZ_{n,j})$$

in

$$V_n = T_n \left[\exp\left(-\frac{t^2}{2} \sum_{j=1}^{n} Z_{n,j}^2 + \sum_{j=1}^{n} r(tZ_{n,j})\right) - e^{-t^2/2}\right]\,.$$

e. Definirajte

$$J_n = \min\{j \leq n \colon \sum_{k=1}^{j} X_{n,k} > 2\}\,,$$

če tak $j$ obstaja in $J_n = n$ sicer. Pokažite, da je

$$E(T_n^2) \leq e^{2t^2}\left(1 + t^2 E(X_{n,J_n}^2)\right)\,.$$

Sklepajte, da je družina $\{T_n\}$ enakomerno integrabilna.

f. Sklepajte, da je tudi

$$V_n = I_n - T_n e^{-t^2/2}$$

enakomerno integrabilna in pokažite $V_n \xrightarrow{P} 0$.

g. Pokažite še, da je $E(T_n) = 1$.

57. ● ☞ Naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ slučajne spremenljivke z vrednostmi v množici $\{-1, 1\}$. Označimo $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, $S_0 = 0$ in $M_n = \max\{S_0, S_1, \ldots, S_n\}$. Označimo $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Predpostavljajte

$$P(X_{n+1} = 1|\mathcal{F}_n) = \begin{cases} 1/2 & \text{če je } S_n < M_n \\ p & \text{če je } S_n = M_n \end{cases}$$

Predpostavljajte $p \in (0, 1/2)$. V bolj slikovitem jeziku to pomeni, da je slučajni sprehod $\{S_n\}$ nekoliko "zadržan" glede prečkanja prej doseženega maksimuma.

a. Pokažite, da

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} (\mu - 1)\bar{B}_1 + B_1\,,$$

kjer je

$$\bar{B}_1 = \max_{0 \leq t \leq 1} B_t$$

in je $(B_t \colon t \geq 0)$ standardno Brownovo gibanje. Poiščite konstanto $\mu$.

b. Definirajte slučajno funkcijo $B_n \in C[0, \infty)$ kot pri konstrukciji Brownovega gibanja s predpisom

$$B_n(k/n) = \frac{S_k}{\sqrt{n}}$$

za $k = 0, 1, 2, \ldots$ in za $t \in [k/n, (k+1)/n)$

$$B_n(t) = B_n(k/n) + \sqrt{n}(t - \frac{k}{n})\,.$$

Pokažite, da je družina porazdelitev spremenljivk $B_n$ tesna.

c. (Neobvezno) Kako bi dokazali, da je limita v porazdelitvi spremenljivk $B_n$ natanko določena?

## Transformacije slučajnih spremenljivk

58. ◗ Slučajni spremenljivki $T_1$ in $T_2$ naj bosta neodvisni z gostotama

$$f_{T_1}(t) = \begin{cases} (a/\sqrt{2\pi t^3})\exp(-a^2/(2t)) & \text{za } t > 0 \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

in

$$f_{T_2}(t) = \begin{cases} (b/\sqrt{2\pi t^3})\exp(-b^2/(2t)) & \text{za } t > 0 \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

za $a, b > 0$. Poščite gostoto vsote $T_1 + T_2$. *Namig: Laplaceova transformacija.*

59. ◗ Naj bo $\phi$ karakteristična funkcija slučajne spremenljivke $X$.

a. Predpostavite, da je $|\phi(t)| = 1$ za $t > 0$ in $|\phi(s)| < 1$ za $s \in (0, t)$. Dokažite, da obstajata $a$ in $\delta$, da je

$$P(X = a + k\delta \text{ za nek } k \in \mathbb{Z}) = 1\,,$$

torej porazdelitev $X$ je koncentrirana na množici $\{a + k\delta, k \in \mathbb{Z}\}$. Kakšen je največji možen $\delta$?

b. Predpostavite, da je Lebesgueova mera množice $\{t : |\phi(t)| = 1\}$ pozitivna. Dokažite, da je v tem primeru $X$ skoraj gotovo konstantna.

60. ☞ ● Naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ med sabo neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke z vrednostmi v $\mathbb{R}$, take da je $P(X_1 \neq 0) > 0$.

a. Predpostavljajte najprej, da je $E(X_1) = 0$ in $0 < \mathrm{var}(X_1) < \infty$. Dokažite, da za vsako omejeno merjivo množico $A \subset \mathbb{R}$ velja

$$\lim_{n\to\infty} P(X_1 + X_2 + \cdots + X_n \in A) = 0\,.$$

b. Predpostavljajte samo, da je $\phi_{X_1}(t) \in L_1(\mathbb{R})$. Dokažite, da zgornja trditev velja tudi v tem primeru.

c. Ne predpostavljajte ničesar. Dokažite, da trditev še vedno velja.

61. ◗ Slučajni spremenjivki $X$ in $Y$ naj bosta neodvisni z gostotama

$$f_X(x) = \frac{1}{2\cosh\frac{\pi x}{2}} \qquad \text{in} \qquad f_Y(x) = \frac{\pi}{4\cosh^2\frac{\pi x}{2}}\,.$$

a. Pokažite, da je

$$\phi_X(t) = \frac{1}{\cosh t} \qquad \text{in} \qquad \phi_Y(t) = \frac{t}{\sinh t}\,.$$

*Namigi: Najprej odvajajte funkcijo*

$$F(x) = \int_0^{e^{2x}} \frac{u^{-\frac{1}{2}+\frac{it}{2}}}{1+u}\,\mathrm{d}u\,.$$

*Nato upoštevajte*

$$\int_0^\infty \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}}\,\mathrm{d}u = \mathrm{B}(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad \mathrm{Re}(p) > 0,\ \mathrm{Re}(q) > 0$$

*in*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \qquad \textit{za } z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}\,.$$

*Potem odvajajte še*

$$G(x) = 2\int_0^{e^{2x}} \frac{u^{\frac{ti}{2}}}{(1+u)^2}\,\mathrm{d}u$$

*in uporabite spet identitete za funkciji* $\Gamma$ *in* B.

b. Poiščite gostoto slučajne spremenljivke $X + Y$.

62. ◗ Naj bo $\Lambda$ pozitivna Radonova mera na $\mathbb{R}$.

a. Predpostavite, da ima $\Lambda$ končno maso. Dokažite, da je v tem primeru funkcija

$$\phi(t) = \exp\Big( \int (e^{itx} - 1)\Lambda(\mathrm{d}x) \Big) \qquad (*)$$

karakteristična funkcija neke porazdelitve.

*Namig: Najprej predpostavite, da je $\Lambda$ skoncentrirana na končno mnogo točkah.*

b. Kaj bi morali zahtevati od mere $\Lambda$ z neskončno maso, da bo funkcija definirana z $(*)$ še vedno karakteristična funkcija.

63. ◗ Predpostavite, da so slučajne spremenljivke $X$, $X_1$ in $X_2$ med sabo neodvisne, enako porazdeljene, $E(X^2) < \infty$ in velja

$$X_1 \stackrel{d}{=} X_2 \stackrel{d}{=} (X_1 + X_2)/\sqrt{2}$$

Dokažite, da je biti $X$ normalno porazdeljene slučajna spremenljivka.

*Namig: CLI.*

64. ❍ Naj bodo $Z_1, Z_2, \cdots$ med sabo neodvisni, enako porazdeljeni slučajni vektorji z vrednostmi v $\mathbb{R}^2$, tako da je

$$\begin{aligned} P(Z_1 &= (1,0)) = 1/4 \\ P(Z_1 &= (0,1)) = 1/4 \\ P(Z_1 &= (-1,0)) = 1/4 \\ P(Z_1 &= (0,-1)) = 1/4\,. \end{aligned}$$

Definirajte $D_n = |\sum_{i=1}^n Z_i|$. Dokažite, da $D_n^2/n$ konvergira v porazdelitvi in poiščite gostoto limitne porazdelitve.

65. ● Gostota slučajne spremenljivke $X$ naj bo dana z

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-u}\frac{u}{u^2 + x^2}\,\mathrm{d}u\,.$$

a. Izračunajte karakteristično funkcijo spremenljivke $X$.

*Namig: Fubini.*

b. Naj bosta $U$ in $V$ neodvisni, enako porazdeljeni slučajni spremenljivki s karakteristično funkcijo

$$\phi_U(t) = \exp(\frac{1}{\pi}\int_0^\infty (e^{its}-1)\,\mathrm{d}s \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{u^2+s^2}\,\mathrm{d}u)\,.$$

Pokažite, da je $X \stackrel{d}{=} U - V$.

66. ☞ ● Mero $L$ na $(\mathbb{R},\mathcal{B})$ imenujemo *Lévyjeva*, če zadošča pogojem

(i) $L(-\epsilon,\epsilon)^c < \infty$ za vse $\epsilon > 0$.

(ii) $L(\{0\}) = 0$.

(iii) $\int_{-1}^1 x^2 L(dx) < \infty$.

a. Naj bo

$$\psi_{L,\sigma^2,c}(t) = \int_{\mathbb{R}} (e^{itx} - 1 - it\tau(x))L(dx) - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 - ict\,,$$

kjer je

$$\tau(x) = \begin{cases} x & \text{za } |x| \leq 1 \\ 1 & \text{za } x > 1 \\ -1 & \text{za } x < -1 \end{cases}$$

Dokažite, da je $\exp(\psi_{L,\sigma^2,c}(t))$ karakteristična funkcija neke neskončno deljive porazdelitve.

*Namig: Brez škode za splošnost je lahko $c = 0$ in $\sigma^2 = 0$. Nato uporabite eno od domačih nalog in neenačbo $|e^{iy} - 1 - ity| \leq y^2/2$ za $|y| \leq 1$.*

b. Dokažite, da $\psi_{L,\sigma^2,c}$ enolično določa $L$, $\sigma$ in $c$.

*Namig: Definirajte mero*

$$\begin{aligned} M_{\sigma^2,L}(dx) &= (\tau(x))^2 L(dx) \text{ za } x \neq 0 \text{ in} \\ M_{\sigma^2,L}(\{0\}) &= \sigma^2\,. \end{aligned}$$

*Dokažite, da je*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{itx} g_h(x) M_{\sigma^2,L}(dx) = \psi(t) - \frac{1}{2}(\psi(t+h) - \psi(t-h))$$

*za* $h > 0$*, kjer je*

$$g_h(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos xh}{\tau^2(x)} & \text{za } x \neq 0 \\ \frac{h^2}{2} & \text{za } x = 0 \end{cases}$$

*Opomba: Dokazati se da, da ima vsaka neskončno deljiva porazdelitev karakteristično funkcijo zgornje oblike. Glej Durrett, str. 163.*

67. ◗ Za $t > 0$, $x, y > 0$ označite

$$q_t^\nu(x,y) = \frac{1}{2t}\left(\frac{y}{x}\right)^{\nu/2} \exp(\,-(x+y)/2t) I_\nu(\sqrt{xy}/t)\,,$$

kjer je

$$I_\nu(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{u}{2}\right)^{\nu+2k}}{k!\Gamma(\nu+k+1)}$$

modificirana Besslova funkcija z indeksom $\nu$. Za fiksna $t$ in $x$ je $q_t^\nu$ gostota neke porazdelitve na $\mathbb{R}_+$.

a. Naj bosta $X$ in $Y$ neodvisni slučajni spremenljivki z gostotama $q_t^\mu(x,\cdot)$ in $q_t^\nu(y,\cdot)$. Pokažite, da je gostota $X+Y$ enaka $q_t^{\mu+\nu+1}(x+y,\cdot)$.

   *Namig: Laplace.*

b. Naj imata zdaj $U$ in $V$ gostoto

   $$f_{U,V}(u,v) = q_t^\nu(x,u) q_s^\nu(u,v)$$

   za $u, v > 0$. Pokažite, da ima $V$ gostoto $q_{t+s}^\nu(x,\cdot)$.

   *Namig: Laplace in Fubini.*

## Chen-Steinova metoda

68. ● Na prostoru verjetnostnih mer (porazdelitev) na $\mathbb{R}$, ki ga označimo s $\Pr(\mathbb{R})$, je možno definirati več metrik. *Metrika totalne variacije* je definirana po predpisu:

$$d_{TV}(\mu,\nu) := \sup\big\{|\mu(B) - \nu(B)| : B \subset \mathbb{R} \text{ Borelova}\big\}$$

Pri *metriki Kolmogorova* pa gledamo razliko le na zaprtih levih poltrakih:

$$d_K(\mu,\nu) := \sup\big\{|\mu((-\infty, w]) - \nu((-\infty, w])| : w \in \mathbb{R}\big\}$$

Dokažite naslednje trditve.

a. Metrika totalne variacije je strogo močnejša od metrike Kolmogorova.
b. Metrika Kolmogorova na prostoru $\Pr(\mathbb{R})$ porodi topologijo, ki je strogo močnejša od šibke.
c. Zaporedje porazdelitev, ki šibko konvergira proti porazdelitvi, ki je absolutno zvezna glede na Lebesguovo mero, proti tej porazdelitvi konvergira tudi v metriki Kolmogorova.
d. Naj bo $r \in \mathbb{N}$. Na prostoru porazdelitev:

$$\mathcal{B}_r(\mathbb{R}) := \left\{\mu \in \Pr(\mathbb{R}) : \int |x|^r \, \mu(dx) < \infty\right\}$$

definiramo metriko po predpisu:

$$d_r(\mu,\nu) := \sup\left\{\left|\int f \, d(\mu - \nu)\right| : f \in \mathcal{C}^{(r-1)}(\mathbb{R}), M_r(f) \le 1\right\}$$

kjer je:

$$M_r(f) := \sup_{x \neq y} \frac{|f^{(r-1)}(x) - f^{(r-1)}(y)|}{|x - y|}$$

Dokažite, da ta metrika porodi topologijo, ki je strogo močnejša od tiste, ki jo na prostoru $\mathcal{B}_r(\mathbb{R})$ inducira šibka topologija.

69. ☞ ● Dana naj bo matrika $a(i,j)$, $i \in \mathbb{N}_n$, $j \in \mathbb{N}_m$, $m \ge n$, kjer smo označili $\mathbb{N}_k := \{1, 2, \ldots k\}$. Dana naj bo še slučajna preslikava $\pi\colon \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_m$, ki naj bo enakomerno porazdeljena po množici vseh *injektivnih* preslikav $\mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_m$. Definirajmo:

$$W := \sum_{i=1}^{n} a(i, \pi(i))$$

a. Izračunajte $EW$ in $\mathrm{var}(W)$.

b. Za vsak $i \in \mathbb{N}_n$ konstruirajte slučajno spremenljivko $W_i$, ki naj bo neodvisna od $\pi(i)$ in naj se le malo razlikuje od $W$ (tako da bo prišla prav v naslednji točki). Pri tem lahko privzamete obstoj poljubnih dodatnih slučajnih spremenljivk.

c. Naj bodo $a(i,j)$ same ničle in enice. Za čim manjše konstante $A$, $B$ in $C$ izpeljite oceno:

$$\begin{aligned}\left|Ef(W) - \mathrm{Po}(\lambda)\{f\}\right| &\leq \\ &\leq \|f\|_0 \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}\left(A\sum_{i=1}^n p_i^2 + B\sum_{j=1}^m q_j^2 + C\,\frac{\lambda^2}{m-1}\right)\end{aligned}$$

kjer je:

$$p_i = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^m a(i,j) \qquad \text{in} \qquad q_j = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^n a(i,j)\,,$$

$$\lambda = EW \qquad \mathrm{Po}(\lambda)\{f\} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^\infty \frac{\lambda^k}{k!}\,f(k)$$

in

$$\|f\|_0 = \sup_{k=0,1,2,\ldots} f(k) - \inf_{k=0,1,2,\ldots} f(k)\,.$$

## Markovske verige

70. ◗ Naj bo $(X,P)$ nerazcepna Markovska veriga s povrnljivimi stanji in invariantno mero $\nu$. Označite $w_{ij} = P_i(T_j < T_i^+)$. Dokažite, da je

$$\frac{w_{ij}}{w_{ji}} = \frac{\nu(j)}{\nu(i)}\,.$$

71. ● Naj bo $X$ markovska veriga z invariantno porazdelitvijo $\pi$. Označite

$$A_{k,n} = \{X_m \in B^c \,\text{za}\; k \leq m \leq n\}\,.$$

a. Prepričajte se, da je $P_\pi(A_{k,n})$ odvisna samo od razlike $n-k$.

b. Definirajte $T_B = \inf\{n \geq 1 \colon X_n \in B\}$. Dokažite, da je

$$P_\pi(X_0 \in B, T_B \geq n) = P_\pi(T_B = n)\,.$$

c. Predpostavljajte, da je markovska veriga nerazcepna in označite $m_{ij} = E_i(T_j)$ in $m_{ii} = E_i(T_i^+)$. Uporabite b. za dokaz, da je $m_{ii} = 1/\pi(i)$.

d. Izračunajte $E_\pi(T_B|X_0 \in B)$.

e. Dokažite še, da je $m_{ij} < \infty$ za vsaka $i, j \in S$ in

$$E_i[(T_i^+)^2] = m_{ii}(2\sum_j \frac{m_{ji}}{m_{jj}} - 1)\,.$$

72. ❍ Naj bo $X$ slučajni sprehod na $d$-dimenzionalni hiper-kocki. Množica stanj je torej produkta $\{0,1\}^d$. Na vsakem koraku so možni prehodi v stanja, ki se razlikujejo samo za eno komponento od trenutnega stanja. Prehodne verjetnosti so enake za vse možne prehode. Naj bo $i = (0,0,\ldots,0)$ in $j = (1,0,0,\ldots,0)$. Izračunajte $E_i(T_j)$.

73. ◗ Naj bo $X$ nerazcepna markovska veriga z invariantno porazdelitvijo $\pi$. Definirajte zaporedje $\hat{X}_1, \hat{X}_2, \ldots$, tako da "obrnete" vsak $i$-blok. Če je recimo $i = 1$ in so vrednosti $X_n$ enake

$$1\;2\;3\;4\;2\;1\;3\;3\;4\;1\;1\;1\;5\;1\,,$$

potem so vrednosti $\hat{X}_n$

$$1\;2\;4\;3\;2\;1\;4\;3\;3\;1\;1\;1\;5\;1\,.$$

Dokažite, da je pod $P_i$ zapordje $(\hat{X}_n)$ markovska veriga z verjetnostmi prehoda

$$\hat{p}_{jk} = \frac{\pi_k p_{kj}}{\pi_j}\,.$$

74. ◗ Naj bo $X$ markovska veriga na $\{0,1,2,\ldots\}$ z verjetnostmi prehoda

$$\begin{aligned}
p_{01} &= 1 \\
p_{i,i+1} &= \left(\frac{i+1}{i}\right)^\alpha p_{i,i-1}, \quad p_{i,i+1} + p_{i,i-1} = 1 \;\text{ za } i \geq 1 \\
p_{ij} &= 0, \;|i-j| > 1
\end{aligned}$$

za nek $\alpha > 0$.

a. Izračunajte $P_i(X_n = 0 \text{ za nek } n \geq 0)$ za poljuben $i \geq 0$.

b. So stanja povrnjiva ali minljiva?

c. Izračunajte
$$P(X_n \to \infty, \text{ ko } n \to \infty)\,.$$

75. ◗ Poenostavljen model za telefonsko omrežje je naslednji: predpostavljamo, da imamo neskončno enot, od katerih je v trenutku $n$ zavzetih $k$ enot. V naslednjem trenutku se vsaka zavzeta enota sprosti z verjetnostjo $1-p \in (0,1)$ neodvisno od ostalih enot. Hkrati prispe še neodvisno slučajno število $Y_n$ novih klicev. Če označimo z $X_n$ število zavzetih enot v trenutku $n$, predpostavljamo, da je $X_n$ markovska veriga s prehodnimi verjetnostmi
$$P(X_{n+1} = l | X_n = k) = P(\xi_1 + \cdots + \xi_k + Y_n = l)$$
za $k, l \geq 0$, kjer so $\xi_1, \ldots, \xi_k$ Bernoulli($p$). Predpostavite, da je $0 < E(Y_n) < \infty$ za vse $n$ in je za vsak $n$ spremenljivka $Y_n$ enako porazdeljena in neodvisna od $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$.

a. Izračunajte $E_k(X_n)$ in pokažite, da $\lim_{n\to\infty} E_k(X_n)$ obstaja in je končna. Sklepajte, da je $X_n$ povrnljiva. Za to zadnje lahko uporabite Fatoujevo lemo.

b. Predpostavljajte, da so $Y_n$ Poissonove s parametrom $\lambda$. Pokažite, da je v primeru, ko je $X_n \sim \text{Po}(\mu)$ tudi $X_{n+1} \sim \text{Po}(\nu)$. Poiščite invariantno porazdelitev za verigo $X$ v tem primeru.

76. ◗ Naj bo $S$ končna množica s $\text{card}(S) = n$. Naj bo $f\colon S \to [0,\infty)$ neka dana funkcija na $S$. Definirajte prehodne verjetnosti markovske verige $X$ na $S$ s
$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2(n-1)} \min\{1, \alpha^{f(j)-f(i)}\} & \text{za } i \neq j \\ 1 - \sum_{k\neq i} p_{ik} & \text{za } i = j \end{cases}$$
kjer je $\alpha > 0$.

a. Dokažite, da je veriga nerazcepna in poiščite njeno invariantno porazdelitev.

b. Izračunajte

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n)\,.$$

77. ◗ Naj bo $X$ markovska veriga brez absorbirajočih stanj. Definirajte slučajne spremenljivke $T_0 = 0$ in

$$T_{n+1} = \inf\{k > T_n \colon X_k \neq X_{T_n}\}\,.$$

Naj bo $Y_n = X_{T_n}$ za $n \geq 0$.

a. Pokažite, da je $Y$ markovska veriga in izračunajte njene prehodne verjetnosti $\{q_{ij}\}$.

b. Predpostavite, da ima veriga $X$ invariantno porazdelitev $\pi$. Ali ima tudi veriga $Y$ invariantno mero?

78. ◗ Naj bo $\zeta$ nenegativna celoštevilska slučajna spremenljivka. Markovska veriga $X$ na $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$ naj ima prehodne verjetnosti

$$p_{ij} = P((i + 1 - \zeta)_+ = j)\,,$$

kjer je $x_+ = \max(0, x)$.

a. Predpostavite, da je $P(\zeta = 0) > 0$ in $P(\zeta \leq 1) < 1$. Pokažite, da je $X$ nerazcepna.

b. Predpostavite $E(\zeta) > 1$. Pokažite, da obstaja tak $s \in (0, 1)$, da je $s = G(s)$, kjer je $G$ rodovna funkcija spremenljivke $\zeta$. Pokažite, da je za ta $s$ $\nu_i = s^i$ invariantna mera za verigo $X$. Sklepajte, da so vsa stanja pozitivno povrnljiva.

79. ● Predpostavljajte, da so $\{p_{ij} \colon i, j \in S\}$ prehodne verjetnosti nerazcepne markovske verige $X$. Predpostavljajte, da obstaja enolično določena mera $\nu$ z lastnostmi

$$\nu_i > 0\,, \quad \sum_{i\in S} \nu_i = 1 \qquad \text{in} \qquad \sum_{j\in S} \nu_j p_{ji} = \nu_i \qquad \text{za vse } i, j \in S$$

Definirajte

$$\hat{p}_{ij} = \frac{\nu_j p_{ji}}{\nu_i}\,.$$

a. Pokažite, da so tudi $\{\hat{p}_{ij} \colon i, j \in S\}$ prehodne verjetnosti nerazcepne markovske verige $\hat{X}$.

b. Označite z $P$ verjetnosti, ki se nanašajo na verigo $X$ in s $\hat{P}$ verjetnosti, ki se nanašajo na verigo $\hat{X}$. Naj bo $T_j^+ = \inf\{n > 0 \colon X_n = j\}$ in podobno $\hat{T}_i^+ = \inf\{n > 0 \colon \hat{X}_n = i\}$. Dokažite, da je za $i \neq j$

$$\hat{P}_j(\hat{T}_i^+ = n) = \frac{\nu_i}{\nu_j} P_i(X_n = j, T_i^+ > n)\,.$$

80. ◗ Naj bo $\{X_n\}$ markovska veriga z množico stanj $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$ in verjetnostmi prehoda

$$p_{i,i+1} = a_i \qquad \text{in} \qquad p_{i,0} = 1 - a_i$$

za neke konstante $0 < a_i < 1$, $i \geq 0$. Definirajmo

$$b_0 = 1 \qquad \text{in} \qquad b_i = a_0 a_1 \cdots a_i$$

za $i \geq 1$.

a. Dokažite, da so vsa stanja povrnljiva, če in samo če $b_i \to 0$, ko $i \to \infty$.

b. Dokažite, da so vsa stanja pozitivno povrnljiva, če in samo če je $\sum_i b_i < \infty$.

81. ● ☞ Naj bo $(X, P)$ nerazcepna Markovska veriga s števno neskončno množico stanj $S$. Naj bo $B \subset S$ neskončna podmnožica stanj in definirajte $T_B = \inf\{n \colon X_n \in B\}$ $(\inf\{\emptyset\} = \infty)$.

a. Naj bo $f(i) = P_i(T_B < \infty)$. Pokažite, da je $f(X_n)$ supermartingal.

b. Dokažite, da je ali $f(x) = 1$ za vse $x \in S$ ali $\inf_{i \in S} f(i) = 0$.

c. Dokažite, da je

$$\begin{aligned}
\{X_n \text{ obišče } B \text{ neskončno mnogokrat}\} &= \{f(X_n) \to 1\} \text{ s.g.} \\
\{X_n \text{ obišče } B \text{ končno mnogokrat}\} &= \{f(X_n) \to 0\} \text{ s.g.}
\end{aligned}$$

Navedite primer, ko imata oba zgornja dogodka pozitivno verjetnost.

82. ◗ Naj bo $X$ markovska veriga na množici stanj $S$ s prehodno matriko $\mathbb{P}$. Funkcija $f\colon S \to [0,\infty)$ je ekscesivna, če za vsak $i \in S$ velja

$$f(i) \geq \sum_{j\in S} p_{ij} \cdot f(j)\,.$$

Označite s $Pf$ funkcijo definirano s

$$(Pf)(i) = E_i(f(X_1))\,.$$

a. Dokažite, da je $E_i((Pf)(X_n)) = E_i(f(X_{n+1}))$.

b. Naj bo $f$ ekscesivna funkcija. Pokažite, da je

$$E_i(f(X_n)) \geq E_i(f(X_{n+1})\,.$$

c. Naj bo $f$ ekscesivna in naj bo $\alpha \in (0,1)$. Pokažite, da velja

$$E_i(\sum_{n=0}^{N} \alpha^n (f - \alpha Pf)(X_n)) = f(i) - \alpha^{N+1} E_i(f(X_{N+1}))\,.$$

Sklepajte, da je

$$f(i) = E_i(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n\,(f - \alpha Pf)(X_n)\,)$$

d. Pokažite, da je za vsako ekscesivno funkcijo $f$ in vsak opcijski čas $T$ z $P(T<\infty) = 1$

$$f(i) \geq E_i(f(X_T))\,.$$

83. ● ☞ Naj bodo $w_1, w_2, \ldots$ pozitivna realna števila. Markovska veriga na $\mathbb{Z}_+$ naj ima prehodne verjetnosti

$$p_{i,i+1} = \frac{w_i}{w_{i-1} + w_i} \qquad \text{in} \qquad p_{i,i-1} = 1 - p_{i,i+1}\,,$$

ter $p_{01} = 1$. Pokažite, da velja

$$P_0(\liminf_{n\to\infty} X_n = \infty) = \begin{cases} > 0\,, & \text{če } \sum_i w_i^{-1} < \infty \\ 0\,, & \text{če } \sum_i w_i^{-1} = \infty \end{cases}$$

Namig: Definirajte

$$g(n) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{w_i}$$

za $n \geq 2$, $g(0) = g(1) = 0$ in definirajte

$$T_0 = \inf\{n > 0 \colon X_n = 0\} .$$

Pokažite, da je $g(X_{n \wedge T_0})$ martingal.

## Brownovo gibanje

84. ◗ Naj bo $(B_t \colon t \geq 0)$ standardno Brownovo gibanje in $T$ opcijski čas glede na filtracijo, ki jo generira Brownovo gibanje. Prepostavite, da je $P(T < \infty) = 1$. Naj bodo $f_1, f_2, \ldots, f_m$ omejene nenegativne zvezne funkcije in $0 < t_1 < t_2 \cdots < t_m$.

   a. Predpostavite, da ima $T$ vrednosti v množici $\{k/n \colon k \geq 0\}$. Pokažite, da za $G \in \mathcal{F}_T$ velja

   $$E\left(\left(\prod_{i=1}^{m} f_i\left(B_{T+t_i} - B_T\right)\right) \cdot 1_G\right) = E\left(\prod_{i=1}^{m} f_i(B_{t_i})\right) P(G) .$$

   b. Pokažite, da za vsak opcijski čas s $P(T < \infty) = 1$ obstaja zaporedje opcijskih časov $T_n \downarrow T$, ko $n \to \infty$, pri čemer ima $T_n$ vrednosti v množici $\{k/n \colon k \geq 0\}$.

   c. Pokažite, da za vsak opcijski čas s $P(T < \infty) = 1$ in $G \in \mathcal{F}_T$ velja

   $$E\left(\left(\prod_{i=1}^{m} f_i\left(B_{T+t_i} - B_T\right)\right) \cdot 1_G\right) = E\left(\prod_{i=1}^{m} f_i(B_{t_i})\right) P(G) .$$

   d. Utemeljite, da je enakost v c. dovolj za dokaz krepke markovske lastnosti za Brownovo gibanje.

   e. Ali trditev v c. še drži, če je $G \in \cap_{\epsilon > 0} \mathcal{F}_{T+\epsilon}$?

85. ● Z $(B_t)_{t\geq 0}$ označimo enorazsežno Brownovo gibanje z $B_0 = 0$. Izberimo poljuben $T > 0$ in naj bo $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\tau_n = \{0 = t_0^n < \cdots < t_{k(n)}^n = T\}$ zaporedje delitev intervala $[0, T]$. Privzemimo, da je zaporedje $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ naraščajoče, to je $\tau_n \subset \tau_{n+1}$ za vse $n \in \mathbb{N}$, in da norma $\tau_n$ konvergira proti 0, to je

$$|\tau_n| := \sup_{i=1,\ldots,k(n)} |t_i^n - t_{i-1}^n| \to 0 \quad \text{ko gre } n \to \infty.$$

a. Pokažite naslednje konvergence

$$\sum_{i=1}^{k(n)} (B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n})^2 \xrightarrow{L^2} T, n \to \infty,$$
$$\sum_{i=1}^{k(n)} B_{t_{i-1}^n}(B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n}) \xrightarrow{L^2} \frac{1}{2}B_T^2 - \frac{1}{2}T, n \to \infty,$$
$$\sum_{i=1}^{k(n)} \frac{1}{2}(B_{t_i^n} + B_{t_{i-1}^n})(B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n}) \xrightarrow{L^2} \frac{1}{2}B_T^2, n \to \infty,$$

b. Dokažite, da je

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k(n)} |B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n}| = \infty, \quad \mathbb{P} - \text{skoraj gotovo.}$$

86. ● Naj bo $(B_t)_{t\geq 0}$ enorazsežno Brownovo gibanje.

a. Definirajmo množico

$$N := \bigcup_{M=1}^{\infty} \bigcup_{c=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \bigcup_{i=0}^{n-3} \bigcap_{k=i+1}^{i+3} \left\{ |B_{M\frac{k}{n}} - B_{M\frac{k-1}{n}} \leq \frac{c}{n} \right\}$$

Dokažite, da je $N$ merljiva množica z $\mathbb{P}(N) = 0$.

b. Z uporabo prejšnje točke sklepajte, da poti $(B_t)_{t\geq 0}$ skoraj gotovo niso nikjer odvedljive.