FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Finančna matematika 2

Seminarske naloge

Akademsko leto 2023/2024

Navodila

Naloge so del vaših obveznosti pri Finančni matematiki 2. Roka za oddajo ni, oceno pa boste dobili, ko boste oddali rešitve nalog. Rešitve napišite na roko. Za namige se lahko vedno obrnete na predavatelja ali asistenta.

Izjava: Potrjujem, da so rešitve moje delo.

Ime: ______________________ Podpis: ______________________.

1. Naj bo $\alpha\colon [0,t] \to \mathbb{R}$ desno zvezna funkcija z končno totalno variacijo. Naj bo $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zvezno odvedljiva. Označite
$$\Delta\alpha(s) = \alpha(s) - \alpha(s-)\,,$$
kjer je $\alpha(s-)$ leva limita v s in $\alpha(0-) = \alpha(0)$. Pokažite, da je
$$F(\alpha(x)) = F(\alpha(0)) + \int_0^t F'(\alpha(s-))d\alpha(s) + \sum_{s\le t}\big[F(\alpha(s)) - F(\alpha(s-)) - F'(\alpha(s-))\Delta\alpha(s)\big]\,.$$
Opomba: vsota v zadnjem členu je vedno števna, ker ima α nezveznosti kvečjemu v števno mnogo točkah.

2. Naj bo funkcija f zvezno odvedljiva na $[a,b]$, funkcija α pa zvezna s končno totalno variacijo. Dokažite, da velja
$$\int_a^b f'(\alpha(x))d\alpha(x) = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a))\,.$$

3. Naj bo $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ nepadajoča in naj velja, da sta funkciji $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezni. Na čim bolj elementaren način pokažite, da je
$$\left(\int_a^b f(x)g(x)d\alpha(x)\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2(x)d\alpha(x)\right)\left(\int_a^b g^2(x)d\alpha(x)\right)\,.$$

4. Označite z $V_f(a,b)$ totalno variacijo funkcije f na intervalu $[a,b]$. Privzemite $V_f(a,b) < \infty$.
   a. Skrbno utemeljite, da za $a < c < b$ velja, da je $V_f(a,c) < \infty$ in $V_f(c,b) < \infty$ in je
   $$V_f(a,b) = V_f(a,c) + V_f(c,b)\,.$$
   b. Definirajte $F(a) = 0$ in $F(x) = V_f(a,x)$. Pokažite, da je c z $a < c \le b$, točka zveznosti funkcije f, če in samo če je točka zveznosti funkcije F.

5. Za funkcijo $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ označite z $V_F(a,b)$ njeno totalno variacijo.
   a. Naj bo $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija in definirajte
   $$F(x) = \int_a^x f(u)du$$
   za $x \in [a,b]$. Pokažite, da ima F na $[a,b]$ omejeno totalno variacijo in velja
   $$V_F(a,b) = \int_a^b |f(u)|du\,.$$
   b. Naj bo $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funkcija v $L^1(a,b)$ in definirajte
   $$F(x) = \int_a^x f(u)du$$
   za $x \in [a,b]$. Pokažite, da ima F na $[a,b]$ omejeno totalno variacijo in velja
   $$V_F(a,b) = \int_a^b |f(u)|du\,.$$
   Namig: če je $f \in L^1(a,b)$ in je $\epsilon > 0$, lahko najdemo tako zvezno funkcijo $g \in L^1(a,b)$, da je
   $$\int_a^b |f(u) - g(u)|du < \epsilon\,.$$

6. Naj bo $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ desno zvezna funkcija s končno totalno variacijo, za katero je $f(a) = 0$. Označite $V(x) = V_f(a,x)$ in definirajte $V(a) = 0$. Definirajte funkciji f^+, f^- s predpisom

$$f^+(x) = \frac{V(x) + f(x)}{2} \quad \text{in} \quad f^-(x) = \frac{V(x) - f(x)}{2}\,.$$

   a. Pokažite, da sta funkciji f^+ in f^- desno zvezni, nenegativni in nepadajoči.

   b. Predpostavite, da je $f(x) = g^+(x) - g^-(x)$ za $x \in [a,b]$, kjer sta g^+ in g^- desno zvezni, nenegativni in nepadajoči. Pokažite, da za $[c,d] \subseteq [a,b]$ velja

$$f^+(d) - f^+(c) \le g^+(d) - g^+(c) \quad \text{in} \quad f^-(d) - f^-(c) \le g^-(d) - g^-(c)\,.$$

7. Naj bosta f in α omejeni funkciji na $[a,b]$ in predpostavite, da integral $\int_a^b f(x)d\alpha(x)$ obstaja. Naj bo $g\colon [c,d] \to [a,b]$ strogo naraščajoča zvezna funkcija z $g(c) = a$ in $g(d) = b$. Definirajte

$$h(x) = f(g(x)) \qquad \text{in} \qquad \beta(x) = \alpha(g(x))\,.$$

   Pokažite, da velja formula za uvedbo nove spremenljivke

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \int_c^d h(x)d\beta(x)\,.$$

8. V tej nalogi vse integrale razumemo kot Lebesgue-Stieltjesove integrale. Naj bo $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ desno zvezna funkcija in označite $\bar{\alpha}(x) = V_\alpha(a,x)$. Kot znano privzemite, da je posledično $\bar{\alpha}$ desno zvezna. Naj bo f Borel merljiva na $[a,b]$ in privzemite $\int_{[a,b]} |f(x)|d\bar{\alpha}(x) < \infty$. Definirajte $\beta\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ z

$$\beta(x) = \int_a^x f(u)d\alpha(u)\,.$$

   a. Naj bo $\bar{\beta}(x) = V_\beta(a,x)$. Pokažite, da za $a \le x < y \le b$ velja

$$|\beta(y) - \beta(x)| \le \int_x^y |f(u)|d\bar{\alpha}(x)$$

   in

$$|\bar{\beta}(y) - \bar{\beta}(x)| \le \int_x^y |f(u)|d\bar{\alpha}(x)$$

   b. Pokažite, da je β desno zvezna s končno totalno variacijo na $[a,b]$.

   c. Označite $\bar{\beta}(x) = V_\beta(a,x)$. Naj bo g Borelova funkcija na $[a,b]$ in naj velja

$$\int_{[a,b]} |g(x)|d\bar{\beta}(x) < \infty\,.$$

   Pokažite, da je

$$\int_a^b g(x)d\beta(x) = \int_a^b g(x)f(x)d\alpha(x)\,.$$

   d. Označite $\bar{\beta}(x) = V_\beta(a,x)$. Naj bo g Borelova funkcija na $[a,b]$ in naj velja

$$\int_{[a,b]} |g(x)f(x)|d\bar{\alpha}(x) < \infty\,.$$

   Pokažite, da je

$$\int_a^b g(x)d\beta(x) = \int_a^b g(x)f(x)d\alpha(x)\,.$$

e. Ali sta pogoja v točkah c. in d. ekvivalentna?

9. Naj bo μ končna nenegativna mera na Borelovih množicah intervala $[a,b]$ in definirajte $\alpha(x) = \mu([a,x])$. Predpostavite, da je α zvezna na $[a,b]$ in velja $\mu(\{a\}) = 0$.

   a. Naj bo f zvezna na $[a,b]$. Pokažite, da je

   $$\int_{[a,b]} f(x) d\mu(x) = \int_a^b f(x) d\alpha(x)\,,$$

   kjer integral na desni razumemo kot Stieltjesov integral.

   b. Naj bo f omejena na $[a,b]$ in levo zvezna na $(a,b]$. Predpostavite, da Stieltjesov integral $\int_a^b f(x)d\alpha(x)$ obstaja. Pokažite, da velja

   $$\int_{[a,b]} f(x) d\mu(x) = \int_a^b f(x) d\alpha(x)\,.$$

10. Naj bosta μ in ν končni meri na $[0,1]$ in definirajte za $x \in [0,1]$

$$F(x) = \mu([0,x]) \qquad \text{in} \qquad G(x) = \nu([0,x])$$

Pokažite, da velja formula za integracijo *per partes* oblike

$$\int_{[0,1]} F(x)\nu(dx) = F(1)G(1) - \int_{[0,1]} G(x)\mu(dx) + \int_{[0,1]} \mu(\{x\})\,\nu(dx)\,.$$

11. Označite z $V_\alpha(a,b)$ totalno variacijo funkcije α na intervalu $[a,b]$. Privzemite, da je $V_\alpha(a,b) < \infty$ in predpostavite, da za vsak $x \in (a,b]$ obstaja Stieltjesov integral $F(x) = \int_a^x f(u)d\alpha(u)$. Definiramo $F(a) = 0$. Pokažite, da ima za omejeno funkcijo f funkcija F omejeno totalno variacijo na $[a,b]$.

Pričakovana vrednost, pogojna pričakovana vrednost in diskretni martingali

12. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ verjetnostni prostor in naj bo dan π-sistem $\mathcal{A} \in \mathcal{F}$. Predpostavimo $\Omega \in \mathcal{A}$. Predpostavite, da družina slučajnih spremenljivk $\mathcal{M}$ izpolnjuje naslednje pogoje:

   (i) $\mathcal{M}$ je vektorski prostor, torej iz $X_1, X_2 \in \mathcal{M}$ sledi $\alpha X_1 + \beta X_2 \in \mathcal{M}$ za poljubna $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

   (ii) Če je $X_1 \leq X_2 \leq \ldots$ naraščajoče zaporedje slučajnih spremenljivk in je $X(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) < \infty$ za vsak $\omega \in \Omega$, potem je $X \in \mathcal{M}$.

   (iii) $I_A \in \mathcal{M}$ za vsak $A \in \mathcal{A}$.

   Dokažite naslednje trditve:

   a. Družina $\mathcal{M}$ vsebuje vse $\sigma(\mathcal{A})$ merljive slučajne spremenljivke. *Ta trditev je izrek o monotonih razredih.*

   b. Naj bosta X in Y slučajni spremenljivki in naj bo Y merljiva glede na $\sigma(X)$. Uporabite (a) za dokaz, da obstaja Borelova funkcija $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ z $Y = \phi(X)$. *Namig:* $\mathcal{A} = \sigma(X)$.

   c. Če je Y merljiva glede na $\sigma(X)$ in neodvisna od X, kaj lahko rečemo o slučajni spremenljivki Y?

13. Naj bo $\{X_n\}$ zaporedje slučajnih spremenljivk. Dokažite naslednje trditve:

a. Če $X_n \xrightarrow{\mathrm{L}^2} X$, ko $n \to \infty$, potem $X_n^2 \xrightarrow{\mathrm{L}^1} X^2$, ko $n \to \infty$.

b. Naj bo $1 \leq q < p$. Če $X_n \xrightarrow{\mathrm{L}^p} X$, ko $n \to \infty$, potem $X_n \xrightarrow{\mathrm{L}^q} X$, ko $n \to \infty$.

14. Naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ slučajne spremenljivke z $E|X_k| < \infty$ za $k \geq 1$. Naj $X_k \xrightarrow{\text{s.g.}} X$, ko $k \to \infty$ in naj velja
$$\lim_{n \to n} E|X_n| = E|X| \, .$$
Pokažite, da v primeru, ko je $E|X| < \infty$, velja $E|X_k - X| \to 0$, ko $k \to \infty$.

15. Naj bo M nenegativen martingal z $E(M_n^2) < \infty$ za vse $n \geq 0$. Pokažite, da za $x \geq 0$ velja
$$P\left(\max_{0 \leq k \leq n} M_k > x\right) \leq \frac{E(M_n^2)}{E(M_n^2) + x^2} \, .$$

16. Naj bo M martingal in $p > 1$. Pokažite, da velja
$$E\left(\left(\max_{0 \leq k \leq n} |M_k|\right)^p\right) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E\left(|M_n|^p\right) \, .$$

17. Naj bodo $(X_n)_{n \geq 1}, X$ slučajne spremenljivke z $E|X_n| < \infty$ in $E|X| < \infty$. Dokažite, da velja
$$E|X_n - X| \to 0 \, ,$$
ko $n \to \infty$, če in samo če veljata pogoja:

(i) $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X$, ko $n \to \infty$.

(ii) Družina $(X_n)_{n \geq 1}$ je enakomerno integrabilna.

18. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ verjetnostni prostor in X slučajna spremenljivka z $E|X| < \infty$. Naj bo $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ dana σ-algebra.

a. Naj bo $\mathcal{N} = \{F \in \mathcal{F} \colon P(F) = 0\}$. Definirajte $\bar{\mathcal{G}} = \{G \cup N \colon G \in \mathcal{G}, N \in \mathcal{N}\}$. Pokažite, da je $\mathcal{G} \subset \bar{\mathcal{G}}$ in je $\bar{\mathcal{G}}$ tudi σ-algebra.

b. Pokažite, da je skoraj gotovo
$$E\left(X|\mathcal{G}\right) = E\left(X|\bar{\mathcal{G}}\right) \, .$$

19. Naj bo $(X_n)_{n \geq 1}$ nepadajoče zaporedje nenegativnih slučajnih spremenljivk. Predpostavite, da je $\sup_{n \geq 1} EX_n < \infty$. Utemeljite, da skoraj gotovo obstaja $\lim_{n \to \infty} X_n$. Če limito označimo z X, pokažite, da velja $EX < \infty$ in
$$E\left(X|\mathcal{G}\right) = \lim_{n \to \infty} E\left(X_n|\mathcal{G}\right) \, .$$

20. Naj bodo X_n slučajne spremenljivke na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Predpostavite, da je $|X_n| \leq Y$ za vse n in je $EY < \infty$. Predpostavite, da $X_n \to X$ skoraj gotovo, ko $n \to \infty$.

a. Naj bo $\mathcal{G}_n$ naraščajoče zaporedje σ-algeber z $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{F}$. Naj bo $\mathcal{G}$ najmanjša σ-algebra, ki vsebuje $\cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_n$. Pokažite, da velja skoraj gotovo
$$E\left(X_n|\mathcal{G}_n\right) \to E\left(X|\mathcal{G}\right) \, ,$$
ko $n \to \infty$.

b. Naj bo $\mathcal{G}_n$ padajoče zaporedje σ-algeber z $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{F}$. Naj bo $\mathcal{G} = \cap_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_n$. Pokažite, da velja skoraj gotovo

$$E\left(X_n | \mathcal{G}_n\right) \to E\left(X | \mathcal{G}\right) ,$$

ko $n \to \infty$.

21. Naj bosta T in S končna časa ustavljanja glede na $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Naj bo Z integrabilna slučajna spremenljivka.

a. Pokažite, da na $\{T < S\}$ skoraj gotovo velja

$$E\left(Z | \mathcal{F}_{T \wedge S}\right) = E\left(Z | \mathcal{F}_T\right)$$

b. Pokažite, da skoraj gotovo velja

$$E\left[E\left(Z | \mathcal{F}_T\right) | \mathcal{F}_S\right] = E\left[Z | \mathcal{F}_{T \wedge S}\right] .$$

22. Naj bodo $X_1, X_2, \ldots, X_n$ neodvisne enako porazdeljene slučajne spremenljivke z $X_1 > 0$, $EX_1 = \mu$ in $E(X_1^q) < \infty$ za $1 < q \leq 2$. Dokažite

$$(EX_1)^q \leq E(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j)^q \leq E\left[X_1 \left(\frac{X_1 + (n-1)\mu}{n}\right)^{q-1}\right] .$$

Namig: Pogojni Jensen.

23. Naj bodo $X_1, X_2, \ldots, X_n$ neodvisne, enako porazdeljene strogo pozitivne slučajne spremenljivke. Predpostavite $n \geq 3$. Naj bo J celoštevilska slučajna spremenljivka z vrednostmi v $\{1, 2, \ldots, n\}$, za katero velja

$$P(J = j | X_1, X_2, \ldots, X_n) = \frac{X_j}{S_n} ,$$

kjer je $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

Definirajte vektor $X^* = (X_1^*, \ldots, X_{n-1}^*)$ s predpisom

$$X_i^* = \begin{cases} X_i, & \text{če } i < J \\ X_{i+1}, & \text{če } i \geq J . \end{cases}$$

a. Pokažite, da za poljubno omejeno Borelovo funkcijo $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ velja

$$E[f(X_J, X_1^*, \ldots, X_{n-1}^*)] = nE[\frac{X_1}{S_n} f(X_1, X_2, \ldots, X_n)] .$$

b. Naj bo $S_{n-1}^* = X_1^* + \cdots + X_{n-1}^*$. Pokažite, da za poljubne omejene Borelove funkcije $f, h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $g \colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ velja

$$E\left[f(X_J) g(X^*) h(S_{n-1}^*)\right] = nE\left[\frac{X_1}{S_n} f(X_1) g(X_{n-1}) h(S_{n-1})\right] ,$$

kjer je $X_{n-1} = (X_2, \ldots, X_n)$ in $S_{n-1} = X_2 + \cdots + X_n$.

c. Dokažite

$$E\left[g(X^*) | X_J, S_{n-1}^*\right] = E\left[g(X^*) | S_{n-1}^*\right] .$$

d. Sklepajte, da je

$$E\left[f(X_J) g(X^*) | S_{n-1}^*\right] = E\left[f(X_J) | S_{n-1}^*\right] E\left[g(X^*) | S_{n-1}^*\right] .$$

24. Predpostavljajte, da za integrabilni slučajni spremenljivki X in Y velja $E(X|Y) = Y$ in $E(Y|X) = X$.

   a. Dokažite, da za poljuben $x \in \mathbb{R}$ velja

$$\begin{aligned} 0 &\leq E[(X-Y)1(Y \leq x < X)] = E[(Y-X)1(X > x, Y > x)] \\ 0 &\geq E[(X-Y)1(X \leq x < Y)] = E[(Y-X)1(X > x, Y > x)] \end{aligned}$$

   b. Dokažite, da je $X = Y$ s.g.

25. Assume that P and Q are equivalent probability measures on a measurable space $(\Omega, \mathcal{F})$, and let $\Lambda = \frac{dQ}{dP}$. Let X be a random variable with $E_P|X| < \infty$ and $E_Q|X| < \infty$. Prove the following version of the Bayes' formula: for a σ-algebra $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$,

$$E_Q(X|\mathcal{G}) = \frac{E_P(X\Lambda|\mathcal{G})}{E_P(\Lambda|\mathcal{G})},$$

Q-a.s. Show that all the conditional expectations exist. Show that the denominator is a.s. nonzero.

26. Naj bo $(X_n, \mathcal{F}_n)$ martingal na $(\Omega, \mathcal{G}, P)$. Spodnje trditve ali dokažite ali ovrzite s protiprimerom.

   a. Če X_n konvergira s.g. proti neki slučajni spremenljivki X, je $\sup_n E(X_n^+) < \infty$.
   b. Če je $X_0 = 1$ in je $(|X_n|, \mathcal{F}_n)$ martingal, je $X_n \geq 0$ s.g. za vsak $n \geq 0$.
   c. Naj bo a_n zaporedje realnih števil. Obstaja martingal X, da je

$$P(\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) = a_n \text{ za } n \geq N(\omega)\}) = 1\,,$$

   pri čemer je N s.g. končna slučajna spremenljivka.
   d. Če je

$$P(X_n < 0 \text{ neskončno mnogokrat}) = 0\,,$$

   potem X_n s.g. konvergira proti končni limiti.

27. Naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ neodvisne in enako porazdeljene. Naj bo $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Predpostavite, da za $t \in \mathbb{R}$ velja $\phi(t) = \log(M_{X_1}(t)) < \infty$, kjer je

$$M_{X_1}(t) = E\left(e^{tX_1}\right)\,.$$

   a. Prepričajte se, da je $M_n = \exp(tS_n - n\phi(t))$ martingal.
   b. Če je $t \geq 0$, je za vsak opcijski čas

$$P(S_T \geq x, T \leq n) \leq e^{-tx+\phi(t)n}\,.$$

   Dokažite.
   c. Predpostavite, da so X_k porazdeljene standardno normalno. Naj bo $x_n = \alpha f(\alpha^{n-1})$ za $\alpha > 1$, kjer je

$$f(\alpha) = (2\alpha \log\log\alpha)^{1/2}\,.$$

   Dokažite, da je

$$P(\sup_{k \leq \alpha^n} S_k \geq x_n) \leq ((n-1)\log\alpha)^{-\alpha}\,.$$

d. Dokažite, da je

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{S_k}{\sqrt{2k\log\log k}} \le 1 \qquad \text{s.g.}\,.$$

28. Naj bodo $S_1, S_2, \ldots, S_n$ delne vsote zaporedja neodvisnih slučajnih spremenljivk s pričakovano vrednostjo 0. Dokažite naslednje trditve:

   a. $E(S_1^+) \le E(S_2^+) \le \cdots \le E(S_n^+)$.
   b. $P(S_j \ge -2E(S_n^+)) \ge 1/2$ za vse $1 \le j \le n$.
   c. Za poljuben $a \ge 0$ je

$$P(\max_{1\le j\le n} S_j \ge a + 2E(S_n^+)) \le 2P(S_n \ge a)\,.$$

29. Naj bo $(\mathcal{F})_n$ filtracija in $A_n \in \mathcal{F}_n$ za vsak $n \ge 0$. Naj bo

$$\Lambda_n = \bigcup_{m\ge n} A_m \qquad \text{in} \qquad \Lambda = \bigcap_n \Lambda_n\,.$$

Pokažite, da je

$$\lim_{n\to\infty} P(\Lambda_n|\mathcal{F}_n) = 1_\Lambda \quad \text{s.g.}$$

30. (Časovno nehomogeni procesi razvejanja) Kot pri časovno homogenem procesu razvejanja začnemo z enim posameznikom, torej $X_0 = 1$. Na koraku $n-1$ posameznik *umre* z verjetnostjo $1-p_n$ ali *se razdeli* v dva posameznika z verjetnostjo p_n. Z X_n označimo število pozameznikov v n-ti generaciji.

Bolj formalno predpostavljamo, da imamo družino $(Y_{nk}\colon n \ge 1, k \ge 1)$ neodvisnih slučajnih spremenljivk, takih da je $P(Y_{nk} = 2) = p_n$ in $P(Y_{nk} = 0) = 1-p_n$ za $k \ge 1$ in $n \ge 1$. Slučajne spremenljivke X_n definiramo rekurzivno z

$$\begin{aligned} X_0 &= 1 \\ X_n &= \sum_{k=1}^{X_{n-1}} Y_{n,k} \qquad \text{za } n \ge 1\,. \end{aligned}$$

Če je $X_{n-1} = 0$ je seveda $X_n = 0$.

Predpostavljajte $p_n \downarrow 1/2$.

   a. Dokažite, da je

$$E(X_n) = \prod_{k=1}^n (2p_k)$$

   in

$$E(X_n^2) = E(X_n)^2 \left[1 + \sum_{k=1}^n \frac{2}{E(X_k)}(1-p_k)\right]$$

   za $n = 1, 2, \ldots$.

   b. Prepričajte se, da je $M_n = X_n/E(X_n)$ martingal glede na filtracijo $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$. Pokažite, da je ta martingal omejen v L^2, če in samo če je

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{E(X_k)} < \infty\,.$$

c. Dokažite, da proces izumre z verjetnostjo 1, t.j. $X_n = 0$ slej ko prej v n s.g., če je

$$\sum_{k=1}^{\infty}(2p_k - 1) < \infty$$

in preživi s pozitivno verjetnostjo, t.j. $X_n > 0$ za vse n s pozitivno verjetnostjo, če je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \exp(\,-\alpha \sum_{i=1}^{k}(2p_i - 1)) < \infty$$

za nek $\alpha < 1$.

d. Naj bo $p_n = (1/2 + n^{-\gamma}) \wedge 1$. Za katere γ proces preživi s pozitivno verjetnostjo?

31. Naj bodo (X_n), (Y_n) in (Z_n) pozitivna prilagojena zaporedja glede na filtracijo $(\mathcal{F}_n)$. Predpostavljajte $E|X_n| < \infty$ in

$$E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \leq (1 + Z_n) \cdot X_n + Y_n$$

in $\sum_n Y_n < \infty$ in $\sum_n Z_n < \infty$ s.g. Dokažite, da (X_n) konvergira s.g. proti končni limiti.

Namig: (X_n) je "skoraj" supermartingal.

32. Dano je zaporedje slučajnih spremenljivk $X_1, X_2, \ldots$ z vrednostmi na intervalu $(0,1)$, ki ustrezajo zvezam

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} &= aX_n + (1-b)|X_0, X_1, \ldots, X_n) = X_n \\ P(X_{n+1} &= aX_n|X_0, X_1, \ldots, X_n) = 1 - X_n \end{aligned}$$

pri čemer je $X_0 = x_0 \in (0,1)$ konstanta in $0 < a < b < 1$.

a. Dokažite, da je (X_n) ne-negativni supermartingal.

b. Dokažite, da $X_n \to X_\infty$ s.g., ko $n \to \infty$.

c. Izračunajte $P(X_\infty = 0)$.

Namig: Izračunajte $E(X_\infty)$.

33. Naj bo (X_n) martingal z lastnostjo $\sup_n E|X_n| < \infty$. Dokažite, da obstajata pozitivna martingala (Y_n) in (Z_n), taka da je $\sup_n E|Y_n| < \infty$ in $\sup_n E|Z_n| < \infty$, ter $X_n = Y_n - Z_n$.

Brownovo gibanje, semimartingali, Itôva formula, stohastične diferencialne enačbe

34. Naj bo $(B_t\colon t \geq 0)$ standardno Brownovo gibanje in T čas ustavljanja glede na filtracijo, ki jo generira Brownovo gibanje. Predpostavite, da je $P(T < \infty) = 1$. Naj bodo $f_1, f_2, \ldots, f_m$ omejene nenegativne zvezne funkcije in $0 < t_1 < t_2 \cdots < t_m$.

a. Predpostavite, da ima T vrednosti v množici $\{k/n\colon k \geq 0\}$. Pokažite, da za $G \in \mathcal{F}_T$ velja

$$E\left(\left(\prod_{i=1}^{m} f_i\left(B_{T+t_i} - B_T\right)\right) \cdot 1_G\right) = E\left(\prod_{i=1}^{m} f_i(B_{t_i})\right) P(G)\,.$$

b. Pokažite, da za vsak čas ustavljanja s $P(T < \infty) = 1$ obstaja zaporedje časov ustavljanja $T_n \downarrow T$ s.g., ko $n \to \infty$, pri čemer ima T_n vrednosti s.g. v množici $\{k/n\colon k \geq 0\}$.

c. Pokažite, da za vsak čas ustavljanja s $P(T<\infty)=1$ in $G\in\mathcal{F}_T$ velja

$$E\left(\left(\prod_{i=1}^m f_i\left(B_{T+t_i}-B_T\right)\right)\cdot 1_G\right)=E\left(\prod_{i=1}^m f_i(B_{t_i})\right)P(G)\,.$$

d. Utemeljite, da je enakost v c. dovolj za dokaz krepke markovske lastnosti za Brownovo gibanje.

e. Ali trditev v c. še drži, če je $G\in\bigcap_{\epsilon>0}\mathcal{F}_{T+\epsilon}$?

35. Naj bo $(B_t\colon t\geq 0)$ Brownovo gibanje z $B_0=0$. Označite

$$S_t=\max_{0\leq s\leq t} B_s\,.$$

a. S pomočjo principa zrcaljenja izračunajte gostoto para (B_t,S_t).

b. Brownowo gibanje s tendenco je definirano kot $B_t^{(\mu)}=B_t+\mu t$ za $t\geq 0$. Pokažite, da za $0<t_1<t_2<\cdots<t_n<T$ velja

$$\begin{aligned}P(B_{t_1}^{(\mu)}\in A_1,\ldots,B_{t_n}^{(\mu)}\in A_n)=&\\ &=E\left(1\left(B_{t_1}\in A_1,\ldots,B_{t_n}\in A_n\right)e^{\mu B_T}\right)e^{-\mu^2T/2}\,.\end{aligned}$$

c. Sklepajte, da je za $x>0$

$$P(\max_{0\leq s\leq T} B_s^{(\mu)}\geq x)=E\left(1\left(\max_{0\leq s\leq T} B_s\geq x\right)e^{\mu B_T}\right)e^{-\mu^2T/2}\,.$$

d. Izračunajte $P(\max_{0\leq s\leq T} B_s^{(\mu)}\geq x)$ eksplicitno.

36. Naj bo B standardno Brownovo gibanje. Kot znano privzemite, da obstaja zvezen nepadajoč Brownovi filtraciji prilagojen proces L, da je $L_0=0$ in je

$$M_t=|B_t|-L_t$$

martingal glede na Brownovo filtracijo. Za $a,b>0$ definirajte

$$T_{a,b}=\inf\{t\geq 0\colon B_t\in\{-b,a\}\}\,.$$

a. Skrbno utemeljite, da je $E\left(|B_{T_{a,b}}|\right)=E(L_{T_{a,b}})$.

b. Izračunajte $E\left(L_{T_{a,b}}\right)$.

37. Naj bo B standardno Brownovo gibanje in $c,d>0$. Definirajte časa ustavljanja

$$T_c=\inf\{t\geq 0\colon B_t=c\}\quad\text{in}\quad T_{-d}=\inf\{t\geq 0\colon B_t=-d\}\,.$$

Naj bo $T=T_c\wedge T_{-d}$.

a. Utemeljite, da je

$$M_t^\lambda=\exp\left(\lambda\left(B_t-\frac{c-d}{2}\right)-\frac{1}{2}\lambda^2 t\right)$$

martingal.

b. Izračunajte

$$E\left(\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}T\right)\right)\,.$$

c. Izračunajte
$$E\left(\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}T\right)\cdot 1(B_T=c)\right).$$

38. Naj bo $T^a = \inf\{t \geq 0\colon W_t = a\}$, $a \in \mathbb{R}$, čas prvega trenutka, ko se W dotakne nivoja a. Naj bo
$$T = \inf\{t \geq T^1\colon W_t = 0\}$$
čas, ko Brownovo gibanje prvič zavzame vrednost nič po tem, ko je zavzelo vrednost ena. Privzamete lahko, da je T čas ustavljanja.

  a. Izračunajte porazdelitvi T in $T - T^1$. Kaj lahko rečete o njuni večrazsežni porazdelitvi?
  b. Izračunajte $P(T < T^3)$.

39. Naj bo B standardno Brownovo gibanje. Definirajte za $a, b > 0$
$$T_{a,b} = \inf\{t \geq 0\colon B_t < bt - a\}.$$

  a. Utemeljite, da je $T_{a,b}$ čas ustavljanja in velja $P(T_{a,b} < \infty) = 1$.
  b. Pokažite, da je
  $$E\left(e^{\frac{1}{2}T_{a,1}}\right) \leq e^a.$$
  Namig: izrek o opcijskem ustavljanju za martingal $M_t = \exp(B_t - \frac{1}{2}t)$.
  c. Naj bo $M_t = \exp(B_t - \frac{1}{2}t)$. Utemeljite neenakost
  $$\left|M_{T_{a,1}\wedge t} - M_{T_{a,1}}\right| \leq M_t \cdot 1\left(t < T_{a,1}\right) + e^{\frac{1}{2}T_{a,1}} \cdot 1\left(t < T_{a,1}\right).$$
  d. Z uporabo izreka Girsanova pokažite, da je
  $$E\left(M_t \cdot 1\left(t < T_{a,1}\right)\right) = P\left(t < S_{-a}\right),$$
  kjer je $S_{-a} = \inf\{t \geq 0\colon B_t = -a\}$. Sklepajte, da je martingal $M_{t\wedge T_{a,1}}$ enakomerno integrabilen.
  e. Pokažite, da je
  $$E\left[e^{\frac{b^2}{2}T_{a,b}}\right] = e^{ab}.$$

40. Naj bo $(B_t\colon t \geq 0)$ Brownowo gibanje. Za pozitivni števili a in b definirajte
$$T_{a,b} = \inf\{t \geq 0\colon B_t = a + bt\}.$$

  a. Utemeljite, da je $T_{a,b}$ čas ustavljanja.
  b. Naj bo $a' > a$. Z uporabo krepke markovske lastnosti za Brownovo gibanje dokažite, da je
  $$P(T_{a',b} < \infty) = P(T_{a,b} < \infty)P(T_{a'-a,b} < \infty).$$
  c. Naj bo
  $$M = \sup_{t\geq 0}\left(B_t - bt\right).$$
  Utemeljite, da je
  $$P(M \geq a) = P(T_{a,b} < \infty).$$
  Izpeljite, da je za $a' > a$
  $$P(M \geq a') = P(M \geq a)P(M \geq a' - a).$$

d. Za $\lambda \geq 0$ je proces

$$M_t = \exp\left(\lambda B_{t\wedge T_{a,b}} - \frac{\lambda^2}{2}(t \wedge T_{a,b})\right)$$

pozitiven martingal. Kaj je edina možna limita tega martingala? Sklepajte, da je za $\lambda > 2b$

$$1 = E\left[\exp\left(\lambda(a + bT_{a,b}) - \frac{\lambda^2}{2}T_{a,b}\right) 1(T_{a,b} < \infty)\right] .$$

Izračunajte $P(T_{a,b} < \infty)$.

41. Naj bo M omejen zvezen martingal v zveznem času. Naj bo $0 = t_0 < t_1 < t_2 \cdots$ particija intervala $[0, \infty)$, za katero je $t_k \uparrow \infty$. Definirajte proces X s predpisom, da je za $t_k \leq t < t_{k+1}$

$$X_t = \sum_{i=0}^{k-1} \left(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}\right)^2 + \left(M_t - M_{t_k}\right)^2 .$$

Pokažite, da je $Y = M^2 - X$ martingal.

42. Naj bo B standardno Brownovo gibanje in $S \leq T$ dva časa ustavljanja z $E(T) < \infty$ in $E(S) < \infty$. Dokažite, da je

$$E\left[(B_T - B_S)^2\right] = E\left[B_T^2 - B_S^2\right] = E\left(T - S\right) .$$

Bodite previdni pri zamenjavi limite in pričakovane vrednosti. Pomislite na Doobovo neenakost.

43. Naj bo X zvezen semimartingal in H^n zaporedje lokalno omejenih integrandov, ki po točkah konvergirajo proti integrandu H. Predpostavite, da obstaja lokalno omejen integrand K, da je $|H^n| \leq K$. Podrobno dokažite stohastično verzijo izreka o dominirani konvergenci: velja

$$\sup_{0\leq s\leq t} \left|(H^n \cdot X)_s - (H \cdot X)_s\right| \xrightarrow{\text{P}} 0 ,$$

ko $n \to \infty$.

44. Naj bo $(B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje in naj bo $(H_s : t \geq 0)$ zvezen prilagojen proces. Pokažite, da je za fiksen t

$$\frac{1}{B_{t+h} - B_t} \int_t^{t+h} H_s dB_s \xrightarrow{\text{P}} H_t ,$$

ko $h \downarrow 0$.

Namig: ocenite integral

$$E\left[\left|\frac{1}{B_h}\int_0^h (H_s - H_0)dB_s\right|^{1/4}\right]$$

s pomočjo Cauchy-Schwarzove neenakosti.

45. Naj bo H prilagojen integrand, za katerega je $E\left(\int_0^T H_s^2 ds\right) < \infty$. Naj bo $0 \leq s < t \leq T$ in predpostavite, da je $C \in \mathcal{F}_s$ ter $E\left(\int_s^t C^2 H_s^2 ds\right) < \infty$. Pokažite, da velja

$$\int_s^t C H_u dB_u = C \int_s^t H_u dB_u .$$

Namig: poskusite najprej z elementarnimi integrandi.

46. Naj bo B standardno Brownovo gibanje.

   a. Izračunajte $E(\int_0^t B_s ds | B_t)$.
   b. Izračunajte $E(\int_0^t s dB_s | B_t)$.

47. Naj bo $(B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje.

   a. Naj bo množica N definirana kot

   $$N = \bigcup_{M=1}^{\infty} \bigcup_{c=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{n-3} \bigcap_{k=i+1}^{i+3} \left\{ \left| B_{\frac{Mk}{n}} - B_{\frac{M(k-1)}{n}} \right| \leq \frac{c}{n} \right\} .$$

   Utemeljite, da je množica N merljiva in je $P(N) = 0$.
   b. Utemeljite, da z verjetnostjo 1 trajektorije Brownovega gibanja niso nikjer odvedljive.

48. Z uporabo krepke lastnosti Markova za Brownovo gibanje W izračunajte verjetnost

$$P(T_{-2} > T_2 > T_{-1} > T_1),$$

kjer je za $a \in \mathbb{R}$, $T_a = \inf\{t \geq 0 : W_t = a\}$.

49. Naj bo B standardno Brownovo gibanje in definirajte

$$L(t, \epsilon) = \frac{1}{\epsilon} \int_0^t \mathbf{1}(B_s \in (-\epsilon, \epsilon)) ds .$$

Pokažite, da obstaja limita

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} L(t, \epsilon)$$

v L^2 smislu.

50. Ornstein-Uhlenbeckov proces $(X_t : t \geq 0)$ zadošča enačbi

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma dB_t ,$$

kjer je $(B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje.

   a. Poiščite rešitev enačbe.
   b. Izračunajte $E(X_t)$ in $\mathrm{var}(X_t)$.

51. Naj bo $X_t = \int_0^t W_s^2 dW_s$, $t \geq 0$.

   a. Izrazite proces X s pomočjo procesov $Y_t = W_t^3$, $t \geq 0$, in $Z_t = \int_0^t W_s ds$, $t \geq 0$.
   b. Izračunajte $\mathrm{cov}(Y_t, Z_t)$ ob upoštevanju dejstva, da je $Z_t \stackrel{(d)}{=} \mathcal{N}(0, t^3/3)$ (za $t \geq 0$).
   c. Izračunajte $\langle Y, Z \rangle_t$ (za $t \geq 0$)?

52. Dan je proces $X_t = e^{t/2} \cos(W_t)$, $t \geq 0$.

   a. Predstavite ga kot Itôv proces in pokažite, da je martingal. Izračunajte $E(\cos(W_t))$ in $E(\cos^2(W_t))$ (za $t \geq 0$)?
   b. Izračunajte $E(\langle X \rangle_t)$ (za $t \geq 0$).

53. Naj bo $X_t = \exp(W_t)$, $t \geq 0$.

a. Pokažite, da je proces X submartingal in poiščite njegovo Doob-Meyerjevo dekompozicijo.

b. Določite njegovo kvadratično variacijo $\langle X\rangle_t$ in izračunajte $E[\langle X\rangle_t]$ $(t \geq 0)$.

c. Za $0 \leq u \leq s$ izračunajte $E[\exp(aW_u + bW_s)]$.

d. Z uporabo Itôve formule predstavite $\langle X\rangle^2$ kot integral glede na proces kvadratične variacije $\langle X\rangle$.

e. Z uporabo prejšnjih dveh točk izračunajte $E[\langle X\rangle_t^2]$ $(t \geq 0)$.

54. Naj bo M martingal glede na filtracijo $(\mathcal{F}_t)$. Naj bo T čas ustavljanja. Pokažite, da je M^T martingal glede na filtracijo $(\mathcal{F}_{T\wedge t})_{t\geq 0}$. Pokažite še obratno: če je M^T martingal glede na filtracijo $(\mathcal{F}_{T\wedge t})_{t\geq 0}$ za vsak čas ustavljanja, je M martingal glede na izhodiščno filtracijo.

55. Naj bo B Brownovo gibanje glede na filtracijo $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Naj bo H progresivno merljiv integrand, za katerega je

$$E\left(\int_0^T H_t^2 dt\right) < \infty$$

za vsak $T > 0$. Pokažite, da velja

$$E\left[\left(\int_T^{T+s} H_t dB_t\right)^2 \Big| \mathcal{F}_T\right] = E\left[\int_T^{T+s} H_t^2 dt \Big| \mathcal{F}_T\right].$$

56. Naj bosta M in N zvezna lokalna martingala. Označite z A_t totalno variacijo procesa $\langle M, N\rangle$ na intervalu $[0,t]$. Naj bosta H in K prilagojena integranda . Pokažite, da velja

$$\int_0^t |H_s K_s| dA_s \leq \left(\int_0^t H_s^2 d\langle M\rangle_s\right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^t K_s^2 d\langle N\rangle_s\right)^{1/2}.$$

Integrale razumemo kot Lebesgue-Stieltjesove integrale.

57. Naj bo M zvezen martingal glede na filtracijo $(\mathcal{F}_t)$. Predpostavite, da je $|M_t| \leq K$ za neko konstanto K in vsak čas t. Predpostavite $M_0 = 0$. Naj bo dana particija $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$ intervala $[0,t]$.

a. Pokažite, da je za $0 \leq k \leq n-1$

$$E\left[\sum_{j=k+1}^{n} \left(M_{t_j} - M_{t_{j-1}}\right)^2 | \mathcal{F}_{t_k}\right] \leq K^2.$$

b. Pokažite, da je

$$E\left[\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n} \left(M_{t_k} - M_{t_{k-1}}\right)^2 \left(M_{t_j} - M_{t_{j-1}}\right)^2\right] \leq K^4.$$

c. Pokažite, da je

$$E\left[\sum_{k=1}^{n} \left(M_{t_k} - M_{t_{k-1}}\right)^4\right] \leq 4K^4.$$

d. Pokažite, da je

$$E\left[\left(\sum_{k=1}^{n} \left(M_{t_k} - M_{t_{k-1}}\right)^2\right)^2\right] \leq 6K^4.$$

e. Pokažite, da je

$$E\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\left(M_{t_k}-M_{t_{k-1}}\right)^2-\langle M\rangle_t\right)^2\right]$$
$$=\sum_{k=1}^{n}E\left[\left(\left(M_{t_k}-M_{t_{k-1}}\right)^2-\left(\langle M\rangle_{t_k}-\langle M\rangle_{t_{k-1}}\right)\right)^2\right].$$

f. Privzemite, da je tudi $\langle M\rangle_t \leq K$ za vse t. Pokažite, da

$$E\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\left(M_{t_k}-M_{t_{k-1}}\right)^2-\langle M\rangle_t\right)^2\right]\to 0\,,$$

ko $|\pi|\to 0$.

58. Naj bo M zvezen lokalni martingal.

a. Pokažite, da je $\langle M\rangle_t = 0$ za vse t, če in samo če je M konstanten, torej $M_t = M_0$ s.g.

b. Naj bosta $0 \leq a < b$ dani fiksni števili. Pokažite, da sta dogodka

$$A=\{\omega\colon \langle M\rangle_b(\omega)=\langle M\rangle_a(\omega)\}$$

in

$$B=\{\omega\colon M_t(\omega)=M_a(\omega)\,\text{za}\ t\in[a,b]\}$$

s.g. enaka. To pomeni, da je $P((A\cap B^c)\cup(A^c\cap B))=0$.

59. Pokažite, da za zvezen lokalni martingal M velja, da je $\sup_{t\geq 0}E(M_t^2)<\infty$, če in samo če je $E(M_0^2)<\infty$ in $E\left(\langle M\rangle_\infty\right)<\infty$. Pokažite, da je v primeru, ko velja eden od zgornjih pogojev $M^2-\langle M\rangle$ enakomerno integrabilen martingal.

60. Naj bo M zvezen lokalni martingal na $[0,\infty)$ z lastnostjo $\sup_{t\geq 0}E(M_t^2)<\infty$. Za progresivno merljiv integrand H predpostavite, da je

$$E\left(\int_0^\infty H_t^2 d\langle M\rangle_t\right)<\infty\,.$$

Pokažite, da je $H\cdot M$ edini lokalni martingal, za katerega za vsak lokalni martingal N z lastnostjo

$$\sup_{t\geq 0}E\left(N_t^2\right)<\infty$$

velja

$$\langle H\cdot M,N\rangle = H\cdot\langle M,N\rangle\,.$$

61. Prirejeni Hermitovi polinomi h_n so definirani kot

$$h_n(x)=e^{x^2/2}(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2/2}\right)\,.$$

Prvih nekaj polinomov je $1, x, x^2-1, x^3-3x, x^4-6x^2-3,\ldots$. Za $y>0$ definirajte polinome dveh spremenljivk

$$H_n(x,y)=y^{n/2}h_n(x/\sqrt{y})\,.$$

a. Pokažite, da lahko funkcijo $H_n(x,y)$ razširimo do dvakrat zvezno parcialno odvedljive funkcije za $x,y\in\mathbb{R}$.

b. Pokažite, da je

$$\frac{\partial}{\partial x} H_n(x,y) = nH_{n-1}(x,y)$$

in

$$\frac{\partial}{\partial y} H_n(x,y) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} H_n(x,y) = 0\,.$$

c. Naj bo M zvezen lokalni martingal. Izračunajte

$$\int_0^t H_n\left(M_s, \langle M \rangle_s\right) dM_s\,.$$

62. Naj bodo $(W_t^{(1)})_{t\geq 0}, \ldots, (W_t^{(n)})_{t\geq 0}$ neodvisna Brownova gibanja (in $n \geq 2$), ki se ne začnejo vsa v točki 0, in naj bo

$$R_t = \sqrt{\left(W_t^{(1)}\right)^2 + \cdots + \left(W_t^{(n)}\right)^2}$$

Naj bo $T_\epsilon = \inf\{t \geq 0 \colon R_t + \epsilon\}$.

a. Pokažite, da ima R_t enako porazdelitev kot rešitev stohastične diferencialne enačbe

$$dX_t = dW_t + \frac{n-1}{2X_t} dt$$

pri začetnem pogoju $X_0 = R_0 \neq 0$ za $t < T_\epsilon$. Privzemamo, da rešitev stohastične diferencialne enačbe obstaja za $t \geq 0$.

b. Naj bo za $n \geq 3$

$$f(x) = -x^{-(n-2)}\,.$$

Pokažite, da je $M_t = f(R_{t\wedge T_\epsilon})$ lokalni martingal.

63. Naj bo $T > 0$ fiksen čas in

$$H = \mathbf{1}_{\{0 \leq W_T \leq 1\}}$$

S H_t označimo martingal

$$H_t = E\left[H | \mathcal{F}_t\right]$$

za $0 \leq t \leq T$.

a. Z uporabo lastnosti Markova za Brownovo gibanje izrazite H_t s pomočjo funkcije napak

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-u^2} du\,.$$

b. S pomočjo Itôve formule in izraza iz prejšnje točke izrazite H_t kot stohastični integral po Brownovem gibanju. Z drugimi besedami, poiščite tak proces f_t, da velja

$$H_t = c + \int_0^t f_s dW_s$$

64. Naj bo $(t \geq 0)$:

$$M_t = \int_0^t e^{W_s} dW_s \quad \text{in} \quad N_t = \int_0^t e^{-\frac{s}{2}} dW_s$$

a. Določite porazdelitev N_t.

b. Izračunajte $E(M_t^2)$.

c. Izračunajte $\operatorname{cov}(M_t, N_t)$.

65. Naj bosta $W^{(1)}$ in $W^{(2)}$ neodvisni standardni Brownovi gibanji. Definirajmo

$$M_t = \left(W_t^{(1)}\right)^4 - 6\left(W_t^{(1)}\right)^2 t + 3t^2 \quad \text{in} \quad N_t = ((W_t^{(1)})^2 - t)((W_t^{(2)})^2 - t), \quad t \geq 0$$

Definirajmo še časa

$$T = \inf\{t \geq 0 : |W_t^{(1)}| = r\} \quad \text{in} \quad S = \inf\{t \geq 0 : (W_t^{(1)})^2 + (W_t^{(2)})^2 = r^2\}$$

za dan radij $r > 0$.

a. Pokažite, da sta M in N martingala.
b. S pomočjo martingala M in izreka o ustavljanju izračunajte $E(T^2)$.
c. S pomočjo martingalov M in N izračunajte $\mathrm{var}(S)$.

66. Naj bosta B in D neodvisni Brownovi gibanji. Naj bo $\alpha \in \mathbb{R}$ dana konstanta. Definirajte

$$M_t = \alpha\left(\int_0^t B_s dD_s + \int_0^t D_s dB_s\right) \quad \text{in} \quad N_t = \frac{\alpha^2}{2}\int_0^t \left(B_s^2 + D_s^2\right) ds\,.$$

Naj bo

$$X_t = \cos\left(M_t\right) e^{N_t}\,.$$

a. Izračunajte $\langle M \rangle$.
b. Pokažite, da je X lokalni martingal.
c. Utemeljite, da je X martingal. Kot znano privzemite, da je za vsak $\beta > 0$

$$E\left[\exp\left(\beta \max_{0\leq s\leq t} B_s^2\right)\right] < \infty\,.$$

67. Proces X je določen s stohastično diferencialno enačbo

$$\begin{aligned} dX_t &= X_t(1 - X_t)dW_t \\ X_0 &= x \in (0,1). \end{aligned}$$

Privzamete lahko, da ima ta enačba enolično krepko zvezno rešitev, ki je omejena na interval $X_t \in [0,1]$ za vse $0 \leq t < \infty$. Za dana $a, b > 0$, kjer velja $0 < x - a < x + b < 1$, definirajmo čas ustavljanja

$$T = T_{x-a} \wedge T_{x+b}\,,$$

kjer je za $l \in \mathbb{R}$, $T_l = \inf\{t \geq 0 : X_t = l\}$.

a. S pomočjo kvadratne variacije procesa X dokažite, da velja $E(T) < \infty$.
b. Z uporabo izreka o opcijskem ustavljanju določite porazdelitev X_T. Pri tem lahko uporabite trditev iz (a) naloge.
c. Naj bo

$$h(x) = (2x-1)\log\left(\frac{x}{1-x}\right)\,.$$

Uporabite Itôvo formulo in s pomočjo prejšnje točke ter izreka o opcijskem ustavljanju izračunajte $E(T)$.

68. Consider logistic growth with multiplicative noise, that is, the SDE

$$dX_t = (\lambda X_t - X_t^2)\,dt + \sigma X_t\,dB_t.$$

Here, $\lambda > 0$ and $\sigma > 0$ are fixed constants. Find the unique solution for any deterministic $X_0 = x_0 > 0$ explicitly, by deriving the equation for $Y_t = 1/X_t$. What can you say about the behavior of X_t as $t \to \infty$?

69. Prilagojen zvezen proces X naj ustreza stohastični diferencialni enačbi

$$dX_t = (1 + X_t)dt + X_t dB_t$$

in začetnemu pogoju $X_0 = 0$.

a. Izračunajte

$$d\left(e^{-B_t - \frac{t}{2}} X_t\right).$$

b. Izrazite proces X eksplicitno z B z ustreznim integralom.

70. Zvezna semimartingala X in Y naj ustrezata sistemu enačb

$$\begin{aligned} dX_t &= tX_t dt + Y_t dt + e^{\frac{t^2}{2}} dW_t^1 \\ dY_t &= tY_t dt + e^{\frac{t^2}{2}} dW_t^2 \end{aligned}$$

kjer sta W^1 in W^2 neodvisni Brownovi gibanji.

a. Pokažite, da sta procesa

$$M_t = e^{-\frac{t^2}{2}} X_t - te^{-\frac{t^2}{2}} Y_t \quad \text{in} \quad N_t = e^{-\frac{t^2}{2}} Y_t$$

martingala.

b. Izračunajte $\langle M, N \rangle_t$.

c. Zapišite procesa X in Y eksplicitno pri začetnih pogojih $X_0 = x_0$ in $Y_0 = y_0$.

71. Pokažite, da stohastična diferencialna enačba

$$dX_t = dB_t + X_t^2 dt$$

za začetnim pogojem $X_0 = 1$ na intervalu $[0, 2]$ nima rešitve. Z drugimi besedami, ne obstaja semimartingal X, ki bi ustrezal zgornji enačbi.

72. Zvezen prilagojen proces X naj ustreza stohastični diferencialni enačbi

$$dX_t = \left(\frac{2X_t}{1+t} - (1+t)^2\right) dt + (1+t^2) dW_t\,,$$

kjer je W standardno Brownovo gibanje. Začetni pogoj je $X_0 = x_0 \in \mathbb{R}$.

a. Naj bo $X_t = (1+t)^2 Y_t$. Ugotovite, kakšni stohastični diferencialni enačbi ustreza proces Y.

b. Najdite rešitev X originalne stohastične diferencialne enačbe in navedite $E(X_t)$ ter $\mathrm{var}(X_t)$.

73. Prilagojen zvezen proces X naj ustreza stohastični diferencialni enačbi

$$dX_t = (1 + X_t)dt + X_t dB_t$$

in začetnemu pogoju $X_0 = 0$.

a. Izračunajte

$$d\left(e^{-B_t - \frac{t}{2}} X_t\right).$$

b. Izrazite proces X eksplicitno z B z ustreznim integralom.

Zvezna semimartingala X in Y naj ustrezata sistemu enačb

$$\begin{aligned} dX_t &= tX_t dt + Y_t dt + e^{\frac{t^2}{2}} dW_t^1 \\ dY_t &= tY_t dt + e^{\frac{t^2}{2}} dW_t^2 \end{aligned}$$

kjer sta W^1 in W^2 neodvisni Brownovi gibanji.

a. Pokažite, da sta procesa

$$M_t = e^{-\frac{t^2}{2}} X_t - te^{-\frac{t^2}{2}} Y_t \quad \text{in} \quad N_t = e^{-\frac{t^2}{2}} Y_t$$

martingala.

b. Izračunajte $\langle M, N \rangle_t$.

c. Zapišite procesa X in Y eksplicitno pri začetnih pogojih $X_0 = x_0$ in $Y_0 = y_0$.

74. Zvezna prilagojena procesa X in Y naj ustrezata začetnima pogojema $X_0 = 1$ in $Y_0 = 0$ ter enačbama

$$\begin{aligned} dX_t &= \alpha X_t dt - Y_t dB_t \\ dY_t &= \alpha Y_t dt + X_t dB_t \,, \end{aligned}$$

kjer je B standardno Brownovo gibanje. Naj bo $R_t = X_t^2 + Y_t^2$.

a. S pomočjo Itôve formule pokažite, da je

$$R_t = e^{(2\alpha+1)t} \,.$$

b. S pomočjo Itôve formule pokažite, da je

$$X_t Y_t = 2\alpha \int_0^t X_s Y_s ds + \int_0^t (X_s^2 - Y_s^2) dB_s - \int_0^t X_s Y_s ds \,.$$

Izračunajte $\mathrm{cov}(X_t, Y_t)$.

75. Naj X ustreza stohastični diferencialni enačbi

$$dX_t = X_t(1 - X_t) dW_t \,,$$

kjer je W standardno Brownovo gibanje in je $X_0 = x_0 \in (0,1)$. Kot znano privzemite, da za vse t velja $P(X_t \in (0,1)) = 1$.

a. Definirajte za poljuben u

$$f(x) = \left(\frac{x}{1-x} \right)^u \sqrt{x(1-x)} \,.$$

Pokažite, da je za $x \in (0,1)$

$$f''(x) x^2 (1-x)^2 = \left(u^2 - \frac{1}{4} \right) f(x) \,.$$

b. Označite $\lambda = u^2 - \frac{1}{4}$ Pokažite, da je za poljuben u proces

$$Y_t = e^{-\frac{\lambda t}{2}} f(X_t)$$

lokalni martingal.

c. Izbiramo lahko tudi kompleksne u. Pokažite, da je v primeru, ko izberemo ui z realnim u, lokalni martingal Y omejen in torej martingal.

d. Sklepajte, da je

$$E\left[\left(\frac{X_t}{1-X_t}\right)^{ui}\sqrt{X_t(1-X_t)}\right] = \left(\frac{x_0}{1-x_0}\right)^{ui}\sqrt{x_0(1-x_0)}e^{-\frac{(4u^2+1)t}{8}}\,.$$

76. Naj bo

$$B_t = (1-t)\int_0^t \frac{dW_s}{1-s}, \quad t \geq 0.$$

a. Zapišite semimartingalsko dekompozicijo procesa B.

b. Pokažite, da je B Gaussov proces in izračunaj $\mathrm{var}(B_t)$ ter $\mathrm{cov}(B_s, B_t)$ (za $0 \leq s < t$). Ali prepoznaš to kovariančno funkcijo?

c. Določite porazdelitev vektorja (B_t, B_{1-t}) za $0 < t < 1/2$.

77. Naj bosta $W^{(1)}$ in $W^{(2)}$ neodvisni standardni Brownovi gibanji in naj bo

$$R_t = \sqrt{\left(W_t^{(1)}+1\right)^2 + \left(W_t^{(2)}\right)^2}, \quad t \geq 0$$

Pokažite, da je $(\log R_t)_{t\geq 0}$ lokalni martingal.

78. Naj bosta X in H dana zvezna semimartingala. Privzemite, da je $H_0 = h_0$ za neko konstanto h_0 in $X_0 = 0$. Naj bo

$$\mathcal{E}(X)_t = \exp\left(X_t - \frac{1}{2}\langle X\rangle_t\right)\,.$$

Definirajte

$$Z_t = \int_0^t \mathcal{E}(X)^{-1} dH_s \quad \text{in} \quad W_t = \int_0^t \mathcal{E}(X)^{-1} d\langle H, X\rangle_s$$

ter

$$Y_t = \mathcal{E}(X)_t\left(h_0 + \int_0^t \mathcal{E}(X)^{-1}\left(dH_s - d\langle H, X\rangle_s\right)\right)\,.$$

a. Utemeljite, da je

$$\mathcal{E}(X)_t = 1 + \int_0^t \mathcal{E}(X)_s dX_s\,.$$

b. Utemeljite, da je

$$\langle \mathcal{E}(X), Z - W\rangle_t = \langle H, X\rangle_t\,.$$

c. Pokažite, da je

$$\int_0^t Y_s dX_s = Y_t - H_t\,.$$

Namig: Uporabite prvo točko in formulo za integracijo per partes.

79. Procesa X in Y sta definirana kot rešitvi sistema linearnih stohastičnih diferencialnih enačb

$$\begin{aligned} dX_t &= -Y_t dt + dW_t^1 \\ dY_t &= X_t dt + dW_t^2 \\ X_0 &= x_0 \\ Y_0 &= y_0, \end{aligned}$$

kjer sta W^1 in W^2 neodvisni standardni Brownovi gibanji.

a. Za $t \geq 0$ izračunajte $\mathrm{var}(X_t)$, $\mathrm{var}(Y_t)$ in $\mathrm{cov}(X_t, Y_t)$, ob predpostavki, da rešitev (X, Y) obstaja.

b. Eksplicitno izračunajte rešitvi $X = (X_t)_{t \geq 0}$ in $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$.

c. Določite porazdelitvi X_t in Y_t ter izračunajte $\mathrm{cov}(X_t, X_s)$ (za $0 \leq s < t$).

80. Naj bo dan $n \times n$ sistem stohastičnih diferencialnih enačb

$$dX_t^{(i)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t) X_t^{(k)} dt + dW_t^{(k)}\,,$$

kjer je $i = 1, 2, \ldots, n$ in so $a_{ik}(t)$ zvezne funkcije za $t \geq 0$ ter je $X_0^{(i)} = x_i$. Privzemamo, da so $W^{(1)}, \ldots, W^{(n)}$ neodvisna Brownova gibanja. Definirajmo matriko

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Naj bo $\mathbf{Y}$ fundamentalna rešitev sistema linearnih diferencialnih enačb

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y}\,,$$

za katero je $\mathbf{Y}(0) = \mathbf{I}$. Označimo

$$\mathbf{C}(t) = \mathbf{Y}^{-1}(t)\,.$$

a. Pokažite, da je

$$-\left(\mathbf{CA}\right)_{ik} = \dot{c}_{ik}\,.$$

za vse pare i, k.

Namig: če ne gre drugače, lahko privzamete, da je

$$\dot{\mathbf{Y}}^{-1} = -\mathbf{C}\dot{\mathbf{Y}}\mathbf{C}\,.$$

Poskusite zgornje dokazati.

b. Pokažite, da je

$$d\left(\sum_{k=1}^{n} c_{ik} X_t^{(k)}\right) = \sum_{k=1}^{n} c_{ik}\, dW_t^{(k)}\,.$$

c. Izrazite rešitev sistema diferencialnih enačb z ustreznimi integrali.

d. Navedite porazdelitev vektorja $\left(X_t^{(1)}, \ldots, X_t^{(n)}\right)$.

81. Odgovorite na spodnji vprašanji in odgovora utemeljite.

a. Ali obstaja neničelna zvezno odvedljiva funkcija g, da bo proces

$$(g(t) W_t^2)_{t \geq 0}$$

lokalni martingal?

b. Kakšna mora biti funkcija f, da bo obstajal tak g, da je proces

$$(g(t) f(W_t))_{t \geq 0}$$

lokalni martingal? Privzemite, da je f dvakrat zvezno odvedljiva.

82. Najdite ustrezne H_t, da bo veljalo:

a.
$$B_T^3 = \int_0^T H_t dB_t \,.$$

b.
$$\int_0^T B_t^3 dt = \int_0^T H_t dB_t \,.$$

83. Naj bo $0 \leq t \leq T$ in B standardno Brownovo gibanje. Definirajte
$$X_t = e^{-\lambda \int_0^t f(B_s)ds}$$
za zvezno in omejeno funkcijo $f(x)$.

a. Utemeljite, da je
$$E\left(X_T|\mathcal{F}_t\right) = X_t F(B_t, t)\,,$$
kjer je
$$F(x,t) = E\left[e^{-\lambda \int_0^{T-t} f(x+B_u)du}\right]\,.$$

b. Privzemite, da je $F(x,t)$ dvakrat zvezno odvedljiva v x. Pokažite, da velja
$$X_T = E(X_T) + \int_0^T X_s \frac{\partial F}{\partial x}(B_s, s) dB_s \,.$$

84. Naj bosta X in Y omejeni slučajni spremenljivki z $E(X) = E(Y) = 0$. Predpostavite, da je B standardno Brownovo gibanje in označite z $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ njegovo naravno filtracijo. Predpostavite, da sta X in Y obe $\mathcal{F}_T$ merljivi. Naj bo
$$X = \int_0^T H_s dB_s \quad \text{in} \quad Y = \int_0^T K_s dB_s$$
za progresivno merljiva integranda H in K z $E(\int_0^T H_s^2 ds) < \infty$ in $E(\int_0^T K_s^2 ds) < \infty$.

a. Naj bosta $U_t = E(X|\mathcal{F}_t)$ in $V_t = E(Y|\mathcal{F}_t)$ progresivno merljivi verziji pogojnih pričakovanih vrednosti. Privzemite, da je
$$\int_0^T H_s K_s ds = 0\,.$$
Pokažite, da je
$$\int_0^T \left(K_s U_s + H_s V_s\right) dB_s = X_T Y_T \,.$$

b. Izračunajte
$$d\left(e^{\frac{\lambda^2 t}{2}} \sin(\lambda B_t)\right) \text{ in } d\left(e^{\frac{\lambda^2 t}{2}} \cos(\lambda B_t)\right)\,.$$

c. Utemeljite, da je za $0 \leq s < t \leq T$ in poljuben $\lambda \in \mathbb{R}$
$$\begin{aligned} \sin\left(\lambda(B_t - B_s)\right) &= \\ &= \int_s^t \lambda \cos(\lambda(B_u - B_s)) e^{-\frac{\lambda^2(t-u)}{2}} dB_u \\ &= \int_0^T 1_{[s,t]}(u) \lambda \cos(\lambda(B_u - B_s)) e^{-\frac{\lambda^2(t-u)}{2}} dB_u \,. \end{aligned}$$

d. Naj bo $0 \leq t \leq T$, $\{\lambda, \mu\} \subset \mathbb{R}$. Eksplicitno najdite integrand R_s, da bo

$$\sin(\lambda B_t)\sin(\mu(B_T - B_t)) = \int_0^T R_s dB_s\,.$$

85. Naj bo $(B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje in $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ njegova naravna filtracija. Namen naloge je pokazati, da ima vsak lokalni martingal, prilagojen filtraciji $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, zvezno verzijo. Kot znano privzemite, da ima vsak submartingal desno zvezno verzijo.

a. Utemeljite, da je dovolj dokazati trditev za martingale.

b. Utemeljite, da je dovolj dokazati trditev za končne intervale.

c. Če je Y merljiva glede na $\mathcal{F}_T$ in $E|Y| < \infty$, je $M_t = E(Y|\mathcal{F}_t)$ martingal. Naj bo $Y = f(B_T)$ za omejeno zvezno funkcijo f. Pokažite, da ima M zvezno verzijo na $[0, T]$.

d. Naj bo $t_1 < t_2 \leq T$ in naj bosta f_1, f_2 omejeni zvezni funkciji. Naj bo

$$Y = f_1(B_{t_1})f_2(B_{t_2})\,.$$

Pokažite, da ima M zvezno verzijo na $[0, T]$.

e. Naj bo $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leq T$ in naj bodo $f_1, \ldots, f_n$ omejene zvezne funkcije. Izberite

$$Y = \prod_{k=1}^{n} f_k(B_{t_k})\,.$$

Pokažite, da ima M zvezno verzijo na $[0, T]$.

f. Kot znano privzemite, da za vsak $\epsilon > 0$ in vsako $\mathcal{F}_T$ merljivo slučajno spremenljivko Y z $E|Y| < \infty$ obstaja spremenljivka tipa

$$Y^\epsilon = \prod_{k=1}^{n} f_k(B_{t_k})\,,$$

da velja $E|Y^\epsilon - Y| < \epsilon$. Po Jensenovi neenačbi je

$$|E(Y^\epsilon|\mathcal{F}_t) - E(Y|\mathcal{F}_t)| \leq E\left(|Y^\epsilon - Y||\mathcal{F}_t\right)\,.$$

Definirajte

$$Z_t = E\left(|Y^\epsilon - Y||\mathcal{F}_t\right)\,.$$

Za vsak števno gosto množico D v $[0, T]$ nam maksimalna neenakost pove, da je za $\lambda > 0$

$$\lambda P\left(\sup_{t\in D} Z_t > \lambda\right) < E(Y_T) = E\left(|Y^\epsilon - Y|\right) < \epsilon\,.$$

Sklepajte, da obstaja zaporedje $a_k \downarrow 0$, da za $t \in D$ zaporedje $E(Y^{a_k}|\mathcal{F}_t)$ konvergira enakomerno na $[0, T]$ skoraj gotovo.

g. Sklepajte, da ima $E(Y|\mathcal{F}_t)$ zvezno verzijo na $[0, T]$.

86. Naj bosta W^1 in W^2 Brownovi gibanji z $\langle W^1, W^2\rangle_t = \rho t$ za nek $\rho \in (-1, 1)$ glede na filtracijo $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Na $\mathcal{F}_T$ zamenjamo mero P z mero Q s predpisom

$$Q(A) = E_P\left[1_A \exp\left(aW_T^1 + bW_T^2 - \frac{T}{2}(a^2 + 2ab\rho + b^2)\right)\right]\,.$$

a. Preverite, da je Q verjetnostna mera na $\mathcal{F}_T$.

b. Kakšna procesa sta W^1 in W^2 pod to novo mero za $0 \leq t \leq T$?

87. Naj bo W standardno Brownovo gibanje na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ opremljenem s filtracijo $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$.

a. Preverite, da je
$$D_t = \exp\left(-\frac{r}{2}\left(W_t^2 - t\right) - \frac{r^2}{2}\int_0^t W_t^2 dt\right)$$
martingal za vsak $r > 0$.

b. Za fiksen $T > 0$ definirajte na $\mathcal{F}_T$ s predpisom
$$Q(A) = E_P\left(D_T \cdot 1_A\right) .$$
Utemeljite, da je s tem definirana nova verjetnostna mera.

c. Označite $L_t = -\frac{r}{2}\left(W_t^2 - t\right)$. Pokažite, da je pod mero Q proces
$$\tilde{W}_t = W_t - \langle W, L\rangle_t = W_t + r\int_0^t W_s ds$$
Brownovo gibanje.

d. Kakšni stohastični diferencialni enačbi ustreza W pod Q na intervalu $[0, T]$? Lahko to stohastično enačbo eksplicitno rešite?

e. Uporabite rezultat iz b. za izračun pričakovane vrednosti
$$E_P\left[\exp\left(-aW_T^2 - \frac{b^2}{2}\int_0^T W_s^2 ds\right)\right]$$
za $a, b > 0$.

88. Naj bosta $\alpha, \beta \geq 0$. Nenegativna zvezna prilagojena procesa X in Y ustrezata stohastičnima diferencialnima enačbama
$$X_t = x + 2\int_0^t \sqrt{X_s} dB_s + \alpha t \quad \text{in} \quad Y_t = y + 2\int_0^t \sqrt{Y_s} dD_s + \beta t\,,$$
kjer sta B in D neodvisni Brownovi gibanji. Privzemite, da imata enačbi enolično določeni krepki rešitvi. Naj bo še E tretje Brownovo gibanje neodvisno od B in D. Označite
$$W_t = \int_0^t 1(X_s + Y_s > 0)\frac{\sqrt{X_s}dB_s + \sqrt{Y_s}dD_s}{\sqrt{X_s + Y_s}} + \int_0^t 1(X_s + Y_s = 0)dE_s\,.$$

a. Pokažite, da je
$$X_t + Y_t = x + y + 2\int_0^t \sqrt{X_s + Y_s}dW_s + (\alpha + \beta)t\,.$$

b. Utemeljite, da je W Brownovo gibanje.

c. Označite za fiksen $t > 0$ in $\lambda \geq 0$
$$\phi(x, \alpha) = E\left(e^{-\lambda X_t}\right) .$$
Utemeljite, da je
$$\phi(x + y, \alpha + \beta) = \phi(x, \alpha)\phi(y, \beta)\,.$$
Namig: ker sta X in Y krepki rešitvi in sta B in D neodvisna, sta neodvisna tudi X in Y.

c. Kakšni stohastični diferencialni enačbi ustreza proces $Z_t = (\sqrt{x} + B_t)^2$? Lahko iz tega izpeljete $\phi(x, 1)$?

d. Pomislite, kaj sta rešitvi zgornjih enačb v primerih, ko je ali $x = 0$ ali $\alpha = 0$.

e. Izrazite $\phi(x, 1)$ in potem še $\phi(x, \alpha)$.

89. Naj bosta $B^{(1)}$ in $B^{(2)}$) Brownovi gibanji, za kateri velja $\langle B^{(1)}, B^{(2)}\rangle_t = \int_0^t \rho(u)du$ za zvezno funkcijo ρ z vrednostmi na $(-1, 1)$.

    a. Pokažite, da obstajata Brownovi gibanji W^1 in W^2, da velja

$$W_t^{(1)} = B_t^{(1)} \quad \text{in} \quad B_t^{(2)} = \int_0^t \rho(u)dW_u^{(1)} + \int_0^t \sqrt{1-\rho^2(u)}dW_u^{(2)} .$$

    b. Izračunajte $\langle W^{(1)}, W^{(2)}\rangle$.

    c. Dokažite, da sta $W^{(1)}$ in $W^{(2)}$ neodvisna procesa.

90. Dana naj bo stohastična diferencialna enačba

$$dX_t = \sqrt{1 + X_t^2}dW_t + \frac{1}{2}X_t dt$$

z začetnim pogojem $X_0 = x_0$.

    a. Utemeljite, da ima enačba enolično določeno zvezno krepko rešitev.

    b. Privzemite, da je rešitev oblike $X_t = \phi(W_t)$ za dvakrat zvezno odvedljivo funkcijo ϕ. Najdite rešitev stohastične diferencialne enačbe. Preverite, da je res rešitev.

    c. Izračunajte $E(X_t)$, $E(X_t^2)$ in $\mathrm{cov}(X_s, X_t)$.

91. Dana naj bo stohastična diferencialna enačba

$$dX_t = \left(\sqrt{1 + X_t^2} + \frac{1}{2}X_t\right) dt + \sqrt{1 + X_t^2}dW_t$$

z začetnim pogojem $X_0 = x_0$.

    a. Utemeljite, da ima enačba enolično določeno krepko rešitev.

    b. Najdite rešitev eksplicitno.

    c. Izračunajte $\mathrm{var}(X_t)$.

92. Dani naj bosta števili δ in μ. Naj bo $B_t^{(\mu)} = B_t + \mu t$ Brownovo gibanje s trendom. Definirajte

$$X_t = \int_0^t \exp\left(\delta\left(B_t^{(\mu)} - B_s^{(\mu)}\right) - \frac{\delta^2}{2}(t-s)\right) ds .$$

Pokažite, da velja

$$X_t = \int_0^t (1 + \delta\mu X_s)\, ds + \delta \int_0^t X_s dB_s .$$

93. Naj bosta W^1 in W^2 Brownovi gibanji glede na filtracijo $(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$. Dokažite, da sta v primeru ko je $\langle W^1, W^2\rangle = 0$ Brownovi gibanji med sabo neodvisni.

Namig: uporabite izrek o martingalski reprezentaciji.

94. Privzemite, da je pogojna terjatev dana z $V_T = (S_T - k)_+$, pri čemer kot model za gibanje cen temelja izberemo Black-Sholesov model. Privzamemo, da bo obrestna mera za $0 \le t \le T_1 \le T$ enaka r_1, za $T_1 \le t \le T$ pa r_2. Opcija je torej evropska nakupna opcija, le da se obrestna mera v vmesnem času T_1 spremeni.

Za evropsko nakupno opcijo s konstantno obrestno mero r in izvršno ceno k velja

$$V_t = F(S_t, t, r)\,,$$

kjer je

$$F(x, t, r) = x\Phi(d_1) - ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2)\,,$$

pri čemer sta d_1 in d_2 definirani z

$$d_1 = \frac{\log(x/k) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

in

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}\,.$$

a. Navedite V_{T_1} v odvisnosti od S_{T_1} s pomočjo funkcije $F(x, t, r)$.

b. Navedite komponenti varovalnega portfelja v času T_1.

c. Utemeljite, da je

$$V_0 = e^{-r_1 T_1}\, E_Q\left[F\left(S_0 e^{r_1 T_1 + \sigma W_{T_1} - \sigma^2 T_1/2}, T - T_1, r_2\right)\right]\,,$$

kjer je W Brownovo gibanje glede na Q.

d. Utemeljite, da je

$$V_0 = e^{-r_1 T_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F\left(S_0 e^{r_1 T_1 + \sigma\sqrt{T_1} z - \frac{\sigma^2}{2} T_1}, T - T_1, r_2\right) e^{-z^2/2} dz\,.$$

Integrala vam ni treba izračunati.

95. Naj bo $\{\mu, r, q\} \subset \mathbb{R}$, $\{s_0, \sigma\} \subset (0, \infty)$, $\{K, T\} \in [0, \infty)$, $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty)}, P)$ filtriran verjetnostni prostor (ki zadošča običajnim pogojem). Trgujemo lahko: z delnico, katere (zvezni prilagojen) cenovni proces S zadošča SDE $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t)$, $S_0 = s_0$, za Brownovo gibanje B (pod "fizično" mero P, glede na $\mathcal{F}$), in katere začetna cena je s_0; in z denarnim računom, ki ima zvezno obrestovanje z obrestno mero r. Delnica izplačuje dividende v zveznem času po stopnji q: če z D_t označimo vse dividende prejete (iz naslova ene delnice) do časa t, potem je $D = (D_t)_{t\in[0,\infty)}$ zvezen, prilagojen proces, in $dD_t = qS_t dt$, $D_0 = 0$. V samofinancirajočem portfelju naj bo ϕ (lokalno omejen, progresivno merljiv proces) število delnic, V naj bo njegov vrednostni proces, $\tilde{V} = (e^{-rt}V_t)_{t\in[0,\infty)}$.

a. Izpelji SDE, ki ji zadošča proces V. Izpelji še SDE, ki ji zadošča proces $\tilde{V}$. Ne pozabi na dividende!

b. Določi mero Q pod katero bo $\tilde{V}$ martingal na $[0, T]$ (če je le ϕ omejena na $[0, T]$)?

c. Če je X $\mathcal{F}_T$-merljiva pogojna terjatev, ki jo lahko repliciramo v smislu, da je $X = V_T$ P-s.g. in da je $\tilde{V}$ Q-martingal na $[0, T]$, koliko znaša cena te pogojne terjatve ob času 0 pod pogojem, da ni arbitraže?

d. Pod pogojem odsotnosti arbitraže določi ceno, ob času 0, finančnega instrumenta, ki ob času T dostavi eno enoto delnice. Kakšen je v tem primeru varovalni portfelj?

e. Koliko je, spet pod pogojem odsotnosti arbitraže, cena, ob času 0, nakupne opcije na delnico z izvršilno ceno K in zapadlostjo T?

96. Predpostavite Black-Sholesov model S_t in za $0 \le t \le T$ definirajte proces

$$A_t = \int_0^t S_u du\,.$$

Azijska opcija je definirana s pogojno terjatvijo

$$V_T = \left(\frac{1}{T}A_T - k\right)_+$$

za neko izvršno ceno k.

a. Utemeljite, da je
$$V_t = F(S_t, A_t, t)$$
za neko funkcijo $F(s, a, t)$.

b. Privzemite, da je $F(s, a, t)$ dovolj gladka, da lahko uporabite Itôvo formulo. Pokažite, da je
$$\frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} + rs\,\frac{\partial F}{\partial s} + s\,\frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial T} - rF = 0\,.$$
Kaj je $F(s, a, T)$?

c. Privzemite, da poznate funkcijo F. Kako bi sestavili varovalni portfelj?

97. Naj bosta $B^{(1)}$ in $B^{(2)}$ standardni Brownovi gibanji glede na filtracijo $(\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}$. Predpostavite, da je $\langle B^{(1)}, B^{(2)}\rangle_t = \rho t$ za nek $\rho \in (-1, 1)$. Naj bo

$$S_t^{(1)} = S_0^{(1)} \exp\left(\mu_1 t + \sigma_1 B_t^{(1)} - \frac{\sigma_1^2}{2} t\right) \quad \text{in} \quad S_t^{(2)} = S_0^{(2)} \exp\left(\mu_2 t + \sigma_2 B_t^{(2)} - \frac{\sigma_2^2}{2} t\right)$$

za $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma_1, \sigma_2 > 0$, ter $S_0^{(1)}, S_0^{(2)} > 0$. Vrednost opcije v trenutku T je definirana kot

$$V_T = \left(\frac{S_T^{(1)}}{S_T^{(2)}} - 1\right)_+ .$$

Privzemite, da je obrestna mera na bančni račun konstantna in enaka $r \in [0, \infty)$.

a. Pokažite, da je proces
$$Y_t = \exp\left(\sigma_1 B_t^{(1)} - \sigma_2 B_t^{(2)} - \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2)t\right)$$
lokalni martingal.

b. Označite za $0 \le t \le T$
$$R_t = \frac{S_t^{(1)}}{S_t^{(2)}}$$
Kako bi vpeljali novo mero Q, da bi bil proces $e^{-rt}R_t$ pod Q martingal?

c. Privzemite, da je možno zgoraj opisano opcijo replicirati. Zapišite njeno ceno V_0 v trenutku $t = 0$.

d. Privzetek pri vrednotenju je, da lahko v vsakem trenutku kupimo poljubno količino temelja R_t, na katerega se nanaša izvedeni vrednostni papir. Pokažite, da je

$$\tilde{V}_T = V_0 + \int_0^T H_s \left(\sigma_1 dB_s^{(1)} - \sigma_2 dB_s^{(2)}\right) + \int_0^T G_s ds$$

za ustrezna integranda H in G (kjer je $\tilde{V}_t = e^{-rt} E_Q \left(e^{-r(T-t)} V_T | \mathcal{F}_t\right)$). Komentirajte zakaj to pomeni, da lahko opcijo repliciramo s trgovanjem z obema temeljema, ter bančnim računom.

98. Naj bo S cena delnice v Black-Scholesovem modelu z obrestno mero r in volatilnostjo $\sigma > 0$. Fiksirajmo zapadlost $T \in (0, \infty)$ in označimo s Q martingalsko mero za interval $[0, T]$, tako da je pod Q na $[0, T]$ diskontiran proces $\tilde{S}$ martingal, W pa Brownovo gibanje. Začetna cena delnice je $S_0 > 0$.

Geometrijska Azijska opcija z izvršilno ceno $K \in (0, \infty)$ in zapadlostjo T izplača

$$Y = \left(S_0 \exp\left(\frac{1}{T}\int_0^T \log(e^{-rt} S_t / S_0) dt\right) - K\right)_+ .$$

ob času T. Kot znano privzemite, da je pod mero Q za $0 \leq t < T$ slučajna spremenljivka $\int_t^T (W_s - W_t) ds$ neodvisna od $\mathcal{F}_t$ in ima $\mathrm{N}\left(0, (T-t)^3/3\right)$ porazdelitev. Kot znano tudi privzemite, da je za $Z \sim \mathrm{N}(a, b^2)$ in $c > 0$

$$E\left[\left(e^Z - c\right)_+\right] = e^{a + \frac{b^2}{2}} \Phi\left(\frac{a + b^2 - \log c}{b}\right) - c\Phi\left(\frac{-\log c + a}{b}\right),$$

kjer je $\Phi(z)$ porazdelitvena funkcija standardizirano normalne porazdelitve.

a. Izračunajte začetno vrednost V_0 zgornje opcije.

b. Izračunajte vrednostni proces $V = (V_t)_{t \in [0,T]}$ zgornje opcije.

c. Kako bi s samo-financirajočim trgovanjem v delnici in denarnem računu replicirali vrednostni proces V? Ni potrebno navesti eksplicitnih formul za poziciji v denarnem računu in delnici, opišite pa kako bi do njih prišli.

99. Naj bo $\{\mu, r_d, r_f\} \subset \mathbb{R}$, $\{d_0, \sigma\} \subset (0, \infty)$ in B standardno Brownovo gibanje na filtriranem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$. Devizni tečaj EURUSD modeliramo kot zvezen strogo pozitiven prilagojen proces D, ki zadošča SDE

$$dD_t = D_t(\mu dt + \sigma dB_t), \quad D_0 = d_0$$

(Garman-Kohlhagenov model). Enota za D je \$/€, tj. za N/€ evrov dobimo ob času $t \in [0, \infty)$, $D_t N$/\$ dolarjev (23.4.2017 je npr. tečaj EUR/USD znašal 1.0725 \$/€, in na ta dan smo tako za 1 € dobili 1.0725 \$). Na voljo imamo evrski bančni račun, denominiran v evrih, ki je obrestovan z zvezno obrestno mero r_d, ter dolarski bančni račun, denominiran v dolarjih, ki je obrestovan z zvezno obrestno mero r_f. Valuti evro in dolar lahko prosto menjamo po trenutnem tečaju D.

a. Razložite zakaj je trgovanje v kombinaciji evrskega in dolarskega bančnega računa, *z vidika evrskega investitorja*, ekvivalentno trgovanju v kombinaciji evrskega bančnega računa in "delnice", katere cenovni proces je $S_t := s_0 d_0 e^{r_f t} / D_t$ za neko (arbitrarno) začetno evrsko vrednost $s_0 \in (0, \infty)$.

b. Izrazite eksplicitno (z s_0, μ, σ, r_f, B) proces S iz točke a. Kateri znan model trga je dan s kombinacijo evrskega bančnega računa in "delnice" S?

c. Naj bo $\{N, G, T\} \subset (0, \infty)$. Na trgu, ki sestoji iz evrskega in dolarskega bančnega računa, določite začetno brez-arbitražno evrsko vrednost pogodbe, ki njenemu imetniku daje pravico, ne pa obveznost, da ob času T zamenja dolarski znesek N v evrsko protivrednost po EUR/USD tečaju G.

100. Privzemite Black-Sholesov model $(S_t \colon 0 \le t \le T)$. Povratna opcija z drsečo izvršno ceno je definirana kot

$$V_T = \max_{0 \le t \le T} S_t - S_T \,.$$

a. Izračunajte ceno opcije v trenutku $t = 0$.

b. Izračunajte V_t in sklepajte, da je

$$V_t = F(S_t, Y_t, t)$$

za neko funkcijo $F(s, y, t)$, kjer je $Y_t = \max_{0 \le u \le t} S_u$.

c. Pokažite, da velja

$$\frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \,\frac{\partial^2 F}{\partial s^2} + rs \,\frac{\partial F}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial t} - rF = 0 \,.$$

d. Preverite, da funkcija F iz točke b. ustreza parcialni diferencialni enačbi iz točke c.

e. Sestavite varovalni portfelj za dano opcijo.

101. Privzemite Black-Sholesov model $(S_t \colon 0 \le t \le T)$. Ragljasta opcija je pogojna terjatev, ki v načelu deluje kot Evropska nakupna opcija, le da se v določenih trenutkih izvršna cena ponastavi na drug nivo. Privzemite, da je $0 \le T_1 \le T$ in je izvršna cena opcije v trenutku $t = 0$ enaka k. Definicija ragljaste opcije v tem primeru je

$$V_T = \begin{cases} (S_T - k)_+ & \text{če je } S_{T_1} \le k \\ (S_T - S_{T_1})_+ & \text{če je } S_{T_1} > k. \end{cases}$$

a. Zapišite vrednost opcije v trenutku T_1.

b. Poiščite ceno opcije v trenutku $t = 0$.

c. Zapišite komponenti varovalnega portfelja v času med T_1 in T.

d. Zapišite komponenti varovalnega portfelja v času $0 \le t \le T_1$.

102. Privzemite Black-Sholesov model $(S_t \colon 0 \le t \le T)$. Barierna opcija je pogojna terjatev, ki v načelu deluje kot Evropska nakupna opcija, le da postane brez vrednosti, če cena temelja preseže nivo b pred časom T. Definicija je

$$V_T = \begin{cases} (S_T - k)_+ & \text{če je } \max_{0 \le t \le T} S_t < b \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Definirana opcija ima smisel le, če je $k < b$, kar predpostavimo.

a. Poiščite ceno opcije v trenutku $t = 0$.

b. Izračunajte V_t in sklepajte, da je

$$V_t = F(S_t, t)$$

za neko funkcijo $F(s, t)$, dokler je $\max_{0 \le u \le t} S_u < b$.

c. Pokažite, da za $0 < s < b$ velja

$$\frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \,\frac{\partial^2 F}{\partial s^2} + rs \,\frac{\partial F}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial t} - rF = 0 \,.$$

c. Zapišite komponenti varovalnega portfelja.

103. Privzemite Black-Sholesov model s privzetkom, da obrestna mera na intervalu $0 \leq t \leq T$ ni konstantna, temveč je funkcija časa $r(t)$. Diskontirana vrednost temelja je tako

$$\tilde{S}_t = e^{-\int_0^t r(s)ds} \cdot S_t \,.$$

a. Izračunajte vrednost V_t evropske nakupne opcije z izvršilno ceno k v tem primeru.

b. Izračunajte varovalni portfelj v tem primeru.

104. Privzemite Black-Sholesov model s privzetkom, da volatilnost na intervalu $0 \leq t \leq T$ ni konstantna, temveč je funkcija časa $\sigma(t)$. To pomeni, da je model za gibanje cene temelja opisan s stohastično diferencialno enačbo

$$dS_t = S_t \left(\mu\, dt + \sigma(t) dB_t\right).$$

a. Izračunajte vrednost V_t evropske nakupne opcije z izvršilno ceno k v tem primeru.

b. Izračunajte varovalni portfelj v tem primeru.

105. Consider a Black-Scholes world where the interest rate is the constant r and where there are two stocks with prices S_t^A and S_t^B that satisfy the SDEs

$$dS_t^A = S_t^A \left(\mu^A dt + \sigma^A dB_t\right) \quad \text{and} \quad dS_t^B = S_t^B \left(\mu^B dt + \sigma^B d\tilde{B}_t\right).$$

where the two Brownian motions are independent. Think of yourself as the owner of one A share. Some guy proposes to write you an option that will give you the right, but not the obligation, to exchange your one A for one B share at time T. What is the time t arbitrage free price of this option. You should work this out as completely as you can. In particular, you should get a formula that looks like the Black-Scholes formula. Explain how you would replicate such na option.

106. Digitalna opcija je definirana z izplačilom

$$V_T = 1\left(\max_{0\leq t\leq T} S_t \geq K\right)$$

za nek prag K. Privzemite Black-Scholesov model in konstantno obrestno mero r.

a. Izračunajte V_t.

b. Privzemite, da za nek t velja $S_t \geq K$. Brez računanja pojasnite, kakšna bi morali biti komponenti varovalnega portfelja.

c. Navedite varovalni portfelj za to opcijo. Bodite natančni pri privzetkih o gladkosti.

107. Sanje vsakega traderja so, da kupi delnico poceni, proda pa jo drago. Zamislite si opcijo z izplačilom

$$V_T = \max_{0\leq t\leq T} S_t - \min_{0\leq t\leq T} S_t \,,$$

ki bi replicirala maksimalni možni dobiček. Privzemite Black-Scholesov model.

a. Izračunajte V_t za vsak $0 \leq t \leq T$.

b. Navedite komponenti varovalnega portfelja.