FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Izbrana poglavja iz finančne matematike

Pisni izpit

2. julij 2014

Ime in priimek: ______________________ Vpisna št.: ☐☐☐☐☐☐☐☐

REŠITVE

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, 5 rešenih nalog pa je že 100%. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	a.	b.	c.	d.	
1.			•	•	
2.				•	
3.			•	•	
4.				•	
5.			•	•	
6.				•	
Total					

1. (20) Naj bo Y slučajna spremenljivka in $Z_1, Z_2, \ldots$ neodvisne enako porazdeljene slučajne spremenljivke neodvisne od Y. Privzemite, da je $E(Y) = 0$, $E(Y^2) = \sigma^2$ in $E(Z_k) = 0$ ter $E(Z_k^2) = 1$. Definirajte $X_1, \ldots, X_n$ z

$$X_k = Y + Z_k \,.$$

Označite $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Privzemite, da je za neka a in b

$$E(Y|X_1, X_2, \ldots, X_n) = a + bS_n \,.$$

a. (10) Pokažite, da je

$$E\left(a + bS_n\right) = a = E(Y)$$

in

$$E\left(\left(a + bS_n\right) X_1\right) = bE(X_1^2 + X_1X_2 + \cdots + X_1X_n) = E(YX_1) \,.$$

Sklepajte, da je

$$E(Y|X_1, X_2, \ldots, X_n) = \frac{\sigma^2 S_n}{n\sigma^2 + 1} \,.$$

Namig: Pokažite $E(X_1^2) = \sigma^2 + 1$ *in* $E(X_1X_l) = \sigma^2$ *za* $l > 1$.

Rešitev: Velja

$$E(E(Y|X_1, X_2, \ldots, X_n)) = E(a + bS_n) = E(Y)$$

Ker je $E(Y) = 0$ *in* $E(S_n) = 0$, *sledi* $a = 0$. *Nadaljujemo*

$$\begin{aligned} E((a + bS_n)X_1) &= bE(S_nX_1) \\ &= bE((X_1 + X_2 + \ldots + X_n)X_1) \\ &= bE(X_1^2 + X_1X_2 + \ldots + X_1X_n) \,. \end{aligned}$$

Drugo enakost dobimo iz

$$\begin{aligned} E((a + bS_n)X_1) &= E(E((a + bS_n)X_1|X_1, \ldots, X_n)) \\ &= E(X_1E(a + bS_n|X_1, \ldots, X_n)) \\ &= E(X_1E(E(Y|X_1, \ldots, X_n)|X_1, \ldots, X_n)) \\ &= E(X_1E(Y|X_1, \ldots, X_n)) \\ &= E(E(YX_1|X_1, \ldots, X_n)) \\ &= E(YX_1) \,. \end{aligned}$$

Tretja enakost sledi iz

$$\begin{aligned} E(YX_1) &= E(Y(Y + Z_1)) \\ &= E(Y^2) + E(YZ_1) \\ &= E(Y^2) + E(Y)E(Z_1) \\ &= \sigma^2 \,. \end{aligned}$$

Enakost $E(YZ_1) = E(Y)E(Z_1)$ velja zaradi neodvisnosti. Ker je

$$E(X_1^2) = E((Y+Z_1)^2) = E(Y^2) + 2E(Y)E(Z_1) + E(Z_1)^2 = \sigma^2 + 1$$

in

$$\begin{aligned} E(X_1X_l) &= E((Y+Z_1)(Y+Z_l)) \\ &= E(Y^2) + E(YZ_l) + E(YZ_1) + E(Z_1Z_l) \\ &= E(Y^2) + E(Y)E(Z_l) + E(Y)E(Z_1) + E(Z_1)E(Z_l) \\ &= \sigma^2 . \end{aligned}$$

sledi, da je

$$\begin{aligned} bE(X_1^2 + X_1X_2 + \ldots + X_1X_n) &= b((E(X_1^2) + E(X_1X_2) + \ldots + E(X_1X_n)) \\ &= b(\sigma^2 + 1 + \sigma^2 + \ldots + \sigma^2) \\ &= b(n\sigma^2 + 1) . \end{aligned}$$

Izenačimo

$$\sigma^2 = b(n\sigma^2 + 1) .$$

in dobimo

$$b = \frac{\sigma^2}{n\sigma^2 + 1} .$$

Od tod sledi

$$E(Y|X_1, X_2, \ldots, X_n) = \frac{\sigma^2 S_n}{n\sigma^2 + 1} .$$

b. (10) Pokažite

$$E\left[(Y - E(Y|X_1, X_2, \ldots, X_n))^2\right] = \sigma^2 - b^2 E(S_n^2) .$$

Rešitev:

$$\begin{aligned} &E\left[(Y - E(Y|X_1, X_2, \ldots, X_n))^2\right] = \\ &= E\left[Y^2 - 2YE(Y|X_1, \ldots, X_n) + E(Y|X_1, \ldots, X_n)^2\right] \\ &= E(Y^2) - 2E\left[YE(Y|X_1, \ldots, X_n)\right] + E\left[E(Y|X_1, \ldots, X_n)^2\right] \\ &= E(Y^2) - 2E(E\left[YE(Y|X_1, \ldots, X_n)\right]|X_1, \ldots, X_n) + E\left[E(Y|X_1, \ldots, X_n)^2\right] \\ &= E(Y^2) - 2E\left[E(Y|X_1, \ldots, X_n)^2\right] + E\left[E(Y|X_1, \ldots, X_n)^2\right] \\ &= E(Y^2) - E\left[E(Y|X_1, \ldots, X_n)^2\right] \\ &= \sigma^2 - E\left[(bS_n)^2\right] \\ &= \sigma^2 - b^2 E(S_n^2) . \end{aligned}$$

2. (20) Za zaporedje slučajnih spremenljivk $X_0, X_1, \ldots$ z vrednostmi na intervalu $[0,1]$ naj velja

$$P\left(X_{n+1} = \frac{X_n}{2} | X_0, \ldots, X_n\right) = 1 - X_n \quad \text{in} \quad P\left(X_{n+1} = \frac{1+X_n}{2} | X_0, \ldots, X_n\right) = X_n\,.$$

a. (5) Pokažite, da je zaporedje $X_0, X_1, \ldots$ martingal glede na samo sebe.

Rešitev:

$$\begin{aligned} E(X_{n+1}|X_0,\ldots,X_n) &= \tfrac{X_n}{2}\cdot(1-X_n) + \tfrac{1+X_n}{2}\cdot X_n \\ &= \tfrac{1}{2}X_n(1-X_n+1+X_n) = X_n \end{aligned}$$

b. (5) Pokažite, da velja

$$E\left((X_{n+1}-X_n)^2\right) = \frac{1}{4}\,E\left(X_n(1-X_n)\right)\,.$$

Rešitev:

$$\begin{aligned} &E((X_{n+1}-X_n)^2) = \\ &\quad = \; E(E((X_{n+1}-X_n)^2|X_0,\ldots,X_n)) \\ &\quad = \; E\left(\left(\frac{X_n}{2}-X_n\right)^2\cdot(1-X_n) + \left(\frac{1+X_n}{2}-X_n\right)^2\cdot X_n\right) \\ &\quad = \; E\left(\frac{X_n^2}{4}\cdot(1-X_n) + \frac{(1-X_n)^2}{4}\cdot X_n\right) \\ &\quad = \; E\left(\frac{1}{4}X_n(1-X_n)\left(X_n+1-X_n\right)\right) \\ &\quad = \; \frac{1}{4}E(X_n(1-X_n)) \end{aligned}$$

c. (10) Utemeljite, da zaporedje $X_0, X_1, \ldots$ konvergira proti slučajni spremenljivki Z z verjetnostjo 1. Utemeljite, da je $E\left(Z(1-Z)\right) = 0$ in sklepajte, kakšna je porazdelitev Z.

Namig: Zaporedje $(X_{n+1}-X_n)^2$ konvergira proti 0 in je omejeno. Kot znano privzemite, da vsak nenegativen martingal konvergira skoraj gotovo.

Rešitev: Zaporedje $X_0, X_1, \ldots$ je omejeno, saj so vrednosti na intervalu $[0,1]$. Po izreku omejen martingal konvergira proti neki slučajni spremenljivki z verjetnostjo 1.

Namig nam pove, da zaporedje $(X_{n+1}-X_n)^2$ konvergira proti 0 in je omejeno. Po točki b. lahko torej sklepamo, da tudi zaporedje $X_n(1-X_n)$ konvergira proti 0 in je omejeno. Torej po izreku o dominirani konvergenci velja

$$E\left(Z(1-Z)\right) = 0.$$

Ker je slučajna spremenljivka Z *nenegativna, bo ta enakost veljala, če* $Z = 0$ *ali pa* $Z = 1$. *Po izreku o dominirani konvergenci je*

$$E(Z) = E(X_0)\,,$$

zato je $P(Z = 1) = E(X_0)$.

3. (20) Naj bo $(B_t\colon t \geq 0)$ standardno Brownovo gibanje in $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ njegova filtracija. Označite za $t \geq 0$

$$S_t = \max_{0\leq s\leq t} B_s\,.$$

a. (10) Naj bo $0 < t < T$ in $a > 0$. Izračunajte

$$P(S_T \geq a|\mathcal{F}_t)\,.$$

Rešitev: Če je $S_t \geq a$, je pogojna verjetnost enaka 1. Če je $S_t < a$, pa bo pogojna verjetnost odvisna samo od B_t. Po definiciji je $(B_{t+s} - B_t\colon s \geq 0)$ Brownovo gibanje neodvisno od $\mathcal{F}_t$. Pogojna verjetnost bo enaka verjetnosti, da to Brownovo gibanje na intervalu $[0, T-t]$ preseže vrednost $a - B_t$. Za to verjetnost pa vemo, da je enaka

$$2\left(1 - \Phi\left(\frac{a - B_t}{\sqrt{T-t}}\right)\right)\,,$$

kjer je Φ porazdelitvena funkcija standardne normalne porazdelitve. V bolj matematičnem zapisu je

$$P(S_T \geq a|\mathcal{F}_t) = 1(S_t \geq a) + 1(S_t < a)\cdot\left(1 - \Phi\left(\frac{a - B_t}{\sqrt{T-t}}\right)\right)\,.$$

b. (10) Izračunajte za $0 < t < T$

$$P(S_T > S_t|\mathcal{F}_t)\,.$$

Rešitev: Z uporabo markovske lastnosti računamo

$$\begin{aligned} P(S_T > S_t|\mathcal{F}_t) &= P(S_T > S_t|S_t, B_t) \\ &= F(B_t, S_t)\,, \end{aligned}$$

kjer je

$$F(x, y) = P(S_{T-t} > y - x)\,.$$

Sledi

$$P(S_t > S_T|\mathcal{F}_t) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{S_t - B_t}{\sqrt{T-t}}\right)\right)\,.$$

4. (20) Naj bo $(X_t \colon t \geq 0)$ definiran z

$$X_t = t^2 B_t - 2\int_0^t sB_s ds\,,$$

kjer je $(B_t \colon t \geq 0)$ standardno Brownovo gibanje.

a. (5) Izračunajte dX_t.

Rešitev: Računamo po Itôvi formuli.

$$dX_t = 2tB_t dt + t^2 dB_t - 2tB_t = t^2 dB_t\,.$$

b. (10) Kakšna je porazdelitev X_t?

Rešitev: Iz prvega dela naloge sledi, da je

$$X_t = \int_0^t s^2 dB_s\,.$$

Ker je X_t linearen funkcional poti Brownovega gibanja, bo porazdelitev normalna, Itôva izometrija pa nam da

$$E(X_t^2) = \int_0^t s^4 ds = \frac{t^5}{5}\,.$$

Sledi $X_t \sim N(0, t^5/5)$.

c. (5) Utemeljite, da je X_t martingal glede na Brownovo filtracijo.

Rešitev: Iz teorije sledi, da je X_t lokalni martingal. Poleg tega je X_t normalno porazdeljena slučajna spremenljivka, ki ima vse momente. To je dovolj, da je X_t martingal.

5. (20) Naj bo $(B_t\colon t \geq 0)$ Brownovo gibanje in naj bo

$$M_t = B_t^4 - 6B_t^2 t + 3t^2 \,.$$

a. (10) Pokažite, da je $(M_t\colon t \geq 0)$ Brownov martingal.

Rešitev: Po Itôvi formuli je

$$\begin{aligned} M_t &= 4\int_0^t B_s^3 dB_s + 6\int_0^t B_s^2 ds - \\ &\quad -12\int_0^t sB_s dB_s - 6\int_0^t B_s^2 ds - 6\int_0^t s ds + 3t^2 \\ &= 4\int_0^t B_s^3 dB_s - 12\int_0^t sB_s dB_s \,, \end{aligned}$$

torej je M_t lokalen martingal. Ker je $E(M_t^2) < \infty$, je tudi martingal.

b. (10) Naj bo $T = \inf\{t \geq 0\colon B_t \in \{-a, a\}\}$ za $a > 0$. Izračunajte $\mathrm{var}(T)$.

Namig: Tudi $B_t^2 - t$ je martingal.

Rešitev: T je opcijski čas, saj je prvi vstop v množico. Izrek o opcijskem ustavljanju lahko uporabimo, saj sta $|M_T|$ in $|M_t| \cdot 1(t < T)$ omejena. Velja

$$E(M_T) = E(M_0) = 0.$$

$$\begin{aligned} E(M_T) &= E(B_T^4 - 6B_T^2 T + 3T^2) \\ &= E(a^4) - 6E(a^2 T) + 3E(T^2) \\ &= a^4 - 6a^2 E(T) + 3E(T^2) = 0 \end{aligned}$$

Upoštevamo namig in na $B_t^2 - t$ uporabimo izrek o opcijskem ustavljanju (predpostavke so izpolnjene).

$$E(B_T^2 - T) = a^2 - E(T) = E(0) = 0.$$

Sledi

$$E(T) = a^2.$$

Vstavimo v zgornje in dobimo

$$a^4 - 6a^4 + 3E(T^2) = 0.$$

Sledi

$$E(T^2) = \frac{5}{3}a^4.$$

In

$$\mathrm{var}(T) = E(T^2) - E(T)^2 = \frac{2}{3}a^4.$$

6. (20) Naj bo $X_t = B_t + \int_0^t H_s ds$. Definirajte

$$M_t = \exp\left(-\int_0^t H_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t H_s^2 ds\right) .$$

Pri tem predpostavljamo, da je $P(\int_0^t H_s^2 ds < \infty) = 1$ za vse $t > 0$.

a. (10) Pokažite, da je M_t lokalen martingal.

Rešitev: Računamo po Itôvi formuli,

$$\begin{aligned} M_t &= M_0 - \int_0^t M_s H_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t M_s H_s^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^t M_s H_s^2 ds \\ &= M_0 - \int_0^t M_s H_s dB_s \\ &= 1 - \int_0^t M_s H_s dB_s \,. \end{aligned}$$

b. (5) Izrazite $Y_t = X_t M_t$ s stohastičnim integralom.

Rešitev: Računamo po Itôvi formuli.

$$\begin{aligned} Y_t &= Y_0 + \int_0^t M_s dX_s + \int_0^t X_s dM_s + \langle X, M\rangle_t \\ &= \int_0^t M_s(dB_s + H_s ds) - \int_0^t X_s M_s H_s dB_s + \langle X, M\rangle_t \\ &= \int_0^t M_s dB_s - \int_0^t X_s M_s H_s dB_s + \int_0^t M_s H_s ds - \int_0^t M_s H_s ds \\ &= \int_0^t M_s dB_s - \int_0^t X_s M_s H_s dB_s \,. \end{aligned}$$

c. (5) Predpostavite, da je $E(X_t^2 M_t^2) < \infty$ za vse $t > 0$ in je M_t martingal. Za $0 < t < T$ izračunajte

$$E\left(X_T M_T | \mathcal{F}_t\right) .$$

Rešitev: Po drugem delu naloge je Y_t lokalen martingal. Iz predpostavki je tudi martingal, zato je pogojna pričakovana vrednost $X_t M_t$.