3. Martingali

3.1. Definicije in osnovne lastnosti

Motivacija: Pojem martingala se je razvil iz iger na srečo. „Poštena" igra bi bila taka, da je „pričakovanje" igralca na naslednjem koraku tako, da v povprečju ne bo na slabšem ali na boljšem. Če označimo z $X_0, X_1, \ldots X_n$ premoženja igralca pred $(n+1)$- igro, mora veljati

$$E(X_{n+1} \mid X_0, \ldots, X_n) = X_n .$$

Martingali so postali osrednji pojem verjetnosti in vrednotenja izvedenih vrednostnih papirjev. Glede na to, da imamo abstraktne verzije pogojnih pričakovanih vrednosti lahko označimo

$\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ in zapišemo

$$E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = X_n$$

Ko n narašča je $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \ldots$.

<u>Definicija</u>: Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ verjetnostni prostor. Naraščajočemu zaporedju σ-algeber $\{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 0}$ rečemo filtracija.

Abstraktne definicije z filtracijami so matematično boljše, če ne zaradi drugega, zaradi bolj pripravnih oznak.

<u>Definicija</u>: Naj bo $\{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 0}$ filtracija na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Zaporedje slučajnih spremenljivk $X_0, X_1, \ldots$ je martingal glede na filtracijo $\{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 0}$, če:

(i) X_n je $\mathcal{F}_n$-merljiva.

(ii) $E|X_n| < \infty$ za $n = 0, 1, \ldots$

(iii) $E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = X_n$ za $n = 0, 1, \ldots$

Opombe:

(i) Prvi dve zahtevi sta bolj tehnične narave. V resnici (i) sledi iz (ii) in (iii).

(ii) Zaporedje je martingal glede na konkretno filtracijo. Po stolpični lastnosti je še vedno martingal glede na $\tilde{\mathcal{F}}_n = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)$.

(iii) V definiciji lahko enakost v (iii) zamenjamo z neenakostjo. Za $E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \geq X_n$ dobimo definicijo submartingala, za $E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \leq X_n$ pa supermartingala.

(iv) Če je φ konveksna funkcija in je $E|\varphi(X_n)| < \infty$, je po Jensenu, je za martingal $\{X_n\}_{n\geq 0}$

$$E(\varphi(X_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n)$$

$$\geq \varphi(E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n))$$

$$= \varphi(X_n).$$

To pomeni, da je $\varphi(X_n)$ sub-martingal.

Če predpostavljamo še, da je φ naraščajoča funkcija in je $\{X_n\}_{n\geq 0}$ submartingal enako zaporedje neenakosti dá, da je $\{\varphi(X_n)\}$ submartingal.

<u>Definicija</u>: Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ verjetnostni prostor in $\mathcal{F}_0 \supseteq \mathcal{F}_{-1} \supseteq \mathcal{F}_{-2} \ldots$ padajoče zaporedje σ-algeber. Zaporedje slučajnih spremenljivk $X_0, X_{-1}, \ldots$ je <u>obratni</u> martingal, če velja

(i) $E|X_n| < \infty$ za $n = 0, -1, -2, \ldots$

(ii) $E(X_n \mid \mathcal{F}_{n+1}) = X_{n+1}$

<u>Primeri</u>:

(i) Naj bo $Z_0, Z_1, \ldots$ proces razvejanja in G njegova rodovna funkcija. Naj bo $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_0, Z_1, \ldots, Z_n)$. Predpostavke so v tem primeru bile

$$E(s^{Z_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n) = G(s)^{Z_n}.$$

Naj bo η fiksna točka rodovne funkcije G na $[0,1]$. Definiramo

$$X_n = \eta^{Z_n}.$$

Velja

$$E(X_{n+1} \mid F_n) =$$
$$= E(\eta^{Z_{n+1}} \mid F_n)$$
$$= G(\eta)^{Z_n}$$
$$= \eta^{Z_n}$$
$$= X_n.$$

Torej je X_n martingal.

(ii) Naj bo $X_1, X_2, \dots$ zaporedje neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk. Naj bo

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

Za glavne izreke pri martingalih potrebujemo koncept časa ustavljanja. Ideja je spet iz iger na srečo. Iz poštene igre lahko „izstopimo" v nekem slučajnem času T. Če izključimo jasnovidnost, bi ta čas moral biti odvisen samo od informacije do časa n. Torej dogodka $\{T \leq n\}$ in $\{T > n\}$ bi morala biti odvisna od $X_0, X_1, \ldots, X_n$. Bolj abstraktno zahtevamo, da je $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.

<u>Definicija</u>: Slučajna spremenljivka $T : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to \{0, 1, \ldots ; \infty\}$ je čas ustavljanja, če velja:

(i) $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ za vse n.

(ii) $\{T = \infty\} \in \sigma\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n\right) = \mathcal{F}_\infty$.

Opomba: Zahteva (i) je enakovredna zahtevi $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$.

Primer: Naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ neodvisne in definiramo

$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ za $n \geq 1$ in

$S_0 = 0$. Naj bo $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ in

$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Slučajna spremenljivka

$$T_a = \inf\{n \geq 0 : S_n = a\}$$

za nek cel a je čas ustavljanja. Če so $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ enako porazdeljene z $P(X_1 = 1) = P(X_1 = -1) = 1/2$ govorimo o slučajnih sprehodih.

Lema 3.1: Če sta T in S časa ustavljanja glede na filtracijo $\{F_n\}_{n \geq 0}$, je čas ustavljanja tudi

$$T \wedge S = \min(S, T)$$

Dokaz:

$$\{T \wedge S \leq n\} = \{T \leq n\} \cup \{S \leq n\} \in F_n.$$

Konkretno je za konstanto N, ki je čas ustavljanja $T \wedge N$ čas ustavljanja.

Izrek 3.2 (izrek o opcijskem ustavljanju). Naj bo $\{X_n\}_{n \geq 0}$ martingal glede na $\{F_n\}_{n \geq 0}$ in naj bo T omejen čas ustavljanja.

Potem je

$$E(X_T) = E(X_0)$$

<u>Opomba</u>: Tu je

$$X_T(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega).$$

<u>Dokaz</u>: Naj bo $P(T \leq N) = 1$. Velja

$$E(X_T) = E\left(X_T \cdot \sum_{k=0}^{N} 1(T=k)\right)$$

$$= E\left(\sum_{k=0}^{N} X_k \cdot 1(T=k)\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{N} E(X_k \cdot 1(T=k))$$

$$\overset{(MG)}{=} \sum_{k=0}^{N} E(X_N \cdot 1(T=k))$$

$$= E(X_N)$$

$$= E(X_0).$$

Dokaz je preprost. Kaj pa, če T ni omejen? Če je $P(T<\infty)=1$, je X_T še vedno dobro definirana slučajna spremenljivka. V tem primeru je

$$E(X_{T\wedge N}) = E(X_0)$$

za vse $N \geq 1$. Ko $N \to \infty$, desna stran s.g. konvergira proti X_T, vendar moramo utemeljiti zamenjavo E in limite.

Zapišimo dokaz izreka 3.2a še nekoliko drugače. Zapišemo lahko

$$X_T = \sum_{k=1}^{N} (X_k - X_{k-1}) \cdot 1(T > k-1) + X_0$$

Po definiciji je

$$E[(X_k - X_{k-1})\underbrace{\mathbb{1}(T > k-1)}_{\in \mathcal{F}_{k-1}}]$$

$$= E[(E(X_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) - X_{k-1})\,\mathbb{1}(T \geq k-1)]$$

Za submartingal je razlika ≥ 0,
za supermartingal pa ≤ 0.

Za omejen T je za submartingal

$$E(X_T) \geq E(X_0),$$

za supermartingal pa

$$E(X_T) \leq E(X_0).$$

Potrebujemo še pojem "informacije" ob času ustavljanja T.

<u>Definicija</u>: Naj bo T čas ustavljanja glede na $\{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 0}$.

σ-algebra $\mathcal{F}_T$ vse tiste dogodke A, za katere je $A \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ za vse $n = 0, 1, \ldots$.

Če je $T \leq S$ in sta T, S časa ustavljanja, je očitno $\mathcal{F}_T \subseteq \mathcal{F}_S$ in $T \in \mathcal{F}_T$.

Izrek 3.3: Naj bo $X_0, X_1, \ldots$ martingal glede na $\{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 0}$ in naj bosta $T \leq S$ omejena časa ustavljanja. Velja

$$E(X_S \mid \mathcal{F}_T) = X_T.$$

Dokaz: Naj bo $A \in \mathcal{F}_T$ in preverimo. Zapišemo

$$X_S - X_T = \sum_{k=1}^{N} (X_k - X_{k-1}) \cdot 1(S > k-1 \geq T)$$

Če je $A \in \mathcal{F}_T$, je

$$\{T \leq k-1\} \cap A \in \mathcal{F}_{k-1}$$

$$\{S > k-1\} \in \mathcal{F}_{k-1}$$

Računamo

$$E[(X_S - X_T) \cdot 1_A]$$

$$= \sum_{k=1}^{N} E[(X_k - X_{k-1}) \cdot 1_A \cdot 1(S > k-1) \cdot 1(T \leq k-1)]$$

$$= 0.$$

<u>Opomba</u>: Za sub- oziroma supermartingale veljajo ustrezne neenačbe.

Oglejmo si še nekaj izrekov, ki zagotavljajo, da lahko zamenjamo E in limite

<u>Izrek 3.4</u>: Naj bo $X_0, X_1, \ldots$ martingal glede na $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ in naj bo T čas ustavljanja + $P(T < \infty) = 1$. Naj velja

(i) $E|X_T| < \infty$.

(ii) $E|X_n| \cdot 1(T > n) \to 0$, ko $n \to \infty$.

Potem je $E(X_T) = E(X_0)$.

<u>Dokaz</u>: Ocenimo

$$E|X_{T \wedge n} - X_T|$$

$$\leq E\big[|X_T| \cdot 1(T > n)\big]$$

$$+ E\big[|X_n| \cdot 1(T > n)\big]$$

oba člena → 0 po predpostavki in izreku o dominirani konvergenci.

<u>Opomba</u>: Za sub otvirama super-martingale veljajo ustrezne neenačbe.

<u>Izrek 3.5</u>: Naj bo $\{X_n\}_{n\geq 0}$ (sub)-martingal glede na $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$. Naj bo T čas ustavljanja z $ET<\infty$. Če velja

$$E[\,|X_k - X_{k-1}|\mid \mathcal{F}_{k-1}]\cdot 1(T\geq k-1)\leq K$$

za konstanto $K>0$, potem je

$$E(X_T)\underset{(\geq)}{=}E(X_0)$$

<u>Dokaz</u>: Naj bo

$$Y = |X_0| + \sum_{k=1}^{\infty}|X_k - X_{k-1}|\cdot 1(T>k-1)$$

Ocenimo

$$E(Y) = E|X_0| + \sum_{k=1}^{\infty} E\Big[E\,[\,|X_k - X_{k-1}| \mid \mathcal{F}_k] \times 1\,(T > k-1)\Big]$$

$$\leq E|X_0| + \sum_{k=1}^{\infty} K \cdot P\,(T > k-1)$$

$$\leq E|X_0| + K\,(1 + E(T)) < \infty .$$

Kev je $|X_T| \leq Y$, je $E|X_T| < \infty$.

Ocenimo

$$E\Big[|X_k| \cdot 1\,(T > k-1)\Big] \leq E\,[\,|X_T| \cdot 1\,(T > k-1)\Big]$$

$$\to 0, \text{ ko } k \to \infty$$

po izreku o dominirani konvergenci.

Izpolnjena sta pogoja izreka 3.4.

3.3. Izreki o konvergenci

Martingali oziroma submartingali so analogije konstantnih oziroma naraščajočih zaporedij. Pričakujemo zato, da bodo konvergirali pod milimi pogoji. Prvi korak je

<u>Izrek 3.6</u>: Naj bo $\{X_n\}_{n\geq 0}$ submartingal. Naj bosta $a < b$ dana in definiramo

$$S_1 = \inf\{n : X_n \leq a\}$$

$$T_1 = \inf\{n > S_1 : X_n \geq b\}$$

in rekurzivno

$$S_n = \inf\{n \geq T_{n-1} : X_n \leq a\}$$

$$T_n = \inf\{n \geq S_n : X_n \geq b\}.$$

Definiramo

$$U = U(a,b,N) = \max(n : T_n \leq N)$$

Velja

$$E[U(a,b,N)] \leq \frac{E(X_N-a)_+}{b-a} \leq \frac{E|X_N| + |a|}{b-a}$$

Opombi:

(i) po konvenciji naj bo $\inf\{\emptyset\} = \infty$.

(ii) U je število prečkanj intervala $[a,b]$ do N.

Dokaz: Lahko privzamemo $X_k \geq a$, sicer gledamo submartingal $(X_n-a)_+$, ki ima enako število prečkanj $[0,b-a]$. Definirajmo

$$T_k^* = T_k \wedge N$$

in

$$S_k^* = S_k \wedge N.$$

Definiramo

$$Z = \sum_{k=1}^{N} (X_{T_k^*} - X_{S_k^*})$$

Po definicijah je

$$U(a,b,N) \le \frac{Z}{b-a}$$

in posledično

$$E[U(a,b,N)] \le \frac{E(Z)}{b-a}$$

Vendar je

$$X_N = (X_{T_N^*} - X_{S_N^*}) + (X_{S_N^*} - X_{T_{N-1}^*}) + \dots + (X_{T_1^*} - X_{S_1^*}) + X_{S_1^*}.$$

Vsi časi so opcijski in omejeni, zato po izreku 3.2. velja

$EX_N \ge E(Z) +$ členi s pozitivno pričakovano vrednostjo

Izrek 3.7: Naj bo $\{X_n\}_{n\geq 0}$ submartingal z $\sup_{n\geq 0} E|X_n| < \infty$.
Z verjetnostjo 1 obstaja limita $X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n$. Limita je skoraj gotovo končna.

Dokaz:

Ideja: Če limita ne obstaja, mora $\{X_n\}_{n\geq 0}$ prečkati nek interval neskončnokrat, kar se ne more zgoditi. Označimo

$$\Lambda = \{\omega : \liminf_{n\to\infty} X_n < \limsup_{n\to\infty} X_n\}.$$

Pri tem za $\omega \in \Lambda$ tudi ne more veljati $\lim_{n\to\infty} X_n = \mp\infty$.

Velja

$$\Lambda = \bigcup_{\substack{p,q\in\mathbb{Q}\\ p<q}} \{\liminf_{n\to\infty} X_n < p < q < \limsup_{n\to\infty} X_n\}$$

Po izreku o monotoni konvergenci je

$$E[u(p, q, \infty)] \leq \frac{E|X_N|}{q-p} < \infty,$$

zato imajo vsi dogodki v števni uniji verjetnost 0. Sledi $P(\Lambda) = 0$. Izključiti moramo še $\mp\infty$ kot možno limito.

Po Fatouju je

$$E(\liminf_{n\to\infty} |X_n|)$$

$$\leq \liminf_{n\to\infty} E|X_n| < \infty.$$

Trditev izreka sledi.

Definicija: Družina slučajnih spremenljivk $\{X_i\}_{i \in I}$ je enakomerno integrabilna, če velja, da za vsak $\varepsilon > 0$ lahko najdemo K_ε, da bo

$$E[|X_i| \cdot 1(|X_i| \geq K_\varepsilon)] < \varepsilon$$

za vse $i \in I$.

Primera:

(i) Naj bo $E|X_i|^p \leq M$ za $p > 1$. Če je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, Hölderjeva neenačba da

$$E[|X_i| \cdot 1(|X_i| \geq K)]$$

$$\leq (E|X_i|^p)^{1/p} \cdot P(|X_i| \geq K)^{1/q}$$

Vendar je

$$P(|X_i| \geq K) \leq \frac{E|X_i|^p}{K^p} \leq \frac{M}{K^p}$$

Družina $\{X_i\}_{i \in I}$ je enakomerno integrabilna.

(ii) Naj bo $E|X| < \infty$. Družina $\{ E(X \mid \mathcal{G}) : \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F} \}$ je enakomerno integrabilna. Ocenimo

$$E\left[|E(X \mid \mathcal{G})| \cdot 1(|E(X \mid \mathcal{G})| \geq k) \right]$$

$$\overset{\text{(Jensen)}}{\leq} E\left[E(|X| \mid \mathcal{G}) \cdot 1(|E(X \mid \mathcal{G})| \geq k) \right]$$

$$= E\left[|X| \cdot 1(|E(X \mid \mathcal{G})| \geq k) \right]$$

Ker je $E|X| < \infty$, lahko za vsak $\varepsilon > 0$ najdemo $\delta > 0$, da iz $P(A) < \delta$ sledi $E[|X| \cdot 1_A] < \varepsilon$.

Izrek o dominirani konvergenci za dan $\varepsilon > 0$ zagotavlja tak N, da bo

$$E[|X| \cdot 1(|X| \geq N)] < \varepsilon/2.$$

Naj bo $\delta > 0$ tak, da bo $N \cdot \delta < \varepsilon/2$.

Za A z $P(A) < \delta$ velja

$$E[|X| \cdot 1_A] \leq N \cdot P(A) + E[|X| \cdot 1(|X| \geq N)]$$

$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2$$

Po neenačbi Markova je

$$P(|E(X|\mathcal{G})| \geq k)$$

$$\leq \frac{E|X|}{k}.$$

Za dovolj velik k je desna stran poljubno majhna. Trditev sledi.

Izrek 3.8: Naj bo družina $\{X_n\}_{n\geq 0}$ enakomerno integrabilna z $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{s.g} X$. Naj bo $X \in \mathcal{L}^1$. Potem $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}^1} X$.

Dokaz: Seminarska naloga.

Posledica: Če je $\{X\}_{n\geq 0}$ enakomerno integrabilen submartingal velja $E|X_n| \leq C < \infty$ in zato X_n konvergira s.g. in v $\mathcal{L}^1$.

Opomba: Za obratni martingal velja vse zgornje, torej obratni martingal konvergira s.g in v $\mathcal{L}^1$.

Bolj rafiniran je naslednji izrek.

Izrek 3.9 (P. Lévy) Naj bo $\xi \in \mathcal{L}^1$ na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ in naj bo $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$ filtracija. Definiramo $X_n = E(\xi \mid \mathcal{F}_n)$.

Potem

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{s.g} E(X \mid \mathcal{F}_\infty) \text{ in v } \mathcal{L}^1.$$

Dokaz: Zaporedje $\{X_n\}_{n\geq 0}$ je enakomerno integrabilen martingal, zato konvergira proti X_∞ s.g. in v L^1, kar pomeni $X_\infty \in L^1$.

Označimo $\eta = E(\xi \mid F_\infty)$. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je $\xi \geq 0$, zato tudi $\eta \geq 0$ s.g.

Definirajmo meri

$$Q_1(A) = E(\eta \cdot 1_A)$$

$$Q_2(A) = E(X_\infty \cdot 1_A)$$

Za $A \in F_n$ je

$$
\begin{aligned}
Q_1(A) &= E(\eta \cdot 1_A) \\
&= E(\xi \cdot 1_A) && \text{(stolpična lastnost)} \\
&= E(X_n \cdot 1_A) && \text{(def.)} \\
&= E(X_\infty \cdot 1_A) && (L^1 \text{ konvergenca}) \\
&= Q_2(A).
\end{aligned}
$$

Meri Q_1 in Q_2 se ujemata na π-sistemu $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n$, ki generira $\mathcal{F}_\infty$. To pomeni, da se Q_1 in Q_2 ujemata na $\mathcal{F}_\infty$. To pomeni

$$E[(\eta - X_\infty) \cdot \underbrace{1(\eta > M_\infty)}_{\in \mathcal{F}_\infty}] = 0 .$$

Neenakost lahko tudi obrnemo in sledi $\eta = X_\infty$ s.g.

Posledice:

(i) Naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ neodvisne slučajne spremenljivke. Definirajmo $\mathcal{T}_n = \sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots)$ in $\mathcal{T} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{T}_n$.

Opomba: σ-algebri $\mathcal{T}$ rečemo repna σ-algebra.

Definirajmo $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Naj bo $F \in \mathcal{T}$. Izrek 3.9. pravi, da

$$E[1_F \mid \mathcal{F}_n] \xrightarrow{s.g.} E(1_F \mid \mathcal{F}_\infty) = 1_F.$$

Po drugi strani je F neodvisen od $\mathcal{F}_n$, zato je $E(1_F \mid \mathcal{F}_n) = P(F)$. To pomeni $P(F) = 1_F$ s.g. Posledično je $P(F) \in \{0,1\}$.

Rezultatu rečemo 0-1 zakon Kolmogorova.

Opomba: ker so obratni martingali enakomerno integrabilni po definiciji. Imata izreka 3.8 in 3.9. smorj identični verziji za obratne martingale.

(ii) Neenačba za prečkanja velja v enaki obliki za obratne martingale. Ker je

$$X_n = E(X_1 \mid \mathcal{F}_{-n}) \,, \text{ je}$$

$$E|X_n| = E\left[\left| E(X_1 \mid \mathcal{F}_{-n}) \right| \right]$$

$$\leq E|X_1| < \infty .$$

To pomeni, da obratni martingal konvergira s.g. proti končni limiti. Naš primer obratnega martingala je $\frac{S_n}{n}$, kjer je

$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ za neodvisne, enako porazdeljene sl. spr. z $E|X_1| < \infty$.

Torej bo $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{s.g.} X_\infty$ s.g. inuk!

Slučajna spremenljivka X_∞ je merljiva glede na $\sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots)$ za vse n, zato je $X_\infty \in \mathcal{T}$.

Ampak to pomeni, da je X_∞ lahko kvečjemu konstanta po 0-1 zakonu Kolmogorova. Zaradi L^1 konvergence je konstanta lahko kvečjemu $E(X_1)$. Sklep je krepki zakon velikih števil.

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\substack{s.g.\\ L^1}} E(X_1).$$

(iii) Naj bo $Z_0, Z_1, \ldots$ proces razvejanja in η fiksna točka rodovne funkcije G na $[0,1]$. Predpostavimo $\eta \in (0,1)$. Ker je η^{Z_n} omejen martingal, sledi

$$\eta^{Z_n} \to X_\infty \quad \text{s.g.}$$

Ampak Z_n so celoštevilske, zato limita obstaja le, če je ali $Z_n \to 0$, ali $Z_n \to \infty$ ali so Z_n konstantne od nekod naprej.

Označimo

$$A_{n,N,k} = \{Z_n = Z_{n+1} = \quad = Z_N = k\}.$$

Iz predpostavk sledi, da je

$$P(A_{n,N,k})$$

$$= P(Z_n = k)\,P(Z_{n+1} = k \mid Z_n = k)$$

$$\dots P(Z_N = k \mid Z_{N-1} = k)$$

$$\le P(Z_{n+1} = k \mid Z_n = k)^{N-n}.$$

Vendar je $P(Z_{n+1} = k \mid Z_n = k) < 1$, razen če je $G(s) = s$ kar smo izključili. Posledično je za $k \geq 1$ $P(A_{n,\infty,k}) = 0$. Po pomoči $Z_n \to 0$ ali $Z_n \to \infty$ s.g.

(iv) Naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ neodvisne z $E(X_k) = 0$ in $\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{var}(X_k) < \infty$. Potem vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} X_k$ konvergira skoraj gotovo.

Definiramo $M_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Za povedje M_n je martingal. Poleg tega je

$$
\begin{aligned}
E(M_n^2) &= \mathrm{var}(M_n) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{var}(X_k) \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{var}(X_k) < \infty .
\end{aligned}
$$

$\{M_n\}_{n\geq 1}$ je L^2 omejen, zato enakomerno integrabilen. To pomeni, da $M_n \to M_\infty$ s.g. in v L^1.

To je izrek o konvergenci vrst Kolmogorova.

(v) Kako bi definirali, da sta slučajni spremenljivki pogojno neodvisni glede na σ-algebro $\mathcal{G}$? Če sta X in Y neodvisni, velja za omejeni Borelovi funkciji f, g

$$E[f(X)\cdot g(Y)] = E[f(X)]\cdot E[g(Y)].$$

Velja tudi obrat. Za pogojno neodvisnost vzamemo:

<u>Definicija</u>: Slučajni spremenljivki X in Y sta pogojno neodvisni glede na σ-algebro $\mathcal{G}$, če

za poljubni omejeni Borelovi funkciji velja

$$E[f(X)\cdot g(Y) \mid \mathcal{G}]$$

$$= E[f(X) \mid \mathcal{G}] \cdot E[g(Y) \mid \mathcal{G}].$$

Podobno lahko pogojno neodvisnost definiramo za vektorje ali za več slučajnih spremenljivk.

<u>Definicija</u>: Slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots$ so izmenljive (angl. exchangeable), če za vsak n in vsako permutacijo $\sigma \in S_n$ velja, da sta zaporedji

$$(X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots) \text{ in}$$

$$(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)}, X_{n+1}, \ldots)$$

enako porazdeljeni.

Naj bo $\mathcal{T} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots)$ repna σ-algebra. Dokažite. Želimo dokazati de Finettijev izrek, ki pravi, da so $X_1, X_2, \ldots$ glede na $\mathcal{T}$ pogojno neodvisne in enako porazdeljene. Potrebujemo nekaj sestavin:

a.) če je $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ in je Y omejena slučajna spremenljivka, ter je $E(Y|\mathcal{H})$ enako porazdeljena kot $E(Y|\mathcal{G})$, je $E(Y|\mathcal{H}) = E(Y|\mathcal{G})$ s.g. (bralec).

b. Naj bo f omejena Borelova funkcija. Slučajni spremenljivki

$E[f(X_1) | X_2, \ldots]$ in

$E[f(X_1) | X_k, X_{k+1}, \ldots]$ sta

enako porazdeljeni za vse $k \geq 1$.

Za vsak končen n sta naměč

$E[f(X_1) \mid X_2, \dots, X_{n+1}]$ in

$E[f(X_1) \mid X_k, X_{k+1}, \dots, X_{k+n}]$

enako porazdeljeni slučajni spremenljivki. Ko $n \to \infty$ vsaka izmed konvergirata s.g., prva proti $E[f(X_1) \mid X_2, \dots]$, druga pa proti $E[f(X_1) \mid X_k, X_{k+1}, \dots]$. Limiti morata biti enako porazdeljeni. Drugo zaporedje pa je celo obratni martingal in konvergira s.g. proti

$E[f(X_1) \mid T]$. Po točki a. sklepamo, ker je $E[f(X_1) \mid T]$ enako porazdeljena kot

$E[f(X_1) \mid X_2, \dots]$, da je

$$E[f(X_1) \mid X_2, X_3, \dots] \overset{s.g}{=} E[f(X_1) \mid \mathcal{T}].$$

Zdaj lahko dokažemo De Finettijev izrek.

$$E\Big[\prod_{k=1}^{n} f_k(X_k) \mid \mathcal{T}\Big]$$

$$= E\Big[E\Big[\prod_{k=1}^{n} f_k(X_k) \mid X_2, X_3 \dots\Big] \Big| \mathcal{T}\Big]$$

$$= E\Big[E[f_1(X_1) \mid X_2, \dots] \prod_{k=2}^{n} f_k(X_k) \Big| \mathcal{T}\Big]$$

$$= E\Big[E[f_1(X_1) \mid \mathcal{T}] \prod_{k=2}^{n} f_k(X_k) \mid \mathcal{T}\Big]$$

$$= E[f_1(X_1) \mid \mathcal{T}]\, E\Big[\prod_{k=2}^{n} f_k(X_k) \mid \mathcal{T}\Big]$$

Dokaz lahko končamo z indukcijo.

3.5 Maksimalne neenakosti

neenakosti:

Izrek 3.10:
Če je $(X_n, \mathcal{F}_n)$ martingal, velja za $x>0$

$$P\left(\max_{0\le k\le N} |X_n| \ge x\right) \le \frac{E\left(|X_N| \mathbb{1}\left(\max_{0\le k\le N} X_n \ge x\right)\right)}{x}$$

Dokaz: Naj bo $T = \inf\{n : |X_n| \ge x\}$.
Označimo $A = \{\max_{0\le k\le N} |X_n| \ge x\}$.

$$\begin{aligned}
P(A) &= E\left[\sum_{k=0}^{N} 1_A \cdot 1(T=k)\right] \\
&\le E\left[\sum_{k=0}^{N} 1_A \cdot 1(T=k) \cdot \frac{|X_k|}{x}\right] \\
&= \frac{1}{x} E\left[\sum_{k=0}^{N} 1_A 1(T=k)|X_k|\right] \\
&= \frac{1}{x} E\left[\sum_{k=0}^{N} \underbrace{1_A \cdot 1(T=k)}_{\in \mathcal{F}_k} |X_k|\right] \\
&\le \frac{1}{x} E\left[\sum_{k=0}^{N} 1_A \cdot 1(T=k)|X_N|\right] \\
&\le \frac{1}{x} E\left[1_A \cdot |X_N|\right].
\end{aligned}$$

Doobova neenakost sledi.

Izrek 3.10:

Če sta X in Y nenegativni sl. spr.

za kateri velja

$$c\, P(X \geq c) \leq E(Y \cdot 1(X \geq c)), \quad c \geq 0$$

velja

$$\sqrt{E(X^2)} \leq 2\sqrt{E(Y^2)}.$$

Dokaz:

Računamo

$$\int_{[0,\infty)} 2c\, P(X \geq c)\, dc \leq \int_{[0,\infty)} 2\, E(Y\, 1(X \geq c))\, dc$$

$$=$$

$$\int_{[0,\infty)} 2c \cdot dc \int_{[c,\infty)} \mu_X(du)$$

$$=$$

$$\int_{[0,\infty)} \mu_X(du) \cdot \int_{[0,u]} 2c\, dc$$

$$=$$

$$\int_{[0,\infty)} u^2\, \mu_X(du)$$

$$=$$

$$E(X^2)$$

Računamo

$$\int_{[0,\infty)} E[Y \cdot 1(X \geq c)]\, dc$$

$$= E\Big[Y \cdot \int_{[0,\infty)} 1(X \geq c)\, dc\Big] \quad (\text{Fubini})$$

$$= E(Y \cdot X)$$

$$\leq \sqrt{E(X^2)\, E(Y^2)}$$

Sledi

$$E(X^2) \leq 2\sqrt{E(X^2) \cdot E(Y^2)}$$

ali

$$E(X^2) \leq 4\, E(Y^2)$$

Izrek 3.11: (Doobova neenakost) Naj bo $(X_n, \mathcal{F}_n)_{1 \le n \le N}$ nenegativen submartingal z $E(X_n^2) < \infty$ za vse $n \le N$. Naj bo $X = \max_{1 \le n \le N} X_n$. Velja

$$E(X^2) \le 4\, E(X_N^2)$$

Dokaz: Iz izreka 3.10. sledi, da je

$$x\, P(X \ge x) \le E(X_N \cdot 1(X \ge x)),$$

kar pomeni po izreku 3.10., da je

$$E(X^2) \le 4\, E(X_N^2)$$

Komentar: Če je $(X_n, \mathcal{F}_n)_{1 \le n \le N}$ martingal, je $(|X_n|, \mathcal{F}_n)_{1 \le n \le N}$ nenegativen submartingal in velja neenakost z absolutnimi vrednostmi.