Izbrana poglavja iz finančne matematike

1. seminarska naloga

Navodila

Naloge so sestavni del predmeta IPFM. Vedno se lahko obrnete ali na profesorja ali na asistenta. Od nalog 9. ali 10. si lahko izberete eno. Po težavnosti so naloge razdeljene na več kategorij. Legenda je naslednja:

❍ Lažja naloga, dopolnjuje snov.

◗ Zmerno težka naloga, za katero je potreben razmislek.

● Težka naloga, za katero je potrebno precej dela in morda tudi brskanje po knjigah.

Oddan prvi del nalog je pogoj za pisni izpit

Izjava: Potrjujem, da so rešitve moje delo.

Ime: ____________________ Podpis: ____________.

1. ☞ ● Naj bodo $X_1, X_2, \ldots, X_n$ neodvisne, enako porazdeljene strogo pozitivne slučajne spremenljivke. Predpostavite $n \geq 3$. Naj bo J celoštevilska slučajna spremenljivka z vrednostmi v $\{1, 2, \ldots, n\}$, za katero velja
$$P(J = j | X_1, X_2, \ldots, X_n) = \frac{X_j}{S_n}\,,$$
kjer je $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
Definirajte vektor $X^* = (X_1^*, \ldots, X_{n-1}^*)$ s predpisom
$$X_i^* = \begin{cases} X_i, & \text{če } i < J \\ X_{i+1}, & \text{če } i \geq J\,. \end{cases}$$
   a. Pokažite, da za poljubno omejeno Borelovo funkcijo $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ velja
$$E[f(X_J, X_1^*, \ldots, X_{n-1}^*)] = nE[\frac{X_1}{S_n} f(X_1, X_2, \ldots, X_n)]\,.$$
   b. Naj bo $S_{n-1}^* = X_1^* + \cdots + X_{n-1}^*$. Pokažite, da za poljubne omejene Borelove funkcije $f, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $g\colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ velja
$$E\left[f(X_J) g(X^*) h(S_{n-1}^*)\right] = nE\left[\frac{X_1}{S_n} f(X_1) g(\mathbf{X}_{n-1}) h(S_{n-1})\right]\,,$$
kjer je $\mathbf{X}_{n-1} = (X_2, \ldots, X_n)$ in $S_{n-1} = X_2 + \cdots + X_n$.
   c. Dokažite
$$E\left[g(X^*) | X_J, S_{n-1}^*\right] = E\left[g(X^*) | S_{n-1}^*\right]\,.$$
   d. Sklepajte, da je
$$E\left[f(X_J) g(X^*) | S_{n-1}^*\right] = E\left[f(X_J) | S_{n-1}^*\right] E\left[g(X^*) | S_{n-1}^*\right]\,.$$

2. ☞ ● Naj bo X slučajna spremenljivka na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ in naj bo $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$.

   a. Predpostavite $E(X^2) < \infty$ in $E(X|\mathcal{G}) \stackrel{d}{=} X$. Pokažite, da je $E(X|\mathcal{G}) = X$ s.g.

b. Predpostavite, da je $E|X| < \infty$ in $E(X|\mathcal{G}) \stackrel{d}{=} X$. Pokažite, da je tudi v tem primeru $E(X|\mathcal{G}) = X$ s.g.

3. ❍ Naj bodo $X_1, X_2, \ldots, X_n$ neodvisne enako porazdeljene slučajne spremenljivke z $X_1 > 0$, $EX_1 = \mu$ in $E(X_1^q) < \infty$ za $1 < q \leq 2$. Dokažite

$$(EX_1)^q \leq E(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j)^q \leq E\left[X_1\left(\frac{X_1 + (n-1)\mu}{n}\right)^{q-1}\right].$$

Namig: Pogojni Jensen.

4. ● Naj bo $(X_n, \mathcal{F}_n)$ martingal. Spodnje trditve ali dokažite, ali ovrzite s protiprimerom.

a. Če X_n konvergira s.g. proti neki slučajni spremenljivki X, je $\sup_n E(X_n^+) < \infty$.

b. Če je $X_0 = 1$ in je $(|X_n|, \mathcal{F}_n)$ martingal, je $X_n \geq 0$ s.g. za vsak $n \geq 0$.

c. Naj bo a_n zaporedje realnih števil. Obstaja martingal X, da je

$$P(X_n = a_n \text{ za } n \geq N(\omega)) = 1\,,$$

pri čemer je N s.g. končna slučajna spremenljivka.

d. Če je

$$P(X_n < 0 \text{ neskončno mnogokrat}) = 0\,,$$

potem X_n s.g. konvergira proti končni limiti.

5. ☞ ◗ Naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ neodvisne in enako porazdeljene. Naj bo $S_n = X_1 + X_2 + \cdots X_n$. Predpostavite, da za $t \in \mathbb{R}$ velja $\phi(t) = \log(M_{X_1}(t)) < \infty$.

a. Prepričajte se, da je $M_n = \exp(tS_n - n\phi(t))$ martingal.

b. Če je $t \geq 0$ in $\phi(t) \geq 0$, je za vsak opcijski čas

$$P(S_T \geq x, T \leq n) \leq e^{-tx+\phi(t)n}\,.$$

Dokažite.

c. Predpostavite, da so X_k porazdeljene standardno normalno. Naj bo $x_n = \alpha f(\alpha^{n-1})$ za $\alpha > 1$, kjer je

$$f(\alpha) = (2\alpha \log\log\alpha)^{1/2}\,.$$

Dokažite, da je

$$P(\sup_{k\le\alpha^n} S_k \ge x_n) \le ((n-1)\log\alpha)^{-\alpha}\ .$$

d. Dokažite, da je

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{S_k}{\sqrt{2k\log\log k}} \le 1 \qquad \text{s.g.}\,.$$

6. ● Naj bodo $S_1, S_2, \ldots, S_n$ delne vsote zaporedja neodvisnih slučajnih spremenljivk z matematičnim upanjem 0. Dokažite naslednje trditve:

   a. $E(S_1^+) \le E(S_2^+) \le \cdots \le E(S_n^+)$.
   b. $P(S_j \ge -2E(S_n^+)) \ge 1/2$ za vse $1 \le j \le n$.
   c. Za poljuben $a \ge 0$ je

$$P(\max_{1\le j\le n} S_j \ge a + 2E(S_n^+)) \le 2P(S_n \ge a)\,.$$

7. ◗ (Časovno nehomogeni procesi razvejanja) Kot pri časovno homogenem procesu razvejanja začnemo z enim posameznikom, torej $X_0 = 1$. Na koraku $n-1$ posameznik *umre* z verjetnostjo $1 - p_n$ ali *se razdeli* v dva posameznika z verjetnostjo p_n. Z X_n označimo število pozameznikov v n-ti generaciji.

   Bolj formalno predpostavljamo, da imamo družino $(Y_{nk}\colon n \ge 1, k \ge 1)$ neodvisnih slučajnih spremenljivk, takih da je $P(Y_{nk} = 2) = p_n$ in $P(Y_{nk} = 0) = 1 - p_n$ za $k \ge 1$ in $n \ge 1$. Slučajne spremenljivke X_n definiramo rekurzivno z

$$\begin{aligned} X_0 &= 1 \\ X_n &= \sum_{k=1}^{X_{n-1}} Y_{n,k} \qquad \text{za } n \ge 1\,. \end{aligned}$$

   Če je $X_{n-1} = 0$ je seveda $X_n = 0$.

   Predpostavljajte $p_n \downarrow 1/2$.

a. Dokažite, da je
$$E(X_n) = \prod_{k=1}^{n}(2p_k)$$
in
$$E(X_n^2) = E(X_n)^2\left[1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{2}{E(X_k)}(1-p_k)\right]$$
za $n = 1, 2, \ldots$.

b. Prepričajte se, da je $M_n = X_n/E(X_n)$ MG glede na filtracijo $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$. Pokažite, da je ta martingal omejen v L^2, če in samo če je
$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{E(X_k)} < \infty\,.$$

c. Dokažite, da proces izumre z verjetnostjo 1, če je
$$\sum_{k=1}^{\infty}(2p_k - 1) < \infty$$
in preživi s pozitivno verjetnostjo, v če je
$$\sum_{k=1}^{\infty}\exp(\,-\alpha\sum_{i=1}^{k}(2p_i-1)) < \infty$$
za nek $\alpha < 1$.

d. Naj bo $p_n = (1/2+n^{-\gamma})\wedge 1$. Za katere γ proces preživi s pozitivno verjetnostjo?

8. ◗ Naj bo $(B_t\colon t \geq 0)$ standardno Brownovo gibanje in T opcijski čas glede na filtracijo, ki jo generira Brownovo gibanje. Prepostavite, da je $P(T < \infty) = 1$. Naj bodo $f_1, f_2, \ldots, f_m$ omejene nenegativne zvezne funkcije in $0 < t_1 < t_2 \cdots < t_m$.

a. Predpostavite, da ima T vrednosti v množici $\{k/n\colon k \geq 0\}$. Pokažite, da za $G \in \mathcal{F}_T$ velja
$$E\left(\left(\prod_{i=1}^{m} f_i\left(B_{T+t_i} - B_T\right)\right)\cdot 1_G\right) = E\left(\prod_{i=1}^{m} f_i(B_{t_i})\right)P(G)\,.$$

b. Pokažite, da za vsak opcijski čas s $P(T < \infty) = 1$ obstaja zaporedje opcijskih časov $T_n \downarrow T$, ko $n \to \infty$, pri čemer ima T_n vrednosti v množici $\{k/n\colon k \geq 0\}$.

c. Pokažite, da za vsak opcijski čas s $P(T < \infty) = 1$ in $G \in \mathcal{F}_T$ velja

$$E\left(\left(\prod_{i=1}^{m} f_i\left(B_{T+t_i} - B_T\right)\right) \cdot 1_G\right) = E\left(\prod_{i=1}^{m} f_i(B_{t_i})\right) P(G)\,.$$

d. Utemeljite, da je enakost v c. dovolj za dokaz krepke markovske lastnosti za Brownovo gibanje.

e. Ali trditev v c. še drži, če je $G \in \cap_{\epsilon>0}\mathcal{F}_{T+\epsilon}$?

9. ● Z $(B_t)_{t\geq 0}$ označimo enorazsežno Brownovo gibanje z $B_0 = 0$. Izberimo poljuben $T > 0$ in naj bo $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\tau_n = \{0 = t_0^n < \cdots < t_{k(n)}^n = T\}$ zaporedje delitev intervala $[0, T]$. Privzemimo, da je zaporedje $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ naraščajoče, to je $\tau_n \subset \tau_{n+1}$ za vse $n \in \mathbb{N}$, in da norma τ_n konvergira proti 0, to je

$$|\tau_n| := \sup_{i=1,\ldots,k(n)} |t_i^n - t_{i-1}^n| \to 0 \quad \text{ko gre } n \to \infty.$$

a. Pokažite naslednje konvergence

$$\sum_{i=1}^{k(n)} (B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n})^2 \xrightarrow{L^2} T, n \to \infty,$$
$$\sum_{i=1}^{k(n)} B_{t_{i-1}^n}(B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n}) \xrightarrow{L^2} \frac{1}{2}B_T^2 - \frac{1}{2}T, n \to \infty,$$
$$\sum_{i=1}^{k(n)} \frac{1}{2}(B_{t_i^n} + B_{t_{i-1}^n})(B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n}) \xrightarrow{L^2} \frac{1}{2}B_T^2, n \to \infty,$$

b. Dokažite, da je

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k(n)} |B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n}| = \infty, \quad \mathbb{P} - \text{skoraj gotovo.}$$

10. ● Naj bo $(B_t)_{t\geq 0}$ enorazsežno Brownovo gibanje.

   a. Definirajmo množico

$$N := \bigcup_{M=1}^{\infty}\bigcup_{c=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\bigcup_{i=0}^{n-3}\bigcap_{k=i+1}^{i+3}\left\{|B_{M\frac{k}{n}} - B_{M\frac{k-1}{n}} \leq \frac{c}{n}\right\}$$

   Dokažite, da je N merljiva množica z $\mathbb{P}(N) = 0$.

   b. Z uporabo prejšnje točke sklepajte, da poti $(B_t)_{t\geq 0}$ skoraj gotovo niso nikjer odvedljive.