Izbrana poglavja iz finančne matematike

2. seminarska naloga

Navodila

Naloge so sestavni del predmeta IPFM. Vedno se lahko obrnete ali na profesorja ali na asistenta. Eno od nalog lahko izpustite. Po težavnosti so naloge razdeljene na več kategorij. Legenda je naslednja:

❍ Lažja naloga, dopolnjuje snov.

◗ Zmerno težka naloga, za katero je potreben razmislek.

● Težka naloga, za katero je potrebno precej dela in morda tudi brskanje po knjigah.

Izjava: Potrjujem, da so rešitve moje delo.

Ime: ____________________ Podpis: ____________.

1. ◗ Naj bo $(B_t\colon t \geq 0)$ Brownovo gibanje z $B_0 = 0$. Označite

$$S_t = \max_{0 \leq s \leq t} B_s\,.$$

   a. S pomočjo principa zrcaljenja izračunajte gostoto para (B_t, S_t).

   b. Brownowo gibanje s trendom je definiramo kot $B_t^{(\mu)} = B_t + \mu t$ za $t \geq 0$. Pokažite, da za $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < T$ velja

$$P(B_{t_1}^{(\mu)} \in A_1, \ldots, B_{t_n}^{(\mu)} \in A_n) = \\ = E\left(1\left(B_{t_1} \in A_1, \ldots, B_{t_n} \in A_n\right) e^{\mu B_T}\right) e^{-\mu^2 T/2}\,.$$

   c. Sklepajte, da je za $x > 0$

$$P(\max_{0 \leq s \leq T} B_s^{(\mu)} \geq x) = E\left(1\left(\max_{0 \leq s \leq T} B_s \geq x\right) e^{\mu B_T}\right) e^{-\mu^2 T/2}\,.$$

   d. Izračunajte $P(\max_{0 \leq s \leq T} B_s^{(\mu)} \geq x)$ eksplicitno.

2. ◗ Naj bo $E\left(\int_0^T H_s^2 ds\right) < \infty$ za vse $T > 0$. Naj bo

$$M_t = \int_0^t H_s dB_s\,.$$

   a. Pokažite, da za omejene elementarne integrande oblike

$$H_s = \sum_{j=0}^{\infty} e_j \chi_{[t_j, t_{j+1})}(s)$$

   z $e_j \in \mathcal{F}_{t_j}$ in $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots$ velja

$$\langle M \rangle_t = \int_0^t H_s^2 ds\,.$$

   b. Pokažite, da velja

$$\langle M \rangle_t = \int_0^t H_s^2 ds\,.$$

   v splošnem.

3. ● Naj bo $X_t = \int_0^t H_s dB_s$, kjer predpostavljamo, da je $\int_0^T H_s^2 ds < \infty$ z verjetnostjo 1.

   a. Pokažite, da je za vsak λ

   $$L_t = \exp\left(-\lambda \int_0^t H_s dB_s - \frac{\lambda^2}{2}\int_0^t H_s^2 ds\right)$$

   lokalni martingal.

   b. Kot znano privzmite Burkholder-Davis-Gundyjevo neenačbo: če je $L_t = \int_0^t H_s dB_s$, za vsak $p > 0$ in za neki od H_s neodvisni konstanti c_p in C_p velja

   $$c_p E\left[\langle L\rangle_\infty^{p/2}\right] \leq E\left[(\sup_{t\geq 0} L_t)^p\right] \leq C_p E\left[\langle L\rangle_\infty)^{p/2}\right] .$$

   Pokažite, da je v primeru, ko velja

   $$E\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^\infty H_s^2 ds\right)\right] < \infty$$

   L martingal.

   Komentar: Trditev je znana kot kriterij Novikova.

4. ◗ S pomočjo Itôve formule pokažite, da so vsi naslednji procesi martingali.

   (i) $X_t = e^{t/2}\cos(B_t)$.

   (ii) $X_t = (B_t + t)\exp(-B_t - t/2)$.

   (iii) $X_t = e^{-t/2}\left((B_t^2 + (t-1)t)\cosh(B_t) - 2B_t t\sinh(B_t)\right)$.

5. ● Definirajte polinome

   $$H_n(x,t) = \frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\exp\left(\lambda x - \frac{\lambda^2}{2}t\right)\Big|_{\lambda=0} .$$

   a. Pokažite, da velja

   $$\frac{\partial}{\partial x}H_n(x,t) = nH_{n-1}(x,t)$$

za $n = 1, 2, \ldots$ in

$$\frac{\partial}{\partial t} H_n(x,t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} H_n(x,t) = 0\,.$$

za $n = 0, 1, \ldots$.

b. Pokažite, da je za vsak $n = 0, 1, 2, \ldots$ proces

$$X_t^{(n)} = H_n(B_t, t)$$

martingal.

c. Izračunajte

$$\langle X^{(n)} \rangle_t \qquad \text{in} \qquad \langle X^{(n)}, X^{(m)} \rangle_t\,.$$

6. ● Ornstein-Uhlenbeckov proces $(X_t \colon t \geq 0)$ zadošča enačbi

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma dB_t\,,$$

kjer je $(B_t \colon t \geq 0)$ Brownovo gibanje.

a. Poiščite rešitev enačbe.

Namig: Pomnožite obe strani enačbe z $e^{-\mu t}$*, izračunajte* $d(e^{-\mu t} X_t)$ *in primerjajte.*

b. Izračunajte $E(X_t)$ in $\mathrm{var}(X_t)$.

7. ● Proces $(X_t \colon t \geq 0)$ naj zadošča enačbi $dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_s)dB_s$, kjer sta μ in σ Lipshitzevo zvezni funkciji. Naj bo $u(x,t)$ dvakrat zvezno odvedljiva funkcija. Pokažite, da je proces

$$M_t = u(X_t, t) - \int_0^t \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) (X_s, t) ds$$

lokalni martingal.

8. ◗ V Cox-Ross-Rubinsteinovem modelu predpostavljamo, da je S_{t+1} ali $S_t \cdot u$ alu $S_t \cdot d$ za $-1 < d < 0 < u$. Predpostavite konstatno obrestno mero $r > 0$.

a. Ugotovite, kakšne so omejitve na parametre u, d in r, da model ne bo dopuščal arbitraže.

b. Naj bo P_t cena evropske prodajne opcije z izvršilno ceno k in C_t cena evropske nakupne opcije z izvršilno ceno k. Obe opciji gledamo za obdobje $t = 0, 1, 2, \ldots, T$. Pokažite, da velja

$$C_t - P_t = S_t - k(1+r)^{-(T-t)} .$$

c. Zapišite eksplicitno formulo za $P_t = P_t(S_t)$.

9. ● Privzemite klasični Black-Scholesov model, v katerem delnica in obveznica zadoščata enačbam $S_0^0 = 1$, $S_0 = 1$ in

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t \, dt + \sigma S_t \, dB_t \\ dS_t^0 &= r S_t^0 \, dt \end{aligned}$$

Naj bo opcija vsota evropske nakupne in evropske prodajne opcije z isto izvršilno ceno k. V matematičnem zapisu je to

$$V_T = (S_T - k)_+ + (k - S_k)_+ = |S_T - k| .$$

a. Izpeljite formulo za V_T.

b. Izračunajte eksplicitno varovalni portfelj (H_t^0, H_t).

10. ● Privzemite klasični Black-Scholesov model, v katerem delnica in obveznica zadoščata enačbam $S_0 = 1$ in

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t \, dt + \sigma S_t \, dB_t \\ dS_t^0 &= r S_t^0 \, dt \end{aligned}$$

Opcija *Vse ali nič* vam v času T plača 1 denarno enoto, če delnica kadarkoli na časovnem intervalu $[0, T]$ preseže vrednost $K > 1$, sicer pa nič. Torej je pogojna terjatev

$$V_T = 1 \left(\max_{t \in [0,T]} S_t \geq K \right) .$$

Določite ceno takšne opcije in poiščite varovalni portfelj.

Namig: Problem se prevede na računanje s časom, ko Brownovo gibanje zadene določeno premico. V primeru, ko S_t doseže vrednost K pred časom t, je cena opcije v tistem trenutku enaka $e^{-r(T-t)}$.