Fakulteta te matematichne uchenosti

Financhna matematika 2

Ta napisana Koronska predavanja

Na svitlobo dal tiga lejta Gospudovega 2020,
v katherem smu pod veliko preishkushno bli
Michaelus Permanus

1. Predhodna sredstva

1.1. Riemann-Stieltjesov integral

(Thomas J. Stieltjes 1856 – 1894, nizozemski matematik)

Definicija Riemannovega integrala omejene funkcije $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ se začne z definicijo vsot

$$S(f,\pi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}),$$

kjer je π particija intervala $[a,b]$, torej nabor točk $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$.

Stieltjes je definicijo posplošil tako, da razliko $x_k - x_{k-1}$ nadomestimo z $\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})$, kjer je $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ omejena funkcija. Definiramo Riemann-Stieltjesove vsote

$$S(f,\alpha,\pi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})),$$

kjer je $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

<u>Definicija</u>: Funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je Riemannovo integrabilna glede na α, če obstaja število A, tako da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja particija π_ε tako da za vsako

finejšo particijo π velja

$$|S(f,\alpha,\pi) - A| < \varepsilon.$$

za katerikoli izbor točk $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

Pisali bomo, da je $f \in \mathcal{R}(\alpha)$.

Oglejmo si primer, ko tak integral obstaja.

Naj bo α naraščajoča na $[a,b]$ in

f zvezna ≥ 0. Vzemimo $x_k = a + \frac{(b-a)k}{2^n}$, $k = 0, \ldots, 2^n$.

Pri danem $\varepsilon > 0$ lahko najdemo

dovolj velik n, da je $|f(x_k) - f(\xi_k)| < \varepsilon$

za vsak $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Označimo

$M = \alpha(b) - \alpha(a) < \infty$. Vsote

$$\sum_{k=1}^{2^n} f(x_{k-1})(\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1}))$$

se od vsot $\sum_{k=1}^{2^n} f(\xi_k)(\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1}))$

razlikujejo za največ $\varepsilon \cdot M$.

Definirajmo

$$A = \sup_{n \geq 1} \sum_{k=1}^{2^n} f(x_{k-1})(\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1}))$$

Ker so vse vsote omejene, tak $A < \infty$

obstaja.

Če je $|f(\xi_k) - f(x_k)| < \varepsilon$ za vsak $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ v neki particiji π in je π' finejša particija, je

$$|S(f,\alpha,\pi') - S(f,\alpha,\pi)|$$

$$\le \varepsilon \cdot M$$

Torej lahko v definiciji vzamemo A in π za dovolj velik n.

~~Konec~~

Izrek 1.2: Naj bo $f \in R(\alpha)$ na $[a,b]$. Potem je $\alpha \in R(f)$ in velja

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha + \int_a^b \alpha(x)\,df = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a).$$

Dokaz: Po definiciji za $\varepsilon > 0$ obstaja particija π_ε, da velja za finejšo π

$$|S(f,\alpha,\pi_\varepsilon') - \int_a^b f(x)\,d\alpha| < \varepsilon.$$

Zapišemo

$$\cancel{f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\alpha(x_k) - \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\alpha(x_{k-1})}$$

$$S(f,\alpha,\pi) = \cancel{\sum_{k=1}^{n} f}$$

Osnovne lastnosti Riemann-Stieltjesovega integrala poznamo v

<u>Izrek 1.1</u>: Naj bosta $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ omejeni in $\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ omejeni.

(i) Če sta $f, g \in \mathcal{R}(\alpha)$, je $c_1 f + c_2 g \in \mathcal{R}(\alpha)$ in velja

$$\int_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x))\, d\alpha = c_1 \int_a^b f(x)\, d\alpha + c_2 \int_a^b g(x)\, d\alpha$$

(ii) Če je $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ in $f \in \mathcal{R}(\beta)$, je $f \in \mathcal{R}(c_1\alpha + c_2\beta)$ in velja

$$\int_a^b f(x)\, d(c_1\alpha + c_2\beta) = c_1 \int_a^b f(x)\, d\alpha + c_2 \int_a^b g(x)\, d\alpha.$$

(iii) Če je $a < c < b$, ~~je~~ ~~za~~ ~~je~~ je

$$\int_a^c f(x)\, d\alpha + \int_c^b f(x)\, d\alpha = \int_a^b f(x)\, d\alpha.$$

Če obstaja integral na desni, obstajata tudi integrala na levi

<u>Dokaz</u>: Rutinski ε argumenti.

Zapišemo

$$
\begin{aligned}
S(\pi, \alpha, f) &= \sum_{k=1}^{n} \alpha(\xi_k)\left(f(x_k) - f(x_{k-1})\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \alpha(\xi_k) f(x_k) - \sum_{k=1}^{n} \alpha(\xi_k) f(x_{k-1})
\end{aligned}
$$

Odštejemo

$$
\begin{aligned}
&f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - S(\pi, \alpha, f) \\
&= \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\left(\alpha(x_k) - \alpha(\xi_k)\right) \\
&\qquad + \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\left(\alpha(\xi_k) - \alpha(x_{k-1})\right)
\end{aligned}
$$

Vsota na desni je po finejši particiji od π, zato se od $\int_a^b f(x)\, d\alpha$ razlikuje za manj kot ε.

Torej je

$$
\left| f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - S(\pi, \alpha, f) - \int_a^b f(x)\, d\alpha \right| < \varepsilon .
$$

Izrek sledi.

<u>Izrek 1.3</u>: Če je α zvezna in na (a,b) obstaja α', ki se da zvezno razširiti na $[a,b]$, potem je $f\alpha' \in \mathcal{R}(\alpha)$ (Riemann-integrabilna), potem obstaja integral (v Riemannovem smislu) $\int_a^b f(x)\alpha'(x)\, dx$ in velja

$$
\int_a^b f(x)\, d\alpha = \int_a^b f(x) \cdot \alpha'(x)\, dx
$$

Dokaz: Vaja.

Dokaz: Naj bo π particija $[a,b]$.

Za poljubne $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ sestavimo Riemannovo vsoto

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\alpha'(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1}).$$

Po predpostavki obstajajo $\eta_k \in (x_{k-1}, x_k)$, da je

$$\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1}) = \alpha'(\eta_k)(x_k - x_{k-1}),$$

torej je

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\left(\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})\right) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\alpha'(\eta_k)(x_k - x_{k-1})$$

Razlika je oblike

$$D = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\left[\alpha'(\xi_k) - \alpha'(\eta_k)\right](x_k - x_{k-1}).$$

Naj bo $|f(x)| \leq M$ na $[a,b]$. Zaradi enakomerne zveznosti lahko za vsak $\varepsilon > 0$ najdemo $\delta > 0$, da iz $|x-y| < \delta$ sledi $|\alpha'(x) - \alpha'(y)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2M(b-a)}$

či je $|\pi| < \delta$, je $|\alpha'(\xi_k) - \alpha'(\eta_k)| < \dfrac{\varepsilon}{2M(b-a)}$

in zato

$$|D| \leq M \cdot \frac{\varepsilon}{2M(b-a)} \cdot (b-a) = \varepsilon/2$$

Po predpostavki za dan $\varepsilon > 0$ obstaja tudi $\delta' > 0$, da je

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\alpha'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) - \int_a^b f(x)\,\alpha'(x)\,dx \right| < \varepsilon/2$$

če je $|\pi| < \delta'$. Če vzamemo $|\pi| < \min(\delta, \delta')$, je

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})) - \int_a^b f(x)\,\alpha'(x)\,dx \right| < \varepsilon.$$

<u>Izrek 1.4</u>: Naj bo $f(x)$ omejena na $[a,b]$ in predpostavljamo $f \in R(\alpha)$. Naj bo $g(x)$ strogo naraščajoča ~~f~~ zvezna na $[c,d]$, $g(c) = a$ in $g(d) = b$. Naj bo $\beta(x) = \alpha(g(x))$. Velja ~~ffffff~~ $f \circ g \in R(\beta)$ in

$$\int_a^b f(u)\,d\alpha(u) = \int_c^d f(g(x))\,d\beta(x)$$

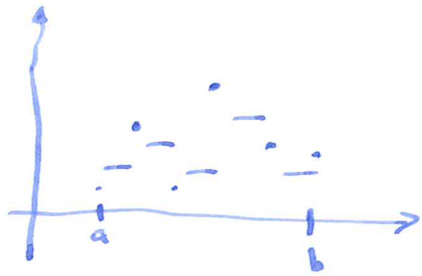
<u>Dokaz</u>: Seminarska naloga.

Posebej nas bodo zanimali primeri, ko bo f stopničasta funkcija. Vzemimo, da je α zvezna in

$$f(x) = c_k \quad \text{za} \quad x \in (x_{k-1}, x_k),$$

kjer je $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. V točkah x_k ima $f(x)$ neke vrednosti.

Slika:



Integral bo enak kar vsoti

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \left(\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})\right)$$

Dokaz: (Vaje).

Definicija: Funkcija $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ ima omejeno variacijo, če je

$$V = \sup_{\pi} \sum |\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})| < \infty$$

Vsaka omejena naraščajoča funkcija na $[a,b]$ ima omejeno variacijo.

1.2. Funkcije z omejeno totalno variacijo

Naj bo $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$.

<u>Definicija</u>: Particija π intervala $[a,b]$ je nabor točk $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ z $a = x_0$ in $b = x_n$. Interval $[x_{k-1}, x_k]$ za $k = 1, 2, \ldots, n$ imenujemo k-ti interval π. Pišemo $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

Naj bo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Želimo definirati, da f ne „oscilira" preveč.

<u>Definicija</u>: Naj bo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Funkcija f ima na $[a,b]$ omejeno totalno variacijo, če je

$$\sup_{\pi} \left\{ \sum_{k=1}^{n_\pi - 1} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \right\} < \infty .$$

Pri tem je n_π število točk v particiji π, supremum pa teče po vseh možnih particijah $[a,b]$.

Če je supremum končen, ga označimo z $V_f(a,b)$ in temu številu rečemo totalna variacija funkcije f na intervalu $[a,b]$.

Primeri:

(i) Če je f nepadajoča na $[a,b]$, je za vsako particijo π

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k)-f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} (f(x_k)-f(x_{k-1}))$$

$$= f(b)-f(a) < \infty$$

Podobno velja za nenaraščajoče funkcije.

(ii) Če ima f v vsaki točki intervala $x\in(a,b)$ odvod $f'(x)$ in je $|f'(x)| \le M$ za nek $M<\infty$ in vsak $x\in(a,b)$ ter je f na $[a,b]$ zvezna, velja

$$f(x_k)-f(x_{k-1}) = f'(\xi_k)(x_k-x_{k-1}),$$

torej je

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k)-f(x_{k-1})|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |f'(\xi_k)(x_k-x_{k-1})|$$

$$\le M\cdot \sum_{k=1}^{n} (x_k-x_{k-1})$$

$$= M\cdot(b-a) < \infty$$

Funkcija ima omejeno totalno variacijo.

(iii) Naj bo

$$f(x) = \begin{cases} x \cos\left(\frac{\pi}{2x}\right) & \text{za } x \neq 0 \\ 0 & \text{za } x = 0. \end{cases}$$

Funkcija f je na $[0,1]$ zvezna. Za particijo izberimo $\pi = \{0, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}, \dots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\}$. Pokažemo lahko, da je

$$\sum_{k=1}^{2n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

$$= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-2} + \dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \dots + 1$$

Ko $n \to \infty$, desna stran $\to \infty$.

f nima končne totalne variacije.

Izrek 1.5: Naj imata f in g na intervalu $[a,b]$ končno totalno variacijo. Potem imata končno totalno variacijo tudi vsota $f+g$, razlika $f-g$ in produkt fg.

Dokaz: Kot prvo potrebujemo, da je funkcija z omejeno totalno variacijo na $[a,b]$ omejena. Po definiciji je za particijo $\{a, x, b\}$

$$|f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leq V_f(a,b) < \infty$$

Sledi

$$|f(x)| \leq |f(a)| + V_f(a,b)$$

Dokaza za vsoto in razliko sledita po trikotniški neenačbi. Za produkt računamo za $\pi = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k)g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_{k-1})|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |f(x_k)g(x_k) - f(x_k)g(x_{k-1}) + f(x_k)g(x_{k-1}) - f(x_{k-1})g(x_{k-1})|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \{|f(x_k)||g(x_k) - g(x_{k-1})| + |g(x_{k-1})||f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

$$\leq A\, V_g(a,b) + B\, V_f(a,b),$$

kjer je $|f(x)| \leq A$ in $|g(x)| \leq B$ za vse $x \in [a,b]$.

<u>Izrek 1.6</u>: Naj ima $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ omejeno totalno variacijo na $[a,b]$. Naj bo $c \in (a,b)$. Potem ima f omejeno totalno variacijo na $[a,c]$ in $[c,b]$ in velja

$$V_f(a,c) + V_f(c,b) = V_f(a,b)$$

Dokaz: Naj bo $\pi^{(1)}$ particija $[a,c]$. Če dodamo točko b, dobimo particijo $[a,b]$ in velja

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| + |f(b) - f(c)| \leq V_f(a,b)$$

Sledi, da supremum po vseh particijah $[a,c]$ ne more biti večji od $V_f(a,b)$.

Da dokažemo aditivnost, najprej opazimo, da vsaki particiji $\pi = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ intervala $[a,b]$ lahko dodamo točko c, in s tem povečamo vsoto absolutnih vrednosti. Sledi, če prvi del particije označimo s $\pi^{(1)}$ in drugi z $\pi^{(2)}$, da je

$$\Sigma(\pi^{(1)}) + \Sigma(\pi^{(2)}) \leq V_f(a,b)$$

Če na desni vzamemo supremum po $\pi^{(1)}$ in $\pi^{(2)}$ sledi

$$V_f(a,c) + V_f(c,b) \leq V_f(a,b).$$

Za obratno neenakost vzemimo particijo $\pi = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ in ji dodajmo c (če ga še ni). Novi particiji recimo π_0.

Dokaz:

(i) Trditev sledi iz izreka 1.8.

(ii) Naj bo $x < y$

$$V(y) - V(x) - (f(y) - f(x)) \geq 0,$$

ker je $|f(y) - f(x)| \leq V(x, y) = V(y) - V(x)$

Če je α funkcija z omejeno totalno variacijo in je ~~...~~ desno zvezna, je tudi $V, V - \alpha$ desno zvezna (seminarska naloga). Obstajata meri μ in ν, tam da je

$$V(x) = \mu([a, x]) \quad \text{in} \quad V(x) - \alpha(x) = \nu([a, x]).$$

Za merljivo funkcijo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ lahko definiramo

$$\int_a^b f(x)\, d\mu(x) - \int_a^b f(x)\, d\nu(x),$$

če oba integrala obstajata in sta končna v smislu Lebesguejevega integrala.

__Definicija__: Naj bo α funkcija z omejeno totalno variacijo, ki je desno zvezna. Naj bo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ merljiva in naj meri μ in ν pripadata funkcijama $V(x)$ in $(V-\alpha)(x)$. Predpostavimo, da integrala $\int_a^b f(x)\,d\mu(x)$ in $\int_a^b f(x)\,d\nu(x)$ obstajata. Integralu

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha = \int_a^b f(x)\,d\mu(x) - \int_a^b f(x)\,d\nu(x)$$

rečemo Lebesgue-Stieltjesov integral.

Komentarji:

(i) razcep $\alpha = u - v$ ni enoličen.

Definicija: Naj bo α funkcija z omejeno totalno variacijo, ki je desno zvezna. Naj bo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ merljiva in naj meri μ in ν pripadata funkcijama $V(x)$ in $(V-\alpha)(x)$. Predpostavimo, da integrala $\int_a^b f(x)\,d\mu(x)$ in $\int_a^b f(x)\,d\nu(x)$ obstajata. Integralu

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha = \int_a^b f(x)\,d\mu(x) - \int_a^b f(x)\,d\nu(x)$$

rečemo Lebesgue-Stieltjesov integral.

Komentarji:

(i) razcep $\alpha = u - v$ ni enoličen. Integral $\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)$ pa je enolično določen. To vidimo iz dejstva, da je

$$\int_a^b \chi_{(c,d]}(x)\,d\alpha(x) = \alpha(d) - \alpha(c)$$

1.4. Konvergenca v L^2

Naj bo μ pozitivna mera na prostoru $(S, \mathcal{S})$. Naj bosta $f, g : S \to \mathbb{R}$ merljivi funkciji. Predpostavimo, da je

$$\int_S f^2(x)\, d\mu(x) < \infty \quad \text{in} \quad \int_S g^2(x)\, d\mu(x) < \infty .$$

Kot prvo opazimo, da je potem tudi

$$\int_S |f(x) g(x)|\, d\mu(x) < \infty .$$

To sledi iz opazke, da je

$$(|f(x)| - |g(x)|)^2 \geq 0 , \quad \text{torej je}$$

$$f^2(x) + g^2(x) \geq 2|f(x) g(x)| .$$

Za vsak $t \in \mathbb{R}$ velja

$$\int_S (f(x) - t g(x))^2\, d\mu(x) \geq 0 .$$

Sledi, da je

$$\int_S f^2(x)\, d\mu(x) - 2t \int_S f(x) g(x)\, d\mu(x) + t^2 \int_S g^2(x)\, d\mu(x) \geq 0 .$$

Ker neenačba velja za vsak $t \in \mathbb{R}$, mora biti diskriminanta izraza ≤ 0.

Torej velja

$$4\left(\int_S f(x)g(x)\,d\mu(x)\right)^2 - 4\left(\int_S f^2(x)\,d\mu(x)\right)\left(\int_S g^2(x)\,d\mu(x)\right) \leq 0$$

Sledi Cauchy-Schwarzova neenačba

$$\boxed{\left(\int_S f(x)g(x)\,d\mu(x)\right)^2 \leq \int_S f^2(x)\,d\mu(x) \cdot \int_S g^2(x)\,d\mu(x)}$$

Vse rečeno velja, če nadomestimo $f(x)$ z $|f(x)|$ in $g(x)$ z $|g(x)|$.

Torej je

$$\int_S |f(x)g(x)|\,d\mu(x) \leq \left(\int_S f^2(x)\,d\mu(x)\right)^{1/2} \cdot \left(\int_S g^2(x)\,d\mu(x)\right)^{1/2}$$

Iz vsega povedanega še sledi, da iz $\int_S f^2(x)\,d\mu(x) < \infty$ in $\int_S g^2(x)\,d\mu(x) < \infty$ sledi $\int_S (f(x)+g(x))^2\,d\mu(x) < \infty$.

ker zaradi velja, da iz $\int_S f^2(x)\, d\mu(x) < \infty$

sledi $\int_S (cf(x))^2\, d\mu(x) < \infty$ ugotovimo:

Funkcije $f : S \to \mathbb{R}$ z $\int_S f^2(x)\, d\mu(x) < \infty$

so vektorski prostor.

Naj bo $f_1(x), f_2(x), \dots$ zaporedje

funkcij $f_k : S \to \mathbb{R}$. in naj velja,

da za vsak ε obstaja N_ε, tako da

bo $\int_S (f_m(x) - f_n(x))^2\, d\mu(x) < \varepsilon$.

Opomba: Predpostavka močno spominja na definicijo Cauchyjevega zaporedja.

Pokazali bomo, da obstaja funkcija

$f(x)$ z $\int_S f^2(x)\, d\mu(x) < \infty$, za katero

je $\int_S (f(x) - f_n(x))^2\, d\mu(x) \to \infty$, ko $n \to \infty$.

Za dokaz potrebujemo preprosto

neenačbo. Naj bo $g : S \to \mathbb{R}$ z $\int_S g^2(x)\, d\mu(x) < \infty$

$$\mu(\underbrace{\{x : |g(x)| \geq c\}}_{A_c}) \leq \frac{\int_S g^2(x)\, d\mu(x)}{c^2}$$

Računamo

$$\int_S g^2(x)\,d\mu(x) = \int_A g^2(x)\,d\mu(x) + \int_{A^c} g^2(x)\,d\mu(x)$$

$$\geq \int_{A^c} g^2(x)\,d\mu(x) + c^2 \int_{A^c} d\mu(x)$$

$$\geq c^2\,\mu(\{x : |g(x)| \geq c\})$$

Iz predpostavke sledi, da obstaja podzaporedje $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, tako da velja

$$\int_S (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})^2\,d\mu(x) < \frac{1}{8^k}$$

Označimo

$$E_k = \mu(\{x : |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \geq \frac{1}{2^k}\})$$

Velja

$$\mu(E_k) \leq \frac{4^k}{8^k} = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Naj bo $E = \bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{l \geq k} E_l$. To je množica vseh $x \in S$, ki so v neskončno mnogih E_k.

$$\mu(E) \leq \mu\Big(\bigcup_{k \geq \ell} E_\ell\Big)$$

$$\leq \sum_{k \geq \ell} \mu(E_\ell) \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$

Sledi $\mu(E) = 0$. Za vsak $x \in E^c$ je zaporedje $f_{n_k}(x)$ Cauchyjevo v običajnem smislu. Torej mora veljati $f_{n_k}(x) \to f(x)$, ko $k \to \infty$.

Za $x \in E$ definiramo $f(x) = 0$.

Torej smo našli podzaporedje, ki konvergira po točkah proti (merljivi) funkciji $f(x)$.

$$\int_S (f_n(x) - f(x))^2 \, d\mu(x)$$

$$\leq \int_S (f_n(x) - f_{n_k}(x) + f_{n_k}(x) - f(x))^2 \, d\mu(x).$$

$$\leq \int_S (f_n(x) - f_{n_k}(x))^2 \, d\mu(x)$$

$$+ \int_S (f_{n_k}(x) - f(x))^2 \, d\mu(x)$$

$$+ 2 \int_S (\quad)(\quad) \, d\mu(x)$$

$$\leq \int_S (\quad)^2 + \int_S (\quad)^2 + 2\Big(\int_S \cdot \int_S\Big)^{1/2}$$

Najprej ugotovimo

$$f^2(x) \leq \liminf_{k\to\infty} f_{n_k}^2(x)$$

Po Fatoujevi lemi je

$$\int_S f^2(x)\, d\mu(x) \leq \int_S \liminf_{k\to\infty} f_{n_k}^2(x)\, d\mu(x)$$

$$\leq \liminf_{k\to\infty} \int_S f_{n_k}^2(x)\, d\mu(x)$$

Iz predpostavk sledi, da obstaja M, da je $\int_S f_n^2(x)\, d\mu(x) \leq M < \infty$. To pomeni, da je $\int_S f^2(x)\, d\mu(x) < \infty$.

Dokazati želimo še, da je

$$\int_S (f_n(x) - f(x))^2\, d\mu(x) \to 0, \text{ ko } n\to\infty.$$

Za $\varepsilon > 0$ obstaja k_ε, da za $k, l > k_\varepsilon$ velja $\int_S (f_{n_k} - f_{n_l})^2\, d\mu < \varepsilon$.

Po Fatouju je potem

$$\int_S (f_{n_k} - f)^2\, d\mu = \int_S \liminf_{l\to\infty} (f_{n_k} - f_{n_l})\, d\mu$$

$$\leq \liminf \int_S (f_{n_k} - f_{n_l})\, d\mu$$

$$\leq \varepsilon$$

Za poljuben n vzamemo $n \geq k_\varepsilon$
in uporabimo neenakost

$$(f_n - f)^2 = (f_n - f_{n_k} + f_{n_k} - f)^2$$

$$\leq 2\left[(f_n - f_{n_k})^2 + (f_{n_k} - f)^2\right]$$

Opomba: Uporabili smo neenakost

$$\boxed{(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)}$$

Sledi, da za $n \geq k_\varepsilon$ in $n_k \geq k_\varepsilon$ velja

$$\int_S (f_n - f)^2 \, d\mu(x)$$

$$\leq 2 \int_S (f_n - f_{n_k})^2 \, d\mu$$

$$+ 2 \int_S (f_{n_k} - f)^2 \, d\mu$$

$$\leq 4\varepsilon$$

Povzamemo: Obstaja funkcija f z $\int_S f^2(x)\,d\mu(x) < \infty$ z

$$\int_S (f_n(x) - f(x))^2\,d\mu(x) \to 0, \text{ ko } n \to \infty.$$

Za nas bo pomembna verzija:

Naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ slučajne spremenljivke z $E[(X_n - X_m)^2] \to 0$, ko $m, n \to \infty$. Potem obstaja slučajna spremenljivka X z $E(X^2) < \infty$ in $E[(X_n - X)^2] \to 0$, ko $n \to \infty$.

Rečemo, da X_n konvergira proti X v L^2-smislu.

<u>Oznaka</u>: $X_n \xrightarrow[n \to \infty]{L^2} X$

Opombe:

(i) Limita X ni enolično določena. Lahko $X_n \xrightarrow{L^2} X$ in $X_n \xrightarrow{L^2} X'$ in $X \neq X'$, vendar mora biti $P(X \neq X') = 0$. Dokaz bralec.

(ii) Če je $p \geq 1$ in velja

$$E[(X_n - X_m)^p] \to 0, \text{ ko } m, n \to \infty,$$

potem obstaja slučajna spremenljivka X z $E(|X|^p) < \infty$ z $E[(X_n - X)^p] \to 0$, ko $n \to \infty$. Rečemo, da X_n konvergira proti X v L^p smislu. Označimo $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^p} X$. Dokaz je podoben temu za L^2.

1.4. Pogojne pričakovane vrednosti, maksimalna neenakost

Maksimalna neenakost

Izrek 1.8: Če je $(X_n, \mathcal{F}_n)$ martingal, velja za $x > 0$

$$P\left(\max_{0\le k\le N} |X_n| \ge x\right) \le \frac{E\left(|X_N| \mathbb{1}\left(\max_{0\le k\le N} X_n \ge x\right)\right)}{x}$$

Dokaz: Naj bo $T = \inf\{n : |X_n| \ge x\}$.

Označimo $A = \{\max_{0\le k\le N} |X_n| \ge x\}$.

$$P(A) = E\left[\sum_{k=0}^{N} \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}(T=k)\right]$$

$$\le E\left[\sum_{k=0}^{N} \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}(T=k) \cdot \frac{|X_k|}{x}\right]$$

$$= \frac{1}{x} E\left[\sum_{k=0}^{N} \mathbb{1}_A \mathbb{1}(T=k) |X_k|\right]$$

$$= \frac{1}{x} E\left[\sum_{k=0}^{N} \underbrace{\mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}(T=k)}_{\in \mathcal{F}_k} |X_k|\right]$$

$$= \frac{1}{x} E\left[\sum_{k=0}^{N} \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}(T=k) |X_N|\right]$$

$$\le \frac{1}{x} E\left[\mathbb{1}_A \cdot |X_N|\right].$$

Doobova neenakost sledi:

Izrek 1.19: (Doobova neenakost) Naj bo $(X_n, \mathcal{F}_n)_{1 \le n \le N}$ nenegativen submartingal z $E(X_n^2) < \infty$ za vse $n \le N$. Naj bo $X = \max_{1 \le n \le N} X_n$. Velja

$$E(X^2) \le 4 E(X_N^2)$$

Dokaz: Iz izreka 1.8. sledi, da je

$$x P(X \ge x) \le E(X_N \cdot 1(X \ge x)),$$

kar pomeni po izreku 1.9., da je

$$E(X^2) \le 4 E(X_N^2)$$

Komentar: Če je $(X_n, \mathcal{F}_n)_{1 \le n \le N}$ martingal, je $(|X_n|, \mathcal{F}_n)_{1 \le n \le N}$ nenegativen submartingal in velja neenakost z absolutnimi vrednostmi.

Izrek 1.10:

Če sta X in Y nenegativni sl. spr.

za kateri velja

$$c\,P(X \geq c) \leq E(Y \cdot 1(X \geq c)), \quad c \geq 0$$

velja

$$\sqrt{E(X^2)} \leq 2\sqrt{E(Y^2)}$$

$p=2$, $q=2$

Dokaz:

Računamo

$$\int_{[0,\infty)} 2c\,P(X \geq c)\,dc \leq \int_{[0,\infty)} 2\,E(Y\,1(X \geq c))\,dc$$

$$\shortparallel$$

$$\int_{[0,\infty)} 2c \cdot dc \int_{[c,\infty)} \mu_X(du)$$

$$\shortparallel$$

$$\int_{[0,\infty)} \mu_X(du) \cdot \int_{[0,u]} 2c\,dc$$

$$\shortparallel$$

$$\int_{[0,\infty)} u^2\,\mu_X(du)$$

$$\shortparallel$$

$$E(X^2)$$

Računamo

$$\int_{[0,\infty)} E(Y \cdot 1(X \geq c))\, dc$$

$$= E\left(Y \int_{[0,\infty)} 1(X \geq c)\, dc\right) \quad (\text{Fubini})$$

$$= E(Y \cdot X)$$

$$\leq \sqrt{E(Y^2)\, E(X^2)} \quad (\text{Cauchy - Schwarz})$$

Sledi

$$E(X^2) \leq 2\sqrt{E(X^2)\, E(Y^2)}$$

Dokaz izreka 1.9 ? U izreku 1.9 vzamemo $X = \max_{1 \leq k \leq n} |X_k|$ in $Y = |X_n|$. Izrek 1.8. je potem točno predpostavka izreka 1.10.

Definicija: Družina slučajnih spremenljivk $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ je enakomerno integrabilna, če za vsak $\varepsilon > 0$ lahko najdemo $K_\varepsilon > 0$, tako da je

$$E[|X_\alpha| 1(|X_\alpha| \geq K_\varepsilon)] < \varepsilon$$

za vse $\alpha \in I$.

Opombi: (i) iz definicije sledi, da je $E[|X_\alpha|] \leq C < \infty$ za neko konstanto C.

(ii) Če družini dodamo končno mnogo L^1 slučajnih spremenljivk, je še vedno enakomerno integrabilna.

Izrek 2.3: Družina slučajnih spremenljivk $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ je enakomerno integrabilna, če in samo če lahko najdemo:

(i) konstanto C, za katero je $E|X_\alpha| < C$ za vse $\alpha \in I$.

(ii) za vsak $\varepsilon > 0$ lahko najdemo $\delta > 0$, da iz $P(A) < \delta$ sledi $E[|X_\alpha| 1_A] < \varepsilon$ za vse $\alpha \in I$.

Primera :

(i) Naj bo $E X_\alpha^2 \le C < \infty$ za vse $\alpha \in I$.
Velja

$$E[\,|X_\alpha| \cdot 1(|X_\alpha| \ge k)]$$

$$\le E[X_\alpha^2]^{1/2} \cdot E[1(|X_\alpha| \ge k)]^{1/2}$$

$$\le C^{1/2} \cdot P(|X_\alpha| \ge k)^{1/2}$$

Po neenačbi Čebiševa je

$$P(|X_\alpha| \ge k) \le \frac{E X_\alpha^2}{k^2} \le \frac{C}{k^2}.$$

Če izberemo dovolj velik k^2, bo
$P(|X_\alpha| \ge k)^{1/2} < \varepsilon$.

(ii) Naj bo $E|X| < \infty$ na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ in si oglejmo družino $\{E(X|\mathcal{G}) : \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}\}$.
Ta družina je enakomerno integrabilna.

Po Jensenovi neenačbi je

$$|E(X|\mathcal{G})| \le E[|X|\,|\mathcal{G}].$$ Za vsak

dogodek $A \in \mathcal{G}$ je

$$E[|E(X|\mathcal{G})| \cdot 1_A] \le E[E[|X|\,|\mathcal{G}] \cdot 1_A]$$
$$= E[|X| \cdot 1_A]$$

Po neenačbi Markova je

$$P(|E(X|\mathcal{G})| \geq K) \leq \frac{E[|E(X|\mathcal{G})|]}{K} \leq \frac{E|X|}{K}$$

Če vzamemo $A = \{|E(X|\mathcal{G})| \geq K\}$, dobimo

$$E[|E(X|\mathcal{G})| \, 1(|E(X|\mathcal{G})| \geq K)]$$

$$\leq E[|X| \, 1(|E(X|\mathcal{G})| \geq K)]$$

Za vsak $\varepsilon > 0$ lahko najdemo $\delta > 0$, da iz $P(A) < \delta$ sledi $E[|X| \cdot 1_A] < \varepsilon$.

Zakaj? Recimo, da to ne drži, potem za nek ε_0 ne moremo najti ustreznega $\delta_0 > 0$, torej je za nek A_n z $P(A_n) < 2^{-n}$ $E[|X| \cdot 1_{A_n}] \geq \varepsilon_0$.

Ker pa je $\sum P(A_n) < \infty$, je skoraj vsak ω samo v končno mnogo A_n, zato $1_{A_n} \to 0$ s.g. Ampak potem $E[|X| \cdot 1_{A_n}] \to 0$ po IDK. Protislovje!

Dokaz:

(i) Iz prve definicije sledi, da za $\varepsilon/2$ lahko najdemo $K_{\varepsilon/2}$, da velja

$$E[|X_\alpha| 1(|X_\alpha| \geq K_{\varepsilon/2})] < \varepsilon/2$$

za $\alpha \in I$. Če je $\delta < \varepsilon / 2K_{\varepsilon/2}$ ocenimo za $P(A) < \delta$

$$E[|X_\alpha| \cdot 1_A] = E[|X_\alpha| \cdot 1(|X_\alpha| \leq K_{\varepsilon/2}) 1_A]$$

$$+ E[|X_\alpha| 1(|X_\alpha| \geq K_{\varepsilon/2}) 1_A]$$

$$\leq K_{\varepsilon/2} \cdot \frac{\varepsilon}{2 K_{\varepsilon/2}} + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Omejenost v L^1 je očitna.

(ii) Naj bo $\varepsilon > 0$. Iz neenačbe Markova sledi, da obstaja K_δ, da velja

$$P(|X_\alpha| \geq K_\varepsilon) \leq \frac{E|X_\alpha|}{K_\delta} \leq \frac{C}{K_\delta} < \delta.$$

Sledi

$$E[|X_\alpha| \cdot 1(|X_\alpha| \geq K_\delta)] < \varepsilon.$$

Izberimo $K > 0$ tak, da bo $\frac{E(|X|)}{K} < \delta$. Potem sledi

$$E[|E(X|\mathcal{G})| \cdot 1(|E(X|\mathcal{G})| > K)] < \varepsilon.$$

<u>Definicija</u>: Proces $X = \{X_t : t \geq 0\}$ je prilagojen filtraciji $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, če je $X_t \in \mathcal{F}_t$ za vsak $t \geq 0$.

<u>Izrek 2.4</u> (izrek o opcijskem ustavljanju)
Naj bo $M = (M_t : t \geq 0)$ martingal glede na filtracijo $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Naj bo $T \leq C < \infty$ omejen čas ustavljanja. Potem je $E[|M_T|] < \infty$ in $E[M_T] = E[M_0]$.

<u>Dokaz</u>: Za T s možnimi vrednostmi v množici $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ z $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leq C$ je

$$E[M_T] = E[M_T \cdot \sum_{k=1}^{n} 1(T = t_k)]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} E[M_{t_k} \underbrace{1(T = t_k)}_{\in \mathcal{F}_{t_k}}]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} E[M_C \cdot 1(T = t_k)]$$

$$= E(M_C) = E(M_0)$$

To, da je $E|M_T| < \infty$ dokažemo podobno. Poleg tega vidimo, da je $E[M_c \mid \mathcal{F}_T] = M_T$. Če je $A \in \mathcal{F}_T$ računamo

$$
\begin{aligned}
E[M_T \cdot 1_A] &= \sum_{k=1}^{n} E[M_T \cdot 1_A \cdot 1(T = t_k)] \\
&= \sum_{k=1}^{n} E[M_T \cdot 1_{\underbrace{A \cap \{T = t_k\}}_{\in \mathcal{F}_{t_k}}}] \\
&= \sum_{k=1}^{n} E[M_{t_k} \cdot 1_{A \cap \{T = t_k\}}] \\
&= \sum_{k=1}^{n} E[M_c 1_{A \cap \{T = t_k\}}] \\
&= E[M_c \cdot 1_A].
\end{aligned}
$$

Družina $\{E(M_c \mid \mathcal{F}_T) : T \leq c\}$ je torej enakomerno integrabilna.

<u>Izrek 2.5</u>: Naj bo X_n zaporedje slučajnih spremenljivk z $E|X_n| < \infty$. Naj bo $E|X| < \infty$. Velja: $E|X_n - X| \to 0$, ko $n \to \infty$, če in samo če je

(i) $X_n \xrightarrow{P} X$, ko $n \to \infty$

(ii) Družina $\{X_n\}$ je enakomerno integrabilna.

Dokaz:

(i) Definirajmo funkcijo

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} k, & \text{za } x \geq k \\ x, & \text{za } -k \leq x \leq k \\ -k, & \text{za } x \leq -k. \end{cases}$$

Iz enakomerne integrabilnosti sledi, da za dan $\varepsilon > 0$ lahko izberemo $k > 0$ tako, da je

$E[|\varphi_k(X_n) - \cancel{X_n}|] < \varepsilon/3$ in $E[|\varphi_k(X) - X|] < \varepsilon/3$.

Poleg tega $\varphi_k(X_n) \xrightarrow{P} \varphi_k(X)$. Zaradi omejenosti vseh spremenljivk s k očitno sledi $E[|\varphi_k(X_n) - \varphi_k(X)|] \to 0$.

Ostanek sledi iz trikotniške neenakosti

$$E|X_n - X| = E|X_n - \varphi_k(X_n)| + E|\varphi_k(X_n) - \varphi_k(X)| + E|\varphi_k(X) - X| < \varepsilon$$

za dovolj velike n.

(ii) $X_n \xrightarrow{P} X$ sledi iz neenakbe Markova.

Obstaja dovolj majhen $\delta > 0$, da bo za $1 \leq n \leq N$ veljalo

$$E|X_n \cdot 1_A| < \varepsilon \quad \text{in} \quad E|X \cdot 1_A| < \varepsilon.$$

N izberimo tako, da je $E|X_n - X| < \varepsilon$ za $n \geq N$. Ker so $E|X_n|$ omejeni, je za dovolj velik $k > 0$

$$P(|X_n| \geq k) \leq \frac{c}{k} < \delta.$$

Po trikotniški neenakosti je za $n \geq N$

$$E[|X_n| \cdot 1(|X_n| \geq k)]$$

$$\leq E[|X| 1(|X_n| \geq k)] + E|X_n - X| < 2\varepsilon,$$

za $1 \leq n \leq N$ je neenakost velja po izbiri.

Dokončamo dokaz izreka o optimalnem ustavljanju.

Ker $M_{T^n} \xrightarrow[s.g.]{} M_T$ zaradi zveznosti in je družina $\{M_{T^n}\}$ enakomerno integrabilna, velja da je $E|M_{T^n} - M_T| \to 0$. Preveriti moramo le še, da je $E[M_T] < \infty$. To sledi iz Fatoujeve leme:

$$E[|M_T|] = E[\liminf_{n\to\infty} |M_{T^n}|] \cancel{\leq E|M_t|}.$$

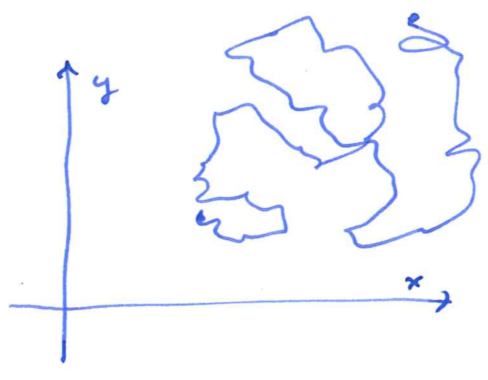
$$\leq \liminf_{n\to\infty} E[|M_{T^n}|] \leq E|M_t|$$

2. Brownovo gibanje in zvezni martingali

2.1. Brownovo gibanje

Leta 1824 je angleški botanik Robert Brown opazoval drobne delce v tekočini pod mikroskopom. Opazil je, da se delci v tekočini gibljejo naključno, njihove poti pa so povsem nepredvidljive.

Slika:



Ugotavljal je, da so poti zvezne, vendar ne moremo napovedati položaja delca. Postavimo se na stališče, da sta koordinati delca v času t naključni. Tej intuiciji moramo dati matematično podobo. Označimo z (B_t^1, B_t^2) položaj delca v času $t \geq 0$.

Smiselno je privzeti, da so pomiki delca med časi $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ med sabo neodvisni. V jeziku verjetnosti predpostavljamo, da so vektorji $(B_{t_1}^1, B_{t_1}^2) - (B_{t_0}^1, B_{t_0}^2)$, $(B_{t_2}^1, B_{t_2}^2) - (B_{t_1}^1, B_{t_1}^2), \ldots, (B_{t_n}^1, B_{t_n}^2) - (B_{t_{n-1}}^1, B_{t_{n-1}}^2)$ med sabo neodvisni. Ker se delci gibljejo v vse smeri enako, bo zaradi simetrije pričakovana pozicija delca enaka $(0,0)$, torej $E[(B_t^1, B_t^2)] = (0,0)$.
Zaradi neodvisnosti prirastkov bo tudi $\mathrm{var}(B_t^1) = \mathrm{var}(B_t^2) = ct$.
Konstanta c je odvisna od izbire enot in lahko predpostavimo, da je enaka 1.

kot tadnje opazimo, da je B_t^1 vsota „mnogih" med sabo neodvisnih prirastkov. Centralni limitni izrek nam sugerira, da bi morali biti poziciji B_t^1 in B_t^2 normalno porazdeljeni. Vse te opazke nas vodijo do definicije Brownovega gibanja. Matematično se bomo omejili na eno dimenzijo in gledali samo x-koordinato Brownovih delcev. To koordinato bomo označili z B_t za čas t. Iz vsega povedanega izhaja naslednja definicija:

<u>Definicija</u>: Brownovo gibanje je nabor slučajnih spremenljivk $\{B_t : t \geq 0\}$ na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ z naslednjimi lastnostmi:

(i) Za vsak izbor $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ so prirastki $B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ neodvisni.

(ii) Za poljuben t in poljuben h je razlika $B_{t+h} - B_t$ porazdeljena enako in sicer je

$$B_{t+h} - B_t \sim N(0, h).$$

(iii) Za skoraj vse $\omega \in \Omega$ je funkcija $t \longmapsto B_t(\omega)$ zvezna.

Brownovo gibanje je primer stohastičnega procesa v zveznem času. Stohastični proces v zveznem času ni nič drugega kot zbirka slučajnih spremenljivk z določenimi lastnostmi.

Kot prvo se moramo vprašati ali zbirka slučajnih spremenljivk, ki ustreza Brownovemu gibanju, obstaja.

<u>Izrek 2.1</u>: Obstaja verjetnostni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ in zbirka slučajnih spremenljivk $\{B_t : t \geq 0\}$, ki ustrezajo definiciji Brownovega gibanja.

<u>Dokaz</u>: Karatzas & Shreve, Brownian Motion and Stochastic Calculus, Springer, 1991, Sekcija 2.3.

<u>Opomba</u>: Dokaz je zahteven in temelji na aproksimacijah s slučajnimi sprehodi.

Brownovo gibanje je matematična formulacija intuicije, da se delec na $\mathbb{R}$ giblje povsem naključno v vsakem času in „pozabi" na svoje gibanje v preteklosti. Oglejmo si nekaj posledic definicije. Najprej potrebujemo nekaj pomožnih sredstev.

(i) Če je $\underline{X}$ slučajni vektor in poznamo $E(f(\underline{X}))$ za vse zvezne omejene funkcije $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, je s tem porazdelitev $\underline{X}$ enolično določena. Če je torej

$$E[f(\underline{X})] = E[f(\underline{Y})]$$

za slučajna vektorja $\underline{X}$ in $\underline{Y}$ za vsako zvezno funkcijo f, imata $\underline{X}$ in $\underline{Y}$ enako porazdelitev. To dejstvo je posledica teorije mere.

(ii) Za funkcije f v (i) lahko celo vzamemo samo funkcije oblike

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} f_k(x_k),$$

kjer so f_k zvezne omejene funkcije ene spremenljivke.

(iii) Rekli bomo, da je slučajni vektor $\underline{X}$ neodvisen od σ-algebre $\mathcal{G}$, če za vsako zvezno omejeno funkcijo $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ velja

$$E[f(\underline{X}) \cdot 1_G] = E[f(\underline{X})] \cdot E(1_G)$$
$$= E[f(\underline{X})] \cdot P(G)$$

za vse $G \in \mathcal{G}$.

V primeru Brownovega gibanja označimo z $\mathcal{F}_t$ σ-algebro, ki jo generirajo slučajne spremenljivke $\{B_s : 0 \le s \le t\}$. Družina $(\mathcal{F}_t)_{t \ge 0}$ je filtracija, kar pomeni, da je za $t_1 < t_2$ $\mathcal{F}_{t_1} \subseteq \mathcal{F}_{t_2}$.

Zaradi neodvisnosti prirastkov Brownovega gibanja bo za $t_1 < t_2 < \quad < t_n$

vektor

$$(B_{t+h_1} - B_t, B_{t+h_2} - B_{t+h_1}, \ldots, B_{t+h_n} - B_{t+h_{n-1}})$$

neodvisen od $\mathcal{F}_t$.

<u>Izrek 2.2</u>: Za vsak fiksen $t > 0$ je proces $\{B_{t+s} - B_t : s \geq 0\}$ Brownovo gibanje neodvisno od $\mathcal{F}_t$.

<u>Dokaz</u>: Sledi iz zgornjega.

<u>Opomba</u>: Med drugim iz tega sledi, da je $\{B_t\}$ markovski proces.

Preprosta posledica definicij je tudi, da je

$$E[B_{t+u} - B_t \mid \mathcal{F}_t] =$$

$$= E[B_{t+u} - B_t]$$

$$= 0,$$

torej je

$$E[B_{t+u} \mid \mathcal{F}_t] = B_t .$$

To nas močno spominja na definicijo martingala. O tem več kasneje.

Iz definicij sledi, da je gostota $(B_{t_1}-B_{t_0}, \ldots, B_{t_n}-B_{t_{n-1}})$ enaka produktu gostot zaradi neodvisnosti. Iz praktičnih razlogov bomo privzeli, da je $B_{t_0}=0$ (koordinatni sistem si lahko sami izbiramo). Iz transformacijske formule potem sledi, da je gostota vektorja $(B_{t_1}, B_{t_2}, \ldots, B_{t_n})$ enaka

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_k-t_{k-1})}}\, e^{-\frac{(x_k-x_{k-1})^2}{2(t_k-t_{k-1})}},$$

kjer je $x_0=0$.

Definicija: Prehodna gostota Brownovega gibanja je funkcija

$$p_t(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}}.$$

S temi oznakami lahko prepišemo gostoto $(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_n})$ kot

$$\prod_{k=1}^{n} p_{t_k - t_{k-1}}(x_{k-1}, x_k).$$

Opomba: Formula močno spominja na markovske verige, tj. je

$$P_\varepsilon(X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n)$$
$$= \prod_{k=1}^{n} p_{i_{k-1}, i_k}$$

Pri markovskih verigah je pomemben koncept krepke markovske lastnosti:

Za formulacijo potrebujemo koncept časa ustavljanja, ki ga poznamo iz teorije martingalov.

<u>Definicija</u>: Naj bo $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ filtracija. Slučajna spremenljivka $T : \Omega \to [0,\infty) \cup \{\infty\}$ je čas ustavljanja glede na filtracijo $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, če je za vsak $t \in \mathbb{R}$

$\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

Vzemimo za $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ naravno filtracijo Brownovega gibanja in naj bo T čas ustavljanja, ki ima samo končno mnogo vrednosti $\{0, t_1, t_2, \ldots, t_n\}$. Iz definicij izhaja, da je $\{T = t_k\} \in \mathcal{F}_{t_k}$.

<u>Definicija</u>: σ-algebra $\mathcal{F}_T$ za čas ustavljanja T je definirana kot

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ za vse } t\}$$

<u>Intuicija</u>: $\mathcal{F}_T$ je „povzetek" vsega do časa T.

Definiramo

$$\tilde{B}_s = B_{T+s} - B_T \quad \text{za} \quad s \geq 0.$$

Računamo za $A \in \mathcal{F}_T$

$$E\left[\prod_{k=1}^{n} f_k(\tilde{B}_{s_k} - \tilde{B}_{s_{k-1}}) \cdot 1_A\right]$$

$$= E\left[\prod_{k=1}^{n} f_k(\tilde{B}_{s_k} - \tilde{B}_{s_{k-1}}) \underbrace{\sum_{j=0}^{n} 1(T=t_j) 1_A}_{=1}\right]$$

$$= \sum_{j=0}^{n} E\left[\prod_{k=1}^{n} f_k(\tilde{B}_{s_k} - \tilde{B}_{s_{k-1}}) 1_A 1(T=t_j)\right]$$

$$= \sum_{j=0}^{n} E\left[\prod_{k=1}^{n} f_k(B_{t_j+s_k} - B_{t_j+s_{k-1}}) 1_A 1(T=t_j)\right]$$

neodvisni

$$= \sum_{j=0}^{n} \prod_{k=1}^{n} E\left[f_k(B_{t_j+s_k} - B_{t_j+s_{k-1}})\right] \cdot P(\{T=t_j\} \cap A)$$

$$= \prod_{k=1}^{n} E\left[f_k(B_{s_k} - B_{s_{k-1}})\right] \sum_{j=0}^{n} P(\{T=t_j\} \cap A)$$

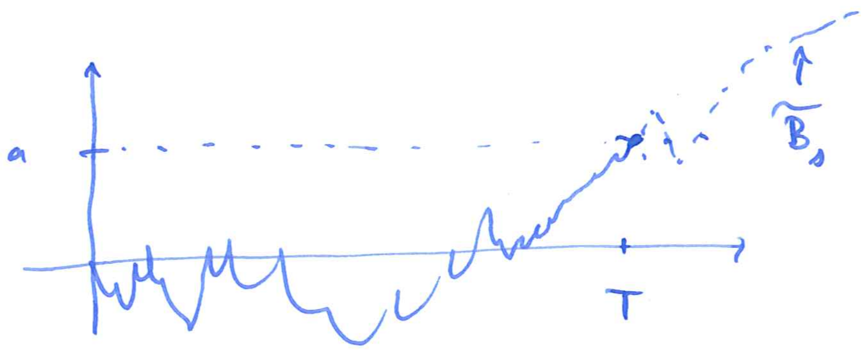
$$= \prod_{k=1}^{n} E[f_k(B_{s_k} - B_{s_{k-1}})] \cdot P(A)$$

Sklep: Proces $\tilde{B}_s$ je neodvisen od $A \in \mathcal{F}_T$ in enako porazdeljen kot Brownovo gibanje.

Primer: Recimo, da je

$$T = \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$$

Slika:



T je čas ustavljanja. Če poznamo pot Brownovega gibanja do t, potem vemo, ali je $T \leq t$ ali ne

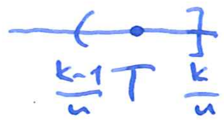
Izrek 2.3: Naj bo T čas ustavljanja z $P(T<\infty)$ in naj bo $\tilde{B}_s = B_{T+s} - B_T$ za $s \geq 0$. Proces $\{\tilde{B}_s : s \geq 0\}$ je Brownovo gibanje neodvisno od $\mathcal{F}_T$.

Opomba: Zgornji lastnosti rečemo krepka lastnost Markova ali krepka markovska lastnost.

Dokaz: Razmislek, ki smo ga navedli za T s končno mnogo vrednostmi, velja tudi za čase ustavljanja z diskretnim naborom vrednosti. Definirajmo

$$T^n = \frac{1}{n}\lceil nT \rceil$$

Slika: če je



, potem je

$$T^n = \frac{k}{n}.$$

Za T^n velja krepka markovska lastnost, zato je za $\hat{B}^n_s = B_{T^n+s} - B_{T^n}$

$$E\left[\prod_{k=1}^{n} f_k(\tilde{B}^n_{s_k} - \tilde{B}^n_{s_{k-1}}) \cdot 1_A\right]$$

$$= \prod_{k=1}^{n} E[f_k(B_{s_k} - B_{s_{k-1}})] \cdot P(A)$$

Po drugi strani $T^n \downarrow T$, zato zaradi zveznosti Brownovega gibanja $\tilde{B}^n_{s_k} - \tilde{B}^n_{s_{k-1}} \to \tilde{B}_{s_k} - \tilde{B}_{s_{k-1}}$. Ker so f_k omejene po izreku o dominirani konvergenci

$$E\left(\prod_{k=1}^{n} f_k(\tilde{B}^n_{s_k} - \tilde{B}^n_{s_{k-1}})\right)$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} E\left[\prod_{k=1}^{n} f_k(\hat{B}_{s_k} - \hat{B}_{s_{k-1}})\right]$$

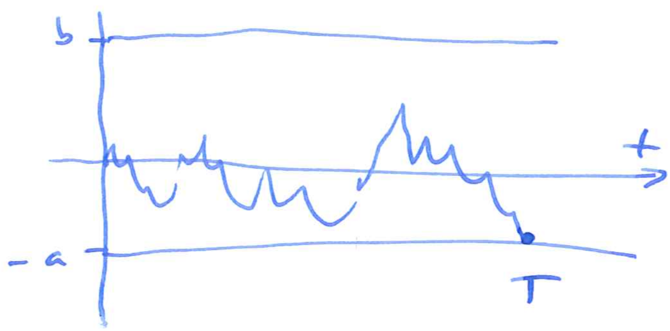
S tem je krepka markovska lastnost dokazana.

Oglejmo si še nekaj časov ustavljanja

(i) $T_{a,b} = \inf \{ t \geq 0 : B_t \in \{-a, b\} \}$

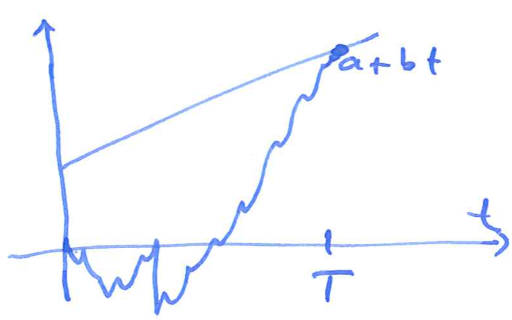
za $a, b > 0$

Slika:



(ii) $T = \inf \{ t \geq 0 : B_t = a + bt \}$

Slika:

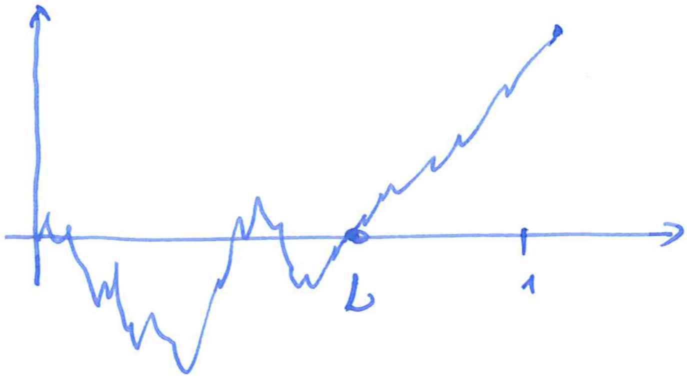


Ta čas ustavljanja ni nujno končen.

Še primer, ko T ni čas ustavljanja.

$$L = \sup\{t \in [0,1] : B_t = 0\}$$

<u>Slika</u>:



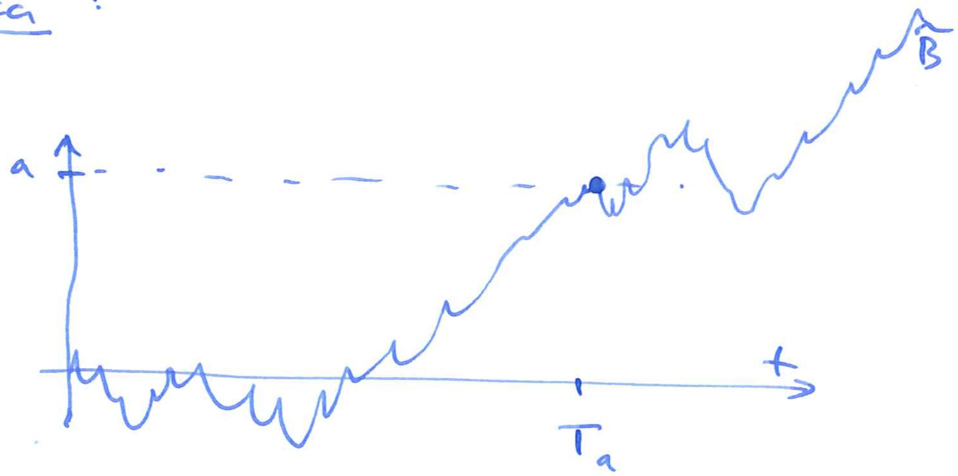
Če vam pokažem pot Brownovega gibanja do časa $t < 1$, ali veste da je $L \leq t$ ali ne? Ne! Brownovo gibanje se med t in 1 lahko vrne v 0!

Princip zrcaljenja

Vzemimo čas ustavljanja

$$T_a = \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}.$$

Slika:



Krepka lastnost Markova pove, da je $\tilde{B}_s = B_{T+s} - B_T$ Brownovo gibanje neodvisno od $\mathcal{F}_{T_a}$.

Iz definicij sledi, da je $-B$ Brownovo gibanje, če je B Brownovo gibanje.

Po času T_a lahko Brownovo gibanje „podaljšamo" s katerimkoli neodvisnim Brownovim gibanjem (neodvisnim od $\mathcal{F}_{T_a}$). Tako neodvisno gibanje je lahko $-\hat{B}$. Označimo to tretje Brownovo gibanje z $\hat{B}$. Naj bo $x < a$. Izračunati želimo

$$P\left(\max_{0 \le s \le t} B_t \ge a, \ B_t \le x\right).$$

Ta verjetnost je enaka

$$P\left(\max_{0 \le s \le t} \hat{B}_t \ge a, \ \hat{B}_t \le x\right)$$

Ampak (glej sliko) ta verjetnost je enaka

$$P\left(\max_{0 \le s \le t} B_s \ge a, \ \underbrace{B_t \ge 2a - x}_{\text{zrcaljenje čez } a}\right)$$

Če je $B_t \geq 2a - x$ je tudi

$\max\limits_{0 \leq s \leq t} B_s \geq a$, torej je

$$P\left(\max_{0 \leq s \leq t} B_t \geq a,\ B_t \leq x\right)$$

$$= P\left(B_t \geq 2a - x\right)$$

Označimo $\overline{B}_t = \max\limits_{0 \leq s \leq t} B_s$. S

temi oznakami je

$$P(\overline{B}_t \geq a,\ B_t \leq x) = P(B_t \geq 2a - x)$$

V načelu smo našli porazdelitev para $(\overline{B}_t, B_t)$. Računamo s tem, da je $P(B_t \geq 2a - x) =$

$1 - \Phi\left(\frac{2a - x}{\sqrt{t}}\right)$:

$$-\frac{\partial^2}{\partial a \partial x}\left(1-\Phi\left(\frac{2a-x}{\sqrt{t}}\right)\right)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial a}\Phi'\left(\frac{2a-x}{\sqrt{t}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(2a-x)^2}{2t}}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}$$

$$= \frac{2(2a-x)}{\sqrt{2\pi t^3}}\cdot e^{-\frac{(2a-x)^2}{2t}}$$

za $a > x$. Če integriramo po x od $-\infty$ do a dobimo gostoto $\overline{B}_t$. Računamo

$$\int_{-\infty}^{a} f_{\overline{B}_t, B_t}(a,x)\,dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\, e^{-\frac{a^2}{2t}}$$

To pomeni, da ima $\overline{B}_t$ enako porazdelitev kot $|B_t|$.

Velja še:

$$\{T_a \le t\} = \{\overline{B}_t \ge a\},$$

torej je

$$P(T_a \le t) = P(|B_t| \ge a)$$

$$= 2\left(1 - \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right)\right)$$

Odvajamo in dobimo

$$\boxed{f_{T_a}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{a^2}{2t}}}$$

2.3. Zvezni martingali

Za namene stohastične integracije bomo najprej nekoliko razširili definicijo Brownovega gibanja. Kot smo rekli, je filtracija $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ družina naraščajočih σ-algeber na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

<u>Definicija</u>: Privzeli bomo, da vsak $\mathcal{F}_t$ vsebuje vse dogodke $A \in \mathcal{F}$ z $P(A) = 0$ in je družina $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ desno zvezna v smislu $\bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t$. Tem pogojem bomo rekli „običajni pogoji" in jih bomo privzeli.

<u>Definicija</u>: Slučajni proces $(B_t : t \geq 0)$ je Brownovo gibanje glede na filtracijo $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, če velja:

(i) za $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ so slučajne spremenljivke $B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$

med sabo neodvisne.

(ii) Za $t, h > 0$ je slučajna spremenljivka $B_{t+h} - B_t$ neodvisna od $\mathcal{F}_t$ in $N(0,h)$ porazdeljena.

(iii) Za skoraj vse $\omega \in \Omega$ je funkcija $t \longmapsto B_t(\omega)$ zvezna.

Opazili smo, da je $(B_t : t \geq 0)$ martingal v zveznem času v smislu, da je

$$E(B_{t+s} \mid \mathcal{F}_t) = B_t \quad \text{za} \quad t, s \geq 0.$$

To nas napeljuje na naslednjo definicijo.

<u>Definicija</u>: Stohastični proces $(M_t : t \geq 0)$ je martingal glede na filtracijo $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, če velja

(i) M_t je merljiv glede na $\mathcal{F}_t$ za $t \geq 0$

(ii) $E(|M_t|) < \infty$ za $t \geq 0$

(iii) $E(M_{t+s} \mid \mathcal{F}_t) = M_s$ za $t, s \geq 0$.

Če je funkcija $t \mapsto M_t(\omega)$ zvezna za skoraj vse $\omega \in \Omega$, rečemo da je M martingal v zveznem času.

<u>Primera</u>:

(i) $M_t = B_t^2 - t$.

Ker je $|M_t| \leq B_t^2 + t$, velja $E(|M_t|) < \infty$. Računamo

$$
\begin{aligned}
E(M_{t+s} \mid \mathcal{F}_t) &= E\left(B_{t+s}^2 - (t+s) \mid \mathcal{F}_t\right) \\
&= E\left[(B_{t+s} - B_t)^2 + 2B_t \cdot B_{t+s} - B_t^2 \mid \mathcal{F}_t\right] - (t+s) \\
&= s + 2B_t\, E(B_{t+s} \mid \mathcal{F}_t) - B_t^2 - (t+s) \\
&= B_t^2 - t.
\end{aligned}
$$

M je zvezen martingal.

(ii) Nekoliko bolj zahteven je naslednji primer. Naj bo

$$M_t = e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2} t} .$$

Iz verjetnosti poberemo, da za $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ velja

$$E(e^{\lambda X}) = e^{\lambda\mu + \frac{\lambda^2 \sigma^2}{2}} .$$

Iz tega vidimo, da je $E(|M_t|) < \infty$.

Računamo

$$
\begin{aligned}
E(M_{t+s} \mid \mathcal{F}_t) &= E\left(e^{\lambda B_{t+s} - \frac{\lambda^2}{2}(t+s)} \mid \mathcal{F}_t\right) \\
&= E\left(e^{\lambda(B_{t+s} - B_t)} \cdot e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}(t+s)} \mid \mathcal{F}_t\right) \\
&= \underbrace{E\left(e^{\lambda(B_{t+s} - B_t)}\right)}_{\text{neodvisnost}} \cdot e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}(t+s)}
\end{aligned}
$$

$$= \underbrace{e^{\frac{\lambda^2 s}{2}}}_{B_{t+s}-B_t \sim N(0,s)} \cdot e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}(t+s)}$$

$$= e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2} t}$$

$$= M_t .$$

Pri diskretnih martingalih je bil najpomembnejši rezultat izrek o opcijskem ustavljanju. Izrek velja tudi za zvezne martingale, vendar ima dokaz tehnične težavice.

<u>Lema 2.4</u>: Naj velja za družino slučajnih spremenljivk, da $X_n \xrightarrow{s.g.} X$ in je $E(|X|) < \infty$ ter je družina $\{X_n\}$ enakomerno integrabilna.

Potem velja

$$E(|X_n - X|) \to 0, \text{ ko } n \to \infty$$

Dokaz: Za dan ε izberimo $k > 0$, da bo $E[|X_n| \cdot 1(|X_n| \geq k)] < \varepsilon$ in $E[|X| \cdot 1(|X_n| \geq k)] < \varepsilon$. Definirajmo funkcijo φ_k z

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} k & \text{za } x \geq k \\ x & \text{za } |x| \leq k \\ -k & \text{za } x < -k. \end{cases}$$

φ_k je zvezna, zato $\varphi_k(X_n) \xrightarrow{s.g} \varphi_k(X)$. Ker je $|\varphi_k|$ omejena s k, po izreku o dominirani konvergenci

$$E[|\varphi_k(X_n) - \varphi_k(X)|] \to 0, \text{ ko } n \to \infty$$

Za dan ε obstaja N_ε, da za $n \geq N_\varepsilon$ velja $E[|\varphi_k(X_n) - \varphi_k(X)|] < \varepsilon$.

Velja še

$$E[|\varphi_k(X_n) - X_n|]$$

$$\leq E[|X_n| \cdot 1(|X_n| \geq k)]$$

$$< \varepsilon$$

in podobno

$$E[|\varphi_k(X) - X|] \leq E[|X| \cdot \mathbb{1}(|X| \geq k)].$$
$$< \varepsilon.$$

Sledi

$$E[|X_n - X|]$$

$$\leq E[|X_n - \varphi_k(X_n)| + |\varphi_k(X_n) - \varphi_k(X)| + |\varphi_k(X) - X|]$$

$$< 3\varepsilon \quad \text{za} \quad n \geq N_\varepsilon.$$

S tem je izrek dokazan.

<u>Izrek 2.5</u>: (izrek o opcijskem ustavljanju). Naj bo $(M_t : t \geq 0)$ zvezen martingal in naj bo T omejen čas ustavljanja. Potem

$$E[M_T] = E[M_0].$$

Dokaz: Recimo, da je $T \leq C < \infty$.
Privzemimo najprej, da ima T samo nekaj diskretnih vrednosti $\{t_1, t_2, \dots, t_n\} \subseteq [0, C]$. Za σ-algebro $\mathcal{F}_T$ velja, da vsebuje dogodke, za katere je $A \cap \{T = t_k\} \in \mathcal{F}_{t_k}$ za vse $k = 1, 2, \dots, n$; Računamo za $A \in \mathcal{F}_T$

$$E[M_T \cdot 1_A]$$

$$= E\Big[M_T \cdot 1_A \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{n} 1(T = t_k)}_{=1}\Big]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} E\left[M_T \cdot 1_A \cdot 1(T = t_k)\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} E\Big[M_{t_k} \cdot \underbrace{1_A \cdot 1(T = t_k)}_{\in \mathcal{F}_{t_k}}\Big]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} E[M_c \cdot 1_A \cdot 1(T = t_k)]$$

$\uparrow$

Definicija martingala

$$= E[M_c \cdot 1_A]$$

Ugotavljamo, da je $M_T = E[M_c | \mathcal{F}_T]$.
Iz tega sledi $E(M_T) = E[M_c]$
$= E(M_0)$.

Naj bo T splošen omejen čas ustavljanja. Definirajmo

$$T^n = \begin{cases} 0, & \text{če je } T = 0. \\ \frac{c}{n} \lceil n \cdot \frac{T}{c} \rceil, & \text{če je } T > 0. \end{cases}$$

Velja $T^n \downarrow T$ in zaradi zveznosti $M_{T^n} \xrightarrow{s.g.} M_T$. Ker ima T^n samo diskreten nabor vrednosti, je $E(M_{T^n}) = E(M_0)$.

Za zaključek dokaza nam manjka samo še to, da $E(M_{T^n}) \to E(M_T)$.

Po Fatoujevi lemi je

$$E(|M_T|) = E[\liminf_{n\to\infty} |M_{T^n}|]$$

$$\leq \liminf_{n\to\infty} E[|M_{T^n}|].$$

Vendar podoben račun kot na začetku pokaže, da je

$$E[|M_{T^n}|] \leq E[|M_c|].$$

Torej je $M_T \in \mathcal{L}^1$. Družina $\{M_{T^n} : n \geq 1\}$ je enakomerno integrabilna, zato ker je $M_{T^n} = E(M_c \mid \mathcal{F}_{T^n})$. Po izreku 2.4. potem

$$|E(M_{T^n}) - E(M_T)|$$

$$\leq E[|M_{T^n} - M_T|] \to 0, \text{ ko } n \to \infty.$$

Primera:

(i) Tipično nas zanimajo primeri, ko T ni omejen s konstanto. V tem primeru vzamemo namesto T čas ustavljanja $T \wedge t = \min(T, t)$. Za tega je

$$E[M_{T\wedge t}] = E[M_0].$$

Če je $P(T<\infty) = 1$ in je M zvezen, $M_{T\wedge t} \to M_T$, ko $t\to\infty$. Naravno lahko z izreki iz teorije mere utemeljimo, da

$$E(M_{T\wedge t}) \to E(M_T).$$

Vzemimo

$$T = \inf\{t \geq 0 : B_t \in \{-a, b\}\}$$

za $a, b > 0$.

Vzemimo $M_t = B_t^2 - t$. Velja

$$E[M_{t\wedge T}] = E(M_0) = 0.$$

Z drugimi besedami

$$E(B^2_{t\wedge T}) = E(t\wedge T).$$

Hitro se lahko prepričamo (vaje), da je $P(T<\infty) = 1$.

Zaradi zveznosti je potem

$$B^2_{t\wedge T} \xrightarrow{s.g} B^2_T, \quad \text{ko } t\to\infty$$

in je $|B^2_{t\wedge T}| \leq \max(a^2, b^2)$.

Po izreku o dominirani konvergenci

$$E(B^2_{t\wedge T}) \to E(B^2_T).$$

Ko $t\to\infty$, $T\wedge t \uparrow T$. Po izreku o monotoni konvergenci

$$E(T\wedge t) \uparrow E(T).$$

Sledi, da je $E(B_T^2) = E(T)$.

Na vajah boste dokazali, da je $P(B_T = -a) = \frac{b}{a+b}$ in

$P(B_T = b) = \frac{a}{a+b}$. Sledi

$$E(B_T^2) = a^2 \cdot \frac{b}{a+b} + b^2 \cdot \frac{a}{a+b}$$

$$= \frac{ab(a+b)}{a+b}$$

$$= a \cdot b$$

(ii) Naj bo $M_t = e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2} t}$

in $T = \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$

za $a > 0$. Privzemite, da je $P(T < \infty) = 1$. Velja

$$E[M_{T \wedge t}] = E(M_0) = 1.$$

Vendar je $B_{t \wedge T} \leq a$, zato je $M_{t \wedge T} \leq e^{\lambda a}$. Po izreku o dominirani konvergenci

$$E(M_{t \wedge T}) \to E(M_T), \quad t \to \infty.$$

Sledi

$$E\left[e^{\lambda B_T - \frac{\lambda^2}{2} T} \right] = 1.$$

Ampak $B_T = a$, zato

$$E\left[e^{-\frac{\lambda^2}{2} T} \right] = e^{-\lambda a}$$

Opomba: Poskusite to izračunati iz znane gostote T!

Opomba: Izračunali smo Laplaceovo transformacijo T. Zapisano drugače je

$$E\left[e^{-\theta T} \right] = e^{-a\sqrt{2\theta}}$$

3. Stohastični integral

3.1. Definicija in osnovne lastnosti

Naj bo $(B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje in označimo s $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ njegovo filtracijo. Radi bi definirali integral oblike

$$\int_0^t H_s \, dB_s .$$

Intuitivno to pomeni, da trajektorijo Brownovega gibanja „razrežemo" in sestavimo na drugačen način. Za definicijo potrebujemo nekaj definicij.

<u>Definicija</u>: Naj bo $(H_t : t \geq 0)$ stohastični proces na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ in naj bo $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ filtracija. Rečemo, da je H_t prilagojen $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, če je za vsak $t \geq 0$ slučajna spremenljivka H_t merljiva glede na $\mathcal{F}_t$.

Kot vedno pri integriranju začnemo s preprostimi integrandi.

Definirajmo elementarne integrande kot

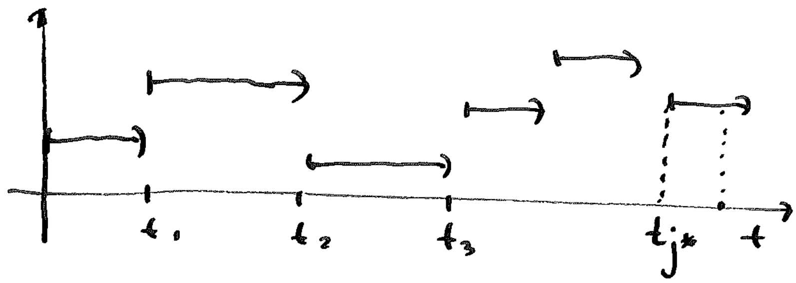
$$H(t,\omega) = \sum_{j=0}^{\infty} e_j(\omega)\, \chi_{[t_j, t_{j+1})}(t)$$

Pri tem predpostavljamo, da je

e_j $\mathcal{F}_{t_j}$ merljiva za vse t_j in

$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots$ $t_j \uparrow \infty$.

<u>Slika</u>:



Če je $e_j \in \mathcal{F}_{t_j}$ za vse $j \geq 0$, je $(H_t : t \geq 0)$ prilagojen. Po analogiji z definicijo Stieltjesovega integrala predlagamo

$$\int_0^t H_s\, dB_s = \sum_{j, t_{j+1} \leq t} e_j(\omega)\left(B_{t_{j+1}}(\omega) - B_{t_j}(\omega)\right) + e_{j^*}(\omega)\left(B_t - B_{t_{j^*}}\right)(\omega)$$

<u>Opombe</u>: (i) Pisali smo ω, tako da poudarimo odvisnost od ω, torej da je vrednost integranda v času t in vrednost integratorja v času t slučajna.

(ii) $j^* = \max(j : t_j \leq t)$

(iii) Pomembno je imeti v mislih, da je $\int_0^t H_s\, dB_s$ slučajna spremenljivka.

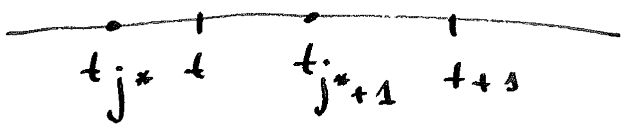
Lema 3.1: Naj bodo e_j omejene sl. spr. za $j \geq 0$. Slučajni proces

$$M_t = \int_0^t H_s \, dB_s$$

je zvezen martingal glede na $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$

Dokaz: Zveznost in prilagojenost sledita takoj iz definicije.

Slika (i): $t_{j^*} \leq t$



$$M_t = \sum_{j<j^*} e_j \left(B_{t_{j+1}} - B_{t_j} \right) + e_{j^*} \left(B_t - B_{t_{j^*}} \right)$$

$$M_{t+s} = \sum_{j<j^*} e_j \left(B_{t_{j+1}} - B_{t_j} \right) + e_{j^*} \left(B_{t_{j^*+1}} - B_{t_{j^*}} \right) + \sum_{\substack{j>j^* \\ t_{j+1} \leq t+s}} e_j \left(B_{t_{j+1}} - B_{t_j} \right) + e_{j^{**}} \left(B_{t+s} - B_{t_{j^{**}}}$$

Ko računamo $E(M_{t+s} | \mathcal{F}_t)$ se prvi člen ne spremeni, ker je merljiv glede na $\mathcal{F}_t$. Računamo

$$E[e_{j^*}(B_{t_{j^*+1}} - B_{t_{j^*}}) | \mathcal{F}_t]$$

$$= e_{j^*} \, E(B_{t_{j^*+1}} | \mathcal{F}_t) - B_{t_{j^*}}$$

$$= e_{j^*} (B_t - B_{t_{j^*}})$$

Za ostale člene računamo za $t_j > t_{j^*}$

$$E[e_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) | \mathcal{F}_t]$$

$$= E\left[E[e_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) | \mathcal{F}_{t_j}] \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right]$$

$$= E[e_j \, \overset{0}{E(B_{t_{j+1}} - B_{t_j} | \mathcal{F}_{t_j})} | \mathcal{F}_t]$$

$$= 0 .$$

Sledi, da je $E(M_{t+s} | \mathcal{F}_t) = M_t$.

Najpomembnejši korak pri definiciji stohastičnega integrala je naslednja opazka.

<u>Izrek 3.2</u> (Itôva izometrija)

Kiyoshi Itô, 1915–2008

Naj bodo e_j omejene slučajne spremenljivke. Velja

$$E\left[\left(\int_0^t H_s\,dB_s\right)^2\right] = E\left[\int_0^t H_s^2\,ds\right]$$

<u>Dokaz</u>: Naj bo $t_{j^*} \le t$ največji t_j manjši ali enak t. Računamo

$$\left(\int_0^t H_s\,dB_s\right)^2 = \Big(\sum_{j<j^*} e_j\,(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) + e_{j^*}\,(B_t - B_{t_{j^*}})\Big)^2$$

$$= \sum_{j<j^*} e_j^2\,(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 + e_{j^*}^2\,(B_t - B_{t_{j^*}})^2$$

$$+ 2\sum_{\substack{j,k<j^* \\ j\neq k}} e_j e_k\,(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})$$

$$+ 2\sum_{j<j^*} e_j e_{j^*}\,(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})\cdot(B_t - B_{t_{j^*}})$$

Računamo pričakovane vrednosti po vrsti.

$$E[e_j^2 (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2]$$

$$= E[E[e_j^2 (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 | F_{t_j}]]$$

$$= E[e_j^2 \cdot \underbrace{E[(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 | F_{t_j}]}_{\text{neodvisnost, torej navadna pričak. vrednost}}]$$

$$= E[e_j^2 (t_{j+1} - t_j)]$$

Podobno dobimo

$$E[e_{j^*}^2 (B_t - B_{t_{j^*}})^2]$$

$$= E[e_{j^*}^2 (t - t_{j^*})]$$

Oglejmo si enega od križnih členov.

$$E[e_j e_k (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})] = *$$

Privzemimo $k < j$.

$$* = E[E[e_j e_k (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}) | F_{t_j}]]$$

$$= E[e_j e_k (B_{t_{k+1}} - B_{t_k}) E[B_{t_{j+1}} - B_{t_j} | F_{t_j}]]$$

$= 0$

Ko popravimo, dobimo

$$E\left[\left(\int_0^t H_s\, dB_s\right)^2\right]$$

$$= E\Big[\underbrace{\sum_{j<j^*} e_j^2 (t_{j+1} - t_j) + e_{j^*}^2 (t - t_{j^*})}_{\text{To je po definiciji } \int_0^t H_s^2\, ds.}\Big]$$

Itôva izometrija je ključ do definicije stohastičnega integrala za bolj splošne integrande. Ideja je v tem, da bomo aproksimirali bolj splošne integrande s preprostejšimi, tako da bo $E\left[\int_0^t (H_s - H_s^n)^2\, ds\right] \to 0$, ko $n \to \infty$.

Potem bodo spremenljivke

$$\int_0^t H_s^n\, dB_s$$

konvergirale v L^2 proti limiti. Ta L^2 limita bo stohastični integral.

<u>Opomba</u> (<u>pomembna!</u>): Itôva izometrija je veljala, ker smo predpostavili, da je H_s prilagojen, torej $e_j \in \mathcal{F}_{t_j}$.

Zato ne moremo pričakovati, da bi integral lahko razširili na neprilagojene integrande. V nadaljevanju bomo vedno privzeli, da je H_s prilagojen.

Konstrukcija stohastičnega integrala bo potekala v več korakih:

<u>1. korak</u>: Naj bo H_s prilagojen, omejen in zvezen skoraj gotovo. Potem obstaja zaporedje omejenih elementarnih integrandov H_s^n, da bo $E\left[\int_0^t (H_s - H_s^n)^2 ds\right] \to 0$, ko $n \to \infty$.

Za neno particijo $t_0 = 0 < t_1 < \quad < t_n \leq t$ definirajmo

$$H_s^n = \sum_{j \geq 0} H_{t_j} \cdot \chi_{[t_j^n, t_{j+1}^n)}(s)$$

Ker je $H_{t_j} \in \mathcal{F}_{t_j}$ po predpostavki, je H_s^n elementaren integrand. Lahko recimo izberemo $t_j^n = j \cdot 2^{-n}$.

Zaradi zveznosti velja, da

$$(H_s - H_s^{(n)})^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{za} \quad 0 \le s \le t$$

za vse ω. Ker je zaporedje omejeno po predpostavki, velja

$$\int_0^t (H_s - H_s^{(n)})^2 \, ds \to 0 \quad , \text{ko } n \to \infty$$

po izreku o dominirani konvergenci. Slučajne spremenljivke $\int_0^t (H_s - H_s^n)^2 ds$ so omejene in $\to 0$, ko $n \to \infty$. Izrek o dominirani konvergenci uporabimo še enkrat in sledi

$$E\left[\int_0^t (H_s - H_s^{(n)})^2 \, ds\right] \to 0 \, , \text{ ko } n \to \infty.$$

Iz tega sledi, da slučajne spremenljivke $\int_0^t H_s^n \, dB_s$ tvorijo Cauchyjevo zaporedje v L^2.

Definiramo

$$\int_0^t H_s \, dB_s = L^2\text{-}\lim_{n\to\infty} \int_0^t H_s^{(n)} \, dB_s$$

Torej znamo definirati integrale za zvezne omejene integrande v smislu L^2 limite.

2. korak: Za drugi korak potrebujemo dejstvo iz teorije mere. Naj bo $h(s)$ omejena merljiva funkcija na $[0,t]$. Naj bo $\varphi_n(s) \geq 0$ funkcija z nosilcem na intervalu $[-1/n, 0]$, ki je zvezna in velja $\int_{-1/n}^{0} \varphi_n(s)\,ds = 1$. Funkcijo $h(s)$ lahko „zgladimo" v funkcijo

$$h^{(n)}(s) = \int_{s-1/n}^{s} \varphi_n(u-s)\,h(u)\,du$$

$(h(u)=0$ za $u\in 0)$

Opomba: To intuitivno pomeni, da funkcijsko vrednost $h(s)$ nadomestimo z uteženim povprečjem funkcijskih vrednosti na $[s-1/n, s]$. Teorija mere pove dvoje:

(i) $h^{(n)}(s) \to h(s)$ za skoraj vse $s \in [0,t]$.

(ii) Če definiramo

$$H_s^{(n)} = \int_{s-1/n}^{s} \varphi_n(u-s)\,H_u\,du$$

za prilagojen, omejen merljiv v u H_u, potem je $H_s^{(n)}$ prilagojen in $H_s^{(n)} \to H_s$ skoraj povsod na $[0,t]$.

<u>Opomba</u>: Dejstvi sta netrivialni!

Zaradi omejenosti H_s je tudi $H_s^{(n)}$ omejen. Po izreku o dominirani konvergenci velja

$$\int_0^t (H_s - H_s^{(n)})^2 ds \to 0, \text{ ko } n \to \infty$$

in še enkrat po izreku o dominirani konvergenci

$$E\left[\int_0^t (H_s - H_s^{(n)})^2 ds \right] \to 0, \text{ ko } n \to \infty.$$

To pomeni, da je $\int_0^t H_s^{(n)} dB_s$ Cauchyjevo zaporedje v L^2 in lahko $\int_0^t H_s dB_s$ definiramo kot limito, tj.

$$\int_0^t H_s dB_s = L^2\text{-}\lim_{n\to\infty} \int_0^t H_s^{(n)} dB_s$$

v L^2 smislu.

3. korak: Ostaja samo še razširitev na integrande H_s, za katere ne predpostavljamo omejenost, temveč samo $E\left[\int_0^t H_s^2\, dB_s\right] < \infty$.

Tukaj enostavno rečemo

$$H_s^{(n)} = \begin{cases} -n & \text{za } H_s < -n \\ H_s & \text{za } -n \le H_s \le n \\ n & \text{za } H_s > n \end{cases}$$

Ker velja $H_s^{(n)} \to H_s$, ko $n \to \infty$, velja tudi

$$\int_0^t (H_s - H_s^{(n)})^2\, ds \to 0, \text{ ko } n \to \infty$$

po izreku o dominirani konvergenci, ker je integrand dominiran s H_s^2.

Še enkratna uporaba izreka o dominirani konvergenci nam da, da

$$E\left[\int_0^t (H_s - H_s^{(n)})^2\, ds\right] \to 0, \text{ ko } n \to \infty.$$

Torej lahko $\int_0^t H_s\, dB_s$ spet definiramo kot L^2 limito.

S tem smo definirali Itôv ali stohastični integral za prilagojene integrande H_s, za katere je

$$E\left[\int_0^t H_s^2\,ds\right] < \infty.$$

Iz definicije sledi, da Itôva izometrija velja v splošnem: torej vedno je

<u>Lema 3.3</u>: Če je $E\left[\int_0^t H_s^2\,ds\right] < \infty$, je

$$E\left[\left(\int_0^t H_s\,dB_s\right)^2\right] = E\left[\int_0^t H_s^2\,ds\right]$$

<u>Dokaz</u>: Dejstvo sledi iz definicije integrala. V bistvu smo rekli

$$\int_0^t H_s^{(n)}\,dB_s \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} \int_0^t H_s\,dB_s$$

za elementarne integrande. To pomeni

$$E\left[\left(\int_0^t H_s\,dB_s\right)^2\right] = \lim_{n\to\infty} E\left[\left(\int_0^t H_s^n\,dB_s\right)^2\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} E\left[\int_0^t (H_s^{(n)})^2\,ds\right]$$

$$= E\left[\int_0^t H_s^2\,ds\right]$$

po konstrukciji.

Opomba:

Uporabili smo dejstvo, da iz $X_n \xrightarrow{L^2} X$, ko $n \to \infty$ sledi

$E(X_n^2) \to E(X^2)$, ko $n \to \infty$

To, vemo, sledi iz Cauchy-Schwarzove neenačbe.

$$|E(X_n^2) - E(X^2)|$$

$$= |E(X_n^2 - X^2)|$$

$$= |E[(X_n - X)(X_n + X)]|$$

$$\leq \underbrace{E[(X_n - X)^2]^{1/2}}_{\to 0,\ \text{ko } n \to \infty \text{ po predpostavki.}} \cdot E[(X_n + X)^2]^{1/2}$$

Če $X_n \xrightarrow{L^2} X$, je

$$E(X_n^2) = E[(X_n - X + X)^2]$$

$$\leq 2E((X_n - X)^2) + 2E(X^2)$$

$(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$

Prvo zaporedje je omejeno, ker konvergira, torej je $E(X_n^2) \leq C < \infty$

Zato je tudi:

$$E[(X_n+X)^2] \le 2E(X_n^2) + 2E(X^2)$$

$$\le 2C + 2E(X^2), \text{ torej}$$

omejeno.

Pri konstrukciji ostaja še eno vprašanje. Če je H ustrezen integrand, ga morda lahko aproksimiramo z različnima zaporedjima elementarnih integrandov, da bo

$$E\left[\int_0^t (H_s^n - H_s)^2\, ds\right] \to 0 \text{ in}$$

$$E\left[\int_0^t (K_s^n - H_s)^2\, ds\right] \to 0, \text{ ko } n\to\infty.$$

Kako vemo, da sta limiti

$$L^2\text{-}\lim \int_0^t H_s^n\, dB_s \text{ in}$$

$$L^2\text{-}\lim \int_0^t K_s^n\, dB_s \text{ enaki?}$$

Označimo prvo limito z X_t in drugo z Y_t. Računamo

$$E\left[\left(\int_0^t H_s^n\,dB_s - \int_0^t K_s^n\,dB_s\right)^2\right]$$

$$= E\left[\left(\int_0^t \underbrace{(H_s^n - K_s^n)}_{\text{elementaren integrand}}\,dB_s\right)^2\right]$$

$$= E\left[\int_0^t (H_s^n - K_s^n)^2\,ds\right]$$

$$= E\left[\int_0^t (H_s^n - H_s + H_s - K_s^n)^2\,ds\right]$$

$$\leq 2\,E\left[\int_0^t (H_s^n - H_s)^2\,ds\right] + 2\,E\left[\int_0^t (H_s - K_s^n)^2\,ds\right]$$

$\to 0$, ko $n \to \infty$. Torej je

$$X_t^n \xrightarrow{L^2} X_t$$
$$Y_t^n \xrightarrow{L^2} Y_t \quad \text{in} \quad X_t^n - Y_t^n \xrightarrow{L^2} 0$$

ko $n \to \infty$. To pomeni $X_t = Y_t$ s.g.

Izrek 3.4: Naj bosta H_s in K_s integranda z $E\left(\int_0^t H_s^2\,ds\right)$ in $E\left(\int_0^t K_s^2\,ds\right) < \infty$.

Velja:

(i) $$\int_0^t (H_s + K_s)\,dB_s = \int_0^t H_s\,dB_s + \int_0^t K_s\,dB_s$$

(ii) $$\int_0^t c H_s\,dB_s = c\int_0^t H_s\,dB_s$$

(iii) $$\int_0^u H_s\,dB_s + \int_u^t H_s\,dB_s = \int_0^t H_s\,dB_s$$ za $u < t$.

Dokaz: Vse napisano očitno velja za elementarne integrande. Trditve sledijo z aproksimacijo. Če sta $H_s^{(n)}$ in $K_s^{(n)}$ zaporedji elementarnih integrandov, velja:

$$\begin{array}{ccccc}
\int_0^t (H_s^{(n)} + K_s^{(n)})\,dB_s & = & \int_0^t H_s^{(n)}\,dB_s & + & \int_0^t K_s^{(n)}\,dB_s \\
\Big\downarrow L_2,\ n\to\infty & & \Big\downarrow L_2,\ n\to\infty & & \Big\downarrow L_2,\ n\to\infty \\
\int_0^t (H_s + K_s)\,dB_s & = & \int_0^t H_s\,dB_s & + & \int_0^t K_s\,dB_s
\end{array}$$

v L^2 smislu, kar pomeni s.g.

Ostale trditve dokažemo na enak način.

Manjka še ena stvar. Za elementarne integrande smo ugotovili, da je

$$M_t = \int_0^t H_s \, dB_s$$

zvezen martingal. Kako pa je v splošnem? Ker so integrali limite v L^2, je vprašanje ali lahko izberemo verzije, da bo $(M_t : t \geq 0)$ zvezen martingal v splošnem.

<u>Izrek 3.5</u>: Obstaja zvezen proces $(\tilde{M}_t : t \geq 0)$, za katerega je

$$P\left(\tilde{M}_t = \int_0^t H_s \, dB_s\right) = 1 \quad \text{za vsak } t.$$

Poleg tega je $\tilde{M}$ martingal.

<u>Dokaz</u>: Naj bo $H_s^{(n)}$ zaporedje elementarnih integrandov in $M_t^{(n)} = \int_0^t H_s^{(n)} dB_s$. Vsi $M_t^{(n)}$ so zvezni martingali. Po Doobovi neenakosti velja

$$P\left(\sup_{0 \leq s \leq t} |M_s^{(n)} - M_s^{(m)}| > \varepsilon\right)$$

$$\leq \frac{4}{\varepsilon^2} E\left[\left(M_t^{(n)} - M_t^{(m)}\right)^2\right]$$

$$= \frac{4}{\varepsilon^2} E\left[\left(\int_0^t (H_s^{(n)} - H_s^{(m)})\, dB_s \right)^2 \right]$$

$$= \frac{4}{\varepsilon^2} E\left[\int_0^t (H_s^{(n)} - H_s^{(m)})^2 ds \right] \to 0, \text{ ko } m, n \to \infty$$

Izberemo lahko podzaporedje n_k, za katerega velja

$$P\left(\sup_{0 \le s \le t} | M_s^{(n_{k+1})} - M_s^{(n_k)} | > \frac{1}{2^k} \right) < \frac{1}{2^k}$$

Po prvi Borel-Cantellijevi lemi bo s.g.

$$\sup_{0 \le s \le t} | M_s^{(n_{k+1})}(\omega) - M_s^{(n_k)}(\omega) | > \frac{1}{2^k}$$

končno mnogokrat. To pomeni, da zvezna funkcija $M_s^{(n)}(\omega)$ za $0 \le s \le t$ konvergira enakomerno proti zvezni funkciji $\tilde{M}_s(\omega)$ za skoraj vse ω. Ker pa

$$M_s^{(n_k)} \xrightarrow[n \to \infty]{L^2} \int_0^s H_u \, dB_u ,$$

mora biti tudi $P(M_s \neq \tilde{M}_s) = 0$ za vsak s.

Za dokaz nam manjka samo še to, da je $\hat{M}$ martingal. Oprli se bomo na dejstvo, ki ga navajamo kot pomoč: Če so M_t^n martingali in za vsak fiksen t $M_t^n \xrightarrow{L^p} M_t$, potem je M_t martingal, $p \geq 1$.

Naj bo $G \in \mathcal{F}_t$. Računamo

$$
\begin{aligned}
E[M_{t+s} \cdot 1_G] &= E[(M_{t+s} - M_{t+s}^n + M_{t+s}^n) 1_G] \\
&= E[(M_{t+s} - M_{t+s}^n) 1_G] \\
&\qquad + E[M_{t+s}^n 1_G] \\
&= E[(M_{t+s} - M_{t+s}^n) 1_G] \\
&\qquad + E[M_t^n \cdot 1_G]
\end{aligned}
$$

Vendar je po Jensenu

$$
\begin{aligned}
E[[M_{t+s} - M_{t+s}^n] \cdot 1_G] &\leq E[|M_{t+s} - M_{t+s}^n| \cdot 1_G] \\
&\leq E[|M_{t+s} - M_{t+s}^n|^p] \to 0.
\end{aligned}
$$

Poleg tega tudi po istem napitu

$$E[M_t^n \cdot 1_G] \to E[M_t \cdot 1_G].$$

Sledi $E[M_{t+s} \cdot 1_G] = E[M_t \cdot 1_G]$

ali $E[M_{t+s} \mid \mathcal{F}_t] = M_t$.

Ker $M_t^n \xrightarrow{L^2} \tilde{M}_t$ za vse t, je $\hat{M}$ martingal.

Imamo lepo definicijo stohastičnega integrala, vendar še nismo videli nobenega.

<u>Primer</u>: $\int_0^t B_s \, dB_s = ?$

Naj bo $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ particija $[0,t]$ in aproksimirajmo B_t z elementarnim integrandom

$$H_s^n(\omega) = \sum_{j=0}^{n-1} B_{t_j}(\omega) \chi_{[t_j, t_{j+1})}(s).$$

Velja

$$\int_0^t H_s^n \, dB_s =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} B_{t_j} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})$$

Zapišimo $\int_0^t H_s^n \, dB_s$ nekoliko

drugače. Opazimo, da je

$$B_{t_{j+1}}^2 - B_{t_j}^2 = (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2$$

$$+ 2 B_{t_j} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})$$

Sledi

$$\int_0^t H_s^n \, dB_s = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \Big[(B_{t_{j+1}}^2 - B_{t_j}^2)$$

$$- (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 \Big]$$

$$= \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2$$

Ocenimo

$$E\Big[\Big(\sum_{j=0}^{n-1} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 - t \Big)^2 \Big] = (*)$$

Dejstvo iz verjetnosti: če je

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, je

$$\mathrm{var}(X^2) = 2\sigma^4$$

$$= E(X^4) - E(X^2)^2$$

$$= E\left[\left\{ \sum_{j=0}^{n-1} \left[(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 - (t_{j+1} - t_j) \right] \right\}^2 \right]$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} E\left\{ \left[(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 - (t_{j+1} - t_j) \right]^2 \right\}$$

Pomislite, zakaj odpadejo križni členi!

$$= \sum_{j=0}^{n-1} 2\,(t_{j+1} - t_j)^2$$

$$\leq 2 \cdot t \cdot \max_{0 \leq j < n} |t_{j+1} - t_j| .$$

Ko bomo drobili interval $[0,t]$ na vedno manjše particije, bo vsota

$$\sum_{j=0}^{n-1} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 \xrightarrow{L^2} t .$$

Sledi

$$\int_0^t H_s^n \, dB_s \xrightarrow{L^2} \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} t .$$

Opomba: To računanje je „štorasto".
Mora obstajati boljša metoda!

3.2. Itôva formula

Itôva formula in njena posplošitev sta bistveni sredstvi v stohastičnem računu. Kako formulo uganemo, bo razvidno iz dokaza. Uporabili bomo naslednjo analogijo iz Analize 1: naj bodo $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ in $\{d_n\}$ zaporedja realnih števil, za katera je $a_n + b_n + c_n + d_n = x$ za vse n, x konstanta. Če $a_n \to a$, $b_n \to b$, $c_n \to c$ in $d_n \to d$, je $a + b + c + d = x$.

Kaj pa, če so A_n, B_n, C_n in D_n slučajne spremenljivke in velja

$$A_n + B_n + C_n + D_n = X \quad \text{za vse } n$$

(X konstantna sl. spr.) in je

$$A_n \xrightarrow{L^2} A$$

$$B_n \xrightarrow{L^2} B$$

$$C_n \xrightarrow{s.g.} C$$

$$D_n \xrightarrow{L^1} D,$$

ko $n \to \infty$

Ali je $A + B + C + D = X$?

Je! Domača naloga!

Potrebujemo še eno dejstvo iz Analize 1.

Če je f dvakrat zvezno odvedljiva velja

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(u)\,du$$

$$= -(y-u)f'(u)\Big|_x^y + \int_x^y (y-u)\, f''(u)\,du$$

$$= (y-x)f'(x) + \int_x^y (y-u)\, f''(u)\,du$$

Poleg tega je $\int_x^y (y-u)\, f''(x)\,dx =$

$$= \frac{1}{2}(y-x)^2 \cdot f''(x).$$

Sestavimo in dobimo

$$f(y) - f(x)$$

$$= (y-x)f'(x) + \frac{1}{2} f''(x)(y-x)^2$$

$$+ \underbrace{\int_x^y (y-u)\big(f''(u) - f''(x)\big)\,du}_{r(x,y)}.$$

<u>Opomba</u>: Temu rečemo Taylorjeva formula z ostankom v integralski obliki.

Predpostavimo, da je f'' omejena in enakomerno zvezna funkcija.

Ocenimo lahko

$$|r(x,y)| \le \int_x^y |(y-u)| \cdot |f''(u) - f''(x)|\, du$$

$$\le |y-x| \cdot \int_x^y |f''(u) - f''(x)|\, du$$

$$= |y-x| \cdot |y-x| \cdot |f''(\xi) - f''(x)|,$$

kjer je ξ med x in y. Označimo

$$h(x,y) = |f''(\xi) - f''(x)|$$

Funkcija $h(x,y)$ je enakomerno zvezna na $\mathbb{R}^2$ in velja $h(x,x) = 0$ ter omejena.

Izrek 3.6a: (Itôva lema)

Naj bo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dvakrat zvezno odvedljiva funkcija z $|f''(x)| \le C < \infty$ za $x \in \mathbb{R}$ in velja

$$E\left[\int_0^t [f'(B_s)]^2 ds\right] < \infty.$$

Potem velja

$$f(B_t) - f(B_0)$$

$$= \int_0^t f'(B_s)\, dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s)\, ds$$

<u>Opomba</u>: Drugi integral je navaden Riemannov integral zvezne funkcije.

<u>Dokaz</u>: Zapišemo za neko particijo $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_K = t$

$$f(B_t) - f(B_0)$$

$$= \sum_{j=0}^{K-1} \left[f(B_{t_{j+1}}) - f(B_{t_j}) \right]$$

$$= \sum_{j=0}^{K-1} f'(B_{t_j}) (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{K-1} f''(B_{t_j}) (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2$$

$$+ r(B_{t_j}, B_{t_{j+1}})$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1} f'(B_{t_j})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k-1} f''(B_{t_j})\left[(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 - (t_{j+1} - t_j)\right]$$

$$+ \sum_{j=0}^{k-1} f''(B_{t_j})(t_{j+1} - t_j)$$

$$+ \; r(B_{t_{j+1}}, B_{t_j})$$

Izbrali bomo particije π^n z $|\pi^n| \to 0$, ko $n \to \infty$. Ko bomo zapisali zgornje člene za particijo π^n, jih označimo z A_n, B_n, C_n in D_n.

Po vrsti: vsota $A_n + B_n + C_n + D_n$ je vedno enaka $f(B_t) - f(B_0)$

A_n: po konstrukciji stohastičnega integrala

$$A_n \xrightarrow{L^2} \int_0^t f'(B_s)\, dB_s, \text{ ko } n \to \infty.$$

Bu: Označimo

$$Q_j = f''(B_{t_j})\left[(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 - (t_{j+1} - t_j)\right]$$

Ocenimo

$$E(Q_j^2) \le c^2 \, E\left\{\left[(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 - (t_{j+1} - t_j)\right]^2\right\}$$

$$= 2c^2 (t_{j+1} - t_j)^2$$

$\uparrow$

če je $X \sim N(0, \sigma^2)$, je

$\mathrm{var}(X^2) = 2\sigma^4$

Računamo za $j < k$

$$E(Q_j Q_k)$$

$$= E\left[E\left[Q_j Q_k \mid \mathcal{F}_{t_k}\right]\right]$$

$$= E\Big[Q_j f''(B_{t_k}) \underbrace{E\left[(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2 - (t_{k+1} - t_k) \mid \mathcal{F}_{t_k}\right]}_{\to 0}\Big]$$

$= 0$ zaradi neodvisnosti

$B_{t_{k+1}} - B_{t_k}$ in $\mathcal{F}_{t_k}$.

Sledi

$$E(B_n^2) = \frac{1}{4} E\left[\left(\sum_{j=0}^{k-1} Q_j\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{k-1} E(Q_j^2)$$

$$\leq \frac{2}{4} \cdot C^2 \sum_{j=0}^{k-1} (t_{j+1} - t_j)^2$$

$$\leq \frac{C^2}{2} \cdot t \cdot |\pi^n| ,$$

Sledi: $B_n \xrightarrow{L^2} 0$, ko $|\pi^n| \to 0$.

C_n : Po definiciji Riemannovega integrala za zvezne funkcije

$$C_n \xrightarrow{s.g.} \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)\, ds , \quad \text{ko } |\pi^n| \to 0.$$

D_n : Vemo, da je

$$|D_n| \leq \sum_{j=0}^{k-1} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 h(B_{t_{j+1}}, B_{t_j})$$

Ker je h omejena, recimo z $2C$, lahko drugo pričakovano vrednost ocenimo z ($K = 2C$)

$$K^2 \, P(|B_{t_{j+1}} - B_{t_j}| \geq \delta)$$

$$\leq K^2 \cdot \frac{t_{j+1} - t_j}{\delta^2} \quad \text{(Čebišev)}$$

Sledi

$$E(|D_n|)$$

$$\leq \sum_{j=0}^{k-1} \sqrt{3}\,(t_{j+1} - t_j)\left(\varepsilon^2 + \frac{K^2(t_{j+1} - t_j)}{\delta^2}\right)^{1/2}.$$

Če je $|\pi^n| \leq \frac{\delta^2 \cdot \varepsilon^2}{K^2}$, je drugi oklepaj $\leq 2\varepsilon^2$ in velja

$$E(|D_n|) \leq \sqrt{6} \cdot \varepsilon \cdot t.$$

Ampak $\varepsilon > 0$ je bil poljuben.

Sledi $D_n \xrightarrow{L^1} 0$, ko $n \to \infty$.

Dokaz je končan.

3.4. Localization, local martingales

Naj bo H integrand za $0 \le s \le T$ in naj velja $E[\int_0^T H_s^2 ds] < \infty$. Vemo, da za vsak n lahko vzamemo partcijo $\{0, \frac{T}{n}, \frac{2T}{n}, \dots, \frac{(n-1)T}{n}, T\}$ in elementarne integrande H^n oblike

$$H_s^n = \sum_{j=0}^{n-1} e_j 1_{[\frac{jT}{n}, \frac{(j+1)T}{n})}(s),$$

da bo $E[\int_0^t (H_s^n - H_s)^2 ds] \to 0$, ko $n \to \infty$. Iz konstrukcije sledi, da obstaja podzaporedje n_k, $k \ge 1$, da procesi $(X_t^{n_k} : 0 \le t \le T)$ konvergirajo enakomerno proti X_t s.g.

Naj bo τ^n čas ustavljanja z vrednostmi v $\{0, \frac{T}{n}, \dots, T\}$. Iz definicije sledi, da je

$$X^n_{t \wedge \tau^n} = \int_0^t H_s^n \cdot 1(s \le \tau^n)\, dB_s$$

Naj bo $\tau \le T$ splošen čas ustavljanja in postavimo $\tau^n = \sum_{k=1}^n \frac{T_k}{n} 1(\frac{(k-1)T}{n} < \tau \le \frac{kT}{n})$

Velja $\tau^n \le \tau$ in $\tau^n \downarrow \tau$, ko $n \to \infty$.

Proces $X_t = \int_0^t H_s 1(s \leq \tau)\, dB_s$ bo enakomerna limita $X^n_{t \wedge \tau^n}$ kar pa je zaradi zveznosti očitno $X_{t \wedge \tau}$.

<u>Izrek 3.11</u> (izrek o lokalizaciji)
Naj bo H integrand z $E[\int_0^T H_s^2 ds] < \infty$.
Naj bo τ čas ustavljanja z $0 \leq \tau \leq T$.
Velja

$$X_{t \wedge \tau} = \int_0^t H_s \cdot 1(s \leq \tau)\, dB_s$$

Dokaz: Malce kasneje.

Posledice tega na videz očitnega izreka so naslednje:

(i) Če je $H_s 1(s \leq \tau) = K_s 1(s \leq \tau)$ za čas ustavljanja $\tau \leq T$, je

$$X_t \cdot 1(t < \tau) = Y_t 1(t < \tau)$$

za $Y_t = \int_0^t K_s \, dB_s$.

Ocenimo na podlagi $(x-y)^2 \le 2(x^2+y^2)$

$$[H_s \cdot 1(s \le T) - H_s^n 1(s \le T_n)]^2$$

$$= [H_s 1(s \le T) - H_s \cdot 1(s \le T^n)$$

$$+ H_s 1(s \le T^n) - H_s^n 1(s \le T_n^n)]^2$$

$$\le 2 H_s^2 [1(s \le T) - 1(s \le T^n)]$$

$$+ 2(H_s - H_s^n)^2 1(s \le T^n)$$

Ker $1(s \le T^n) \to 1(s \le T)$ s.g. ko $n \to \infty$ sledi

$$E\left[\int_0^T H_s^2 \left(1(s \le T) - 1(s \le T^n)\right) ds\right] \to 0$$

po izreku o dominirani konvergenci. Po drugi strani je

$$E\left[\int_0^T (H_s - H_s^n)^2 1(s \le T^n)\, ds\right] \to 0,$$

saj smo integrand v primerjavi z $(H_s - H_s^n)$ zmanjšali. Vzemimo zdaj podzaporedje, tako da $(X_t^{n_k} : 0 \le t \le T)$ konvergirajo skoraj gotovo enakomerno.

(ii) Naj bo $P\left(\int_0^T H_s^2\,ds < \infty\right) = 1$

za progresivno merljiv integrand H.

Definicija: zaporedje časov ustavljanja je T^n je lokalizacijsko zaporedje, če velja $T^n \nearrow$, ko $n \to \infty$ in $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{T^n = T\}\right) = 1$.

Če velja zgornji pogoj, je

$$T^n = \inf\left\{s : \int_0^s H_u^2\,du \geq n \text{ ali } s = T\right\}$$

lokalizacijsko zaporedje. Iz definicije sledi, da je

$$E\left[\int_0^T H_s^2\, 1^2(s \leq T^n)\,ds\right] < \infty,$$

zato za vsak n lahko definiramo $X_t^n = \int_0^t H_s 1(s \leq T^n)\,dB_s$. Po zgornjem se procesi $X^n_{t\wedge T^n}$ in $X^m_{t\wedge T^n}$ ujemajo za vse $m \geq n$. To pomeni, da bo,

$$\lim_{n\to\infty} X^n_{t\wedge T^n} \text{ definirana s.g.}$$

Alternativen dokaz izreka o regularizaciji:

<u>Dokaz</u>: Iz konstrukcije sledi, da lahko najdemo zaporedje elementarnih integrandov H^n, da bo

$$X^n_s = \int_0^s H^n_u \, dB_u \to X_s = \int_0^s H_u \, dB_u$$

skoraj gotovo enakomerno na $[0,t]$, ko $n \to \infty$.

Po drugi strani po Itôvi izometriji

$$\int_0^s H^n_u 1(u \leq T) \, dB_s \xrightarrow{L^2} \int_0^s H_u 1(u \leq T) \, dB_s$$

in lahko najdemo podzaporedje n_k, da bo

$$\int_0^s H^{n_k}_u 1(u \leq T) \, dB_s \to \int_0^s H_u 1(u \leq T) \, dB_s$$

enakomerno ~~konvergirala proti~~

$$\cancel{\int_0^s H_u 1(u \leq T) \, dB_s \text{ skoraj gotovo, ko } n \to \infty.}$$

za $s \in [0,t]$ skoraj gotovo. Tovrstno je očitno

$$(X^{n_k})^T_s \to X^T_s \text{ enakomerno na } [0,t]$$

$$\parallel$$

$$\int_0^s H^{n_k}_u 1(u \leq T) \, dB_s \longrightarrow \int_0^s H_u 1(u \leq T) \, dB_s$$

enakomerno na $[0,t]$

To limito imenujemo

$$X_t = \int_0^t H_s \, dB_s .$$

Po definiciji lokalizacijskega zaporedja bo $(X_t : 0 \leq t \leq T)$ zvezen proces. Tako smo definirali stohastični integral.

<u>Opozorili</u>:

(i) ne velja več nujno, da je X_t zvezni martingal.

(ii) Itôva izometrija ne velja več nujno.

(iii) pokazati je treba, da je $\int_0^t H_s dB_s$ neodvisen od lokalizacijskega zaporedja (vaje).

<u>Opomba</u>: (i) Pokazali bomo, da za levo zvezne omejene intgrande H velja da za particije $0 = t_0^k < t_1^k < \dots < t_{n_k}^k = T$ z $|\pi| \to 0$ velja

$$\sum_{j=0}^{n_k - 1} H_{t_j^k} \left(B_{t_{j+1}^k} - B_{t_j} \right) \xrightarrow{?} \int_0^T H_s \, dB_s , \quad k \to \infty .$$

(ii) Itôva formula s to novo definicijo velja brez omejitev. Zahtevamo samo, da je f dvakrat zvezno odvedljiva.

3.4. Stochastic integration in general.

<u>Idea</u>: We have defined $\int_0^t H_s\, dB_s$.

Can we generalize and define similarly $\int_0^t H_s\, dM_s$ for a general continuous martingale? The starting point is the same. We define for elementary integrands

$$H_s = \sum_{j=0}^{\infty} e_j \mathbb{1}_{[t_j, t_{j+1})}(s) \quad , \quad e_j \in \mathcal{F}_{t_j}$$

e_j bounded the integral

$$\int_0^t H_s\, dM_s = \sum_{j=0}^{j^*-1} e_j \cdot (M_{t_{j+1}} - M_{t_j}) + e_{j^*} (M_t - M_{t_{j^*}})$$

In exactly the same way we can compute

$$E\left[\left(\int_0^t H_s\, dM_s \right)^2 \right] = E\left[\sum_{j=0}^{j^*-1} e_j^2 (M_{t_{j+1}} - M_{t_j})^2 + e_{j^*}^2 (M_t - M_{t_{j^*}}) \right]$$

If we do not have independence of increments we cannot compute expectations.

But there is a way. Suppose there is an adapted process $(\langle M\rangle_t : t \geq 0)$, increasing, such that $M_t^2 - \langle M\rangle_t$ is a martingale. We compute assuming $E(M_t^2) < \infty$ for all t:

$$E[e_j^2 (M_{t_{j+1}} - M_{t_j})^2]$$

$$= E\Big[E[e_j^2 (M_{t_{j+1}} - M_{t_j})^2 \mid \mathcal{F}_{t_j}]\Big]$$

$$= E[e_j^2 \, E[(M_{t_{j+1}} - M_{t_j})^2 \mid \mathcal{F}_{t_j}]]$$

$$= E[e_j^2 \, E(M_{t_{j+1}}^2 - 2M_{t_{j+1}} M_{t_j} + M_{t_j}^2 \mid \mathcal{F}_{t_j})]$$

$$= E[e_j^2 (E[M_{t_{j+1}}^2 \mid \mathcal{F}_{t_j}] - M_{t_j}^2)]$$

$$= E[e_j^2 \, E[M_{t_{j+1}}^2 - M_{t_j}^2 \mid \mathcal{F}_{t_j}]]$$

$$= *$$

Because $M_t^2 - \langle M\rangle_t$ is a martingale, we have

$$E[M_{t_{j+1}}^2 - \langle M\rangle_{t_{j+1}} \mid \mathcal{F}_{t_j}]$$

$$= M_{t_j}^2 - \langle M\rangle_{t_j} \quad \text{and hence}$$

$$E[M_{t_{j+1}}^2 - M_{t_j}^2 \mid \mathcal{F}_{t_j}] = E[\langle M\rangle_{t_{j+1}} - \langle M\rangle_{t_j} \mid \mathcal{F}_{t_j}]$$

$$(*) = E\left[e_j^2 \, E\left[\langle M\rangle_{t_{j+1}} - \langle M\rangle_{t_j} \mid \mathcal{F}_{t_j} \right]\right]$$

$$= E\left[e_j^2 \left(\langle M\rangle_{t_{j+1}} - \langle M\rangle_{t_j} \right) \right]$$

$$= E\left[\int_{t_j}^{t_{j+1}} e_j^2 \, d\langle M\rangle_s \right]$$

It follows that for elementary integrands we have

$$E\left[\left(\int_0^t H_s \, dM_s \right)^2 \right] = E\left[\underbrace{\int_0^t H_s^2 \, d\langle M\rangle_s}_{\text{Lebesgue-Stieltjes integral.}} \right]$$

Remark: By assumption $E[\langle M\rangle_t]$ exists.

What now?

We can do all the steps of construction of integrals exactly the same way as for Brownian motion except that the Itô isometry will have the form

$$E\left[\left(\int_0^T H_s \, dM_s \right)^2 \right] = E\left[\int_0^T H_s \, d\langle M\rangle_s \right].$$

All the rest is exactly the same.

If $(H_s : 0 \le s \le T)$ or $(H_s : s \ge 0)$ is a progressively measurable integrand such that $E\left[\int_0^T H_s^2 \, d\langle M\rangle_s\right] < \infty$ or $E\left[\int_0^t H_s^2 \, d\langle M\rangle_s\right] < \infty$ for all $t \ge 0$ then:

1. We can define the stochastic integral $\int_0^t H_s \, dM_s$ by approximation with elementary integrands H^n such that $E\left[\int_0^T (H_s - H_s^n)^2 d\langle M\rangle_s\right] \to 0$, as $n \to \infty$.

2. The process $X_t = \int_0^t H_s \, dM_s$ is a continuous martingale.

3. The Itô isometry has the form

$$E\left[\left(\int_0^T H_s \, d\langle M\rangle_s\right)^2\right] = E\left[\int_0^T H_s^2 \, d\langle M\rangle_s\right].$$

4. We have the localisation properties the same way.

5. We can define $\int_0^t H_s \, dM_s$ if $P\left(\int_0^t H_s \, d\langle M\rangle_s < \infty\right) = 1$.

But is there such an $\langle M \rangle$? First a few definitions.

<u>Definition</u> : Let $(M_t : t \geq 0)$ be a continuous adapted process, M is a local martingale if there is an increasing sequence τ^n of stopping times such that $\tau^n \uparrow \infty$ a.s. and the process $1(\tau^n > 0) \cdot X^{\tau^n}$ is a martingale for all $n \geq 1$.

<u>Remark</u> : On finite intervals $[0,T]$ the requirement $\tau^n \uparrow \infty$ a.s. is replaced by $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\tau^n = T\}) = 1$.

<u>Remark</u> : The general definition of $X_t = \int_0^t H_s \, dB_s$ says that X is a local martingale.

<u>Remark</u> . For continuous local martingales we can always assume that X^{τ^n} is bounded.

Lemma 3.9 : Let M be a continuous local martingale and T a stopping time. Then

$$\langle M^T \rangle = \langle M \rangle^T$$

Proof : $M_t^2 - \langle M \rangle_t$ is a local martingale so

$M^2_{t\wedge T} - \langle M \rangle_{t\wedge T}$ is a local martingale. By uniqueness then

$$\langle M \rangle_{t\wedge T} = \langle M^T \rangle_t .$$

Theorem 3.9: Let M be a local martingale such that the total variation $V_M(t)$ is bounded a.s. Then M is constant.

Proof: Assume first that M is a bounded martingale. Because $V_M(t)$ is continuous we can stop M at $\nu = \inf\{t \geq 0 : V_M(t) \geq K\}$. We compute assuming $M_0 = 0$

$$E[M_t^2] = E\Big[\sum_{k=0}^{n-1} \big(M^2_{\frac{t(k+1)}{n}} - M^2_{\frac{tk}{n}}\big)\Big]$$

$$= E\Big[\sum_{k=0}^{n-1} \big(M_{\frac{t(k+1)}{n}} - M_{\frac{tk}{n}}\big)^2\Big]$$

$$\leq E\Big[\sup_{0 \leq k \leq n-1} \big|M_{\frac{t(k+1)}{n}} - M_{\frac{tk}{n}}\big| \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \big|M_{\frac{t(k+1)}{n}} - M_{\frac{tk}{n}}\big|}_{\leq K}\Big]$$

$$\leq E\Big[K \sup_{0 \leq k \leq n-1} \big|M_{\frac{t(k+1)}{n}} - M_{\frac{tk}{n}}\big|\Big]$$

$\to 0, \; n \to \infty$ by the dominated convergence theorem.

So M^{T_n} is constant for every n. As $T^n \uparrow \infty$ it must be constant for all $t \geq 0$

Lemma 3.10: Let M be a continuous local martingale and let T be a stopping time. Then

$$\langle M^T \rangle = \langle M \rangle^T$$

Proof: $M_t^2 - \langle M \rangle_t$ is a local martingale so is

$$(M_t^T)^2 - \langle M \rangle_t^T.$$

It follows by uniqueness that $\langle M^T \rangle = \langle M \rangle^T$.

Theorem 3.11: Let M be a bounded continuous martingale. There is an adapted nondecreasing process $\langle M \rangle$ with $\langle M \rangle_0 = 0$ and such that $M_t^2 - \langle M \rangle_t$ is a martingale. The process is unique.

Remarks: (i) It is easy to see that there can only be one such process. If $M_t^2 - A_t$ and $M_t^2 - B_t$ are martingales so is the difference $B_t - A_t$. But the difference has finite variation so it must be constant and equal to 0.

(ii) We need to construct such a process. The idea comes from the discrete case. If M_k is a martingale and we define $A_0 = 0$ and $A_k = \sum_{i=0}^{k} E[(M_{i+1} - M_i)^2 | \mathcal{F}_i]$ then $M_k^2 - A_k$ is a martingale.

(iii) The theorem is a special case of the Doob-Meyer decomposition for submartingales.

Proof: The proof has many steps but here is an outline. Let $0 = t_0 < t_1 < \dots$ be a partition π of $[0, \infty)$ and X a bounded continuous martingale. Define a new process

$$T_t^{\pi}(X) = \sum_{i=0}^{k-1} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 + (X_t - X_{t_k})^2$$

for $t_k \leq t < t_{k+1}$. We will show the following:

(i) $X_t^2 - T_t^{\pi}(X)$ is a martingale for any partition.

(ii) $T_t^{\pi}(X) \xrightarrow{L^2} T_t(X)$ as $|\pi| \to 0$. This is the hardest part of the proof.

(iii) The limit $T_t(X)$ can be chosen to be continuous and increasing and $-T_t(X) + X_t^2$ is a martingale.

We need several steps.

Step 1: Let X be a square integrable martingale and $r \leq s < t$.

We compute

$$E[(X_t - X_s)^2 \mid \mathcal{F}_r]$$

$$= E\Big[E[(X_t^2 - 2X_t X_s + X_s^2) \mid \mathcal{F}_s] \mid \mathcal{F}_r\Big]$$

$$= E[E(X_t^2 - 2X_s^2 + X_s^2) \mid \mathcal{F}_s] \mid \mathcal{F}_r]$$

$$= E[X_t^2 - X_s^2 \mid \mathcal{F}_s]$$

Let $t_k \le s < t_{k+1}$, $t_l \le t \le t_{l+1}$,
$s < t$.

We have

$$T_t^\pi(x) - T_s^\pi(x) = \sum_{i=k+1}^{l-1} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2$$
$$+ (X_{t_{k+1}} - X_{t_k})^2$$
$$+ (X_t - X_{t_l})^2$$
$$- (X_s - X_{t_k})^2$$

From the above we have

$$E[\sum_{i=k+1}^{l-1} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 \mid \mathcal{F}_s]$$
$$= E[\sum_{i=k+1}^{l-1} (X_{t_{i+1}}^2 - X_{t_i}^2) \mid \mathcal{F}_s]$$

and

$$E[(X_t - X_{t_l})^2 \mid \mathcal{F}_s] = E[X_t^2 + X_{t_l}^2 \mid \mathcal{F}_s]$$

For the middle term we compute

$$E[(X_{t_{k+1}} - X_{t_k})^2 \mid \mathcal{F}_s]$$

$$= E[(X_{t_{k+1}} - X_s + X_s - X_{t_k})^2 \mid \mathcal{F}_s]$$

$$= E[(X_{t_{k+1}} - X_s)^2 + 2(X_{t_{k+1}} - X_s)(X_s - X_{t_k}) + (X_s - X_{t_k})^2 \mid \mathcal{F}_s]$$

$$= E[X_{t_{k+1}}^2 - X_s^2 \mid \mathcal{F}_s] + (X_s - X_{t_k})^2$$

Putting all the pieces together we get

$$E[T_t^\pi(X) - T_s^\pi(X) \mid \mathcal{F}_s]$$

$$= E[X_t^2 - X_s^2 \mid \mathcal{F}_s]$$

This means that $X_t^2 - T_t^\pi(X)$ is a martingale.

<u>Remark</u>: if $k = l$ the sum is empty. The same holds for $k = l+1$. If $t_k \le s < t < t_{k+1}$ the term $(X_{t_{k+1}} - X_{t_k})^2$ also disappears.

Step 2 : Let π and π' be partitions. Fix $t > 0$ and assume that $t \in \pi, \pi'$. By step 1 the difference

$$X_t = T_t^{\pi}(M) - T_t^{\pi'}(M)$$

is a martingale and it is square integrable. If $\pi'' = \pi \cup \pi'$ we have that

$E(X_t^2) = E[T_t^{\pi''}(X)]$ because this is valid for any π''. But

$$T_t^{\pi''}(X) = \sum_{i=0}^{k-1} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} [T_{t_{i+1}}^{\pi}(M) - T_{t_{i+1}}^{\pi'}(M) - (T_{t_i}^{\pi}(M) - T_{t_i}^{\pi'}(M))]^2$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} [T_{t_{i+1}}^{\pi}(M) - T_{t_i}^{\pi}(M) - (T_{t_{i+1}}^{\pi'}(M) - T_{t_i}^{\pi'}(M))]^2$$

$(a-b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$

$$\leq 2 \sum_{i=0}^{k-1} [(T_{t_{i+1}}^{\pi}(M) - T_{t_i}^{\pi}(M))^2 + (T_{t_{i+1}}^{\pi'}(M) - T_{t_i}^{\pi'}(M))^2]$$

$$= 2 T_t^{\pi''}(T^{\pi}(M)) + 2 T_t^{\pi''}(F^{\pi'}(M))$$

Step 3 : Choose nested partitions $\pi^1 \subseteq \pi^2 \subseteq \dots$ with $|\pi^n| \to 0$ as $n \to \infty$. We will show that for fixed t the sequence $T_t^{\pi^n}(M)$ is Cauchy in L^2 and hence converges in L^2.

Assume $t \in \pi^n$ for all $n \geq q$.

We estimate for $t_j \leq s_k < s_{k+1} \leq t_{j+1}$ when $t_j, t_{j+1} \in \pi^m$, $s_k, s_{k+1} \in \pi^n$ and $n \geq m$,

$$T_{s_{k+1}}^{\pi^m}(M) - T_{s_k}^{\pi^m}(M)$$

$$= (M_{s_{k+1}} - M_{t_j})^2 - (M_{s_k} - M_{t_j})^2$$

$$= (M_{s_{k+1}} - M_{s_k})(M_{s_{k+1}} + M_{s_k} - 2M_{t_j})$$

But M is bounded so the second term is bounded. If we square we get

$$T_t^{\pi^n}(F^{\pi^m}(M))$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} (M_{s_{i+1}} - M_{s_i})^2 (M_{s_{i+1}} + M_{s_i} - 2M_{t_j})^2$$

It follows that

$$E[\,T_t^{\pi^n}(T^{\pi^n}(M))]$$

$$\leq \sum_{i=0}^{k-1} E[\;\sup_i (M_{s_{i+1}} + M_{s_i} - 2M_{t_j})^2 \cdot (M_{s_{i+1}} - M_{s_i})^2]$$

$$= E[\;\sum_{i=0}^{k-1} (M_{s_{i+1}} - M_{s_i})^2 \cdot [\sup_i (M_{s_{i+1}} - M_{s_i} - 2M_{t_j})]^2]$$

$$= E[\;T_t^{\pi^n}(M) \cdot [\sup_i (M_{s_{i+1}} + M_{s_i} - 2M_{t_j})]^2]$$

$$\leq E[(T_t^{\pi^n}(M))^2]^{1/2}$$

$$E[\;(\sup_i (M_{s_{i+1}} + M_{s_i} - 2M_{t_j}))^4]^{1/2}$$

by Cauch-Schwarz. The second term is bounded by $(4k)^4$ and by continuity $\to 0$ as $n \to \infty$. So by dominated convergence the second expectation $\to 0$ as $n \to \infty$.

Step 4: We need $E[(T_t^{\pi^n}(M))^2]$ to be blounded. to conclude the proof.

But we have for any partition π with $0, t \in \pi$

$$E\left[\left(\sum_{i=0}^{k-1} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2\right)^2\right]$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} E\left[(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^4\right]$$

$$+ 2 \sum_{i=0}^{k-2} \sum_{j=i+1}^{k-1} E\left[(M_{t_{j+1}} - M_{t_j})^2 (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2\right]$$

We estimate

$$\sum_{i=0}^{k-1} E\left[(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^4\right] \leq$$

$$\leq 4K^2 \sum_{i=0}^{k-1} E\left[(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2\right]$$

$$= 4K^2 \sum_{i=0}^{k-1} E\left[M_{t_{i+1}}^2 - M_{t_i}^2\right]$$

$$= 4K^2 \sum_{i=0}^{k-1} \left[E[M_t^2] - E(M_0^2)\right]$$

$$\leq 4K^2 \cdot K^2$$

$$= 4K^4$$

We estimate

$$E\left[(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 \sum_{j=i+1}^{k-1} (M_{t_{j+1}} - M_{t_j})^2\right]$$

$$= E\left[E\left[\text{—''—} \mid \mathcal{F}_{t_i}\right]\right]$$

$$= E\left[(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 (M_t^2 - M_{t_{i+1}}^2)\right]$$

$$= E\left[(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 (M_t - M_{t_{i+1}})^2 \right]$$

$$\leq 2M^2 \, E\left[(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 \right]$$

Summation over i gives

$$2 \sum_{i=0}^{k-2} \sum_{j=i+1}^{k-1} E\left[(M_{t_{j+1}} - M_{t_j})^2 (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 \right]$$

$$\leq 4K^2 \sum_{i=0}^{k-2} E\left[(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 \right]$$

$$= 4K^2 \sum_{i=0}^{k-2} E\left[M_{t_{i+1}}^2 - M_{t_i}^2 \right]$$

$$= 4K^2 \left[E[M_{t_{k-1}}^2] - E[M_0^2] \right]$$

$$\leq 4K^2 \cdot K^2 = 4K^4 .$$

Step 5 : The random variables $T_t^{\pi^n}(M)$ converge in L^2 to $T_t(M)$.

But Doob's inequality says that

$$P\left(\sup_{0 \leq s \leq t} \left| T_s^{\pi^m}(M) - T_s^{\pi^n}(M) \right| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{E\left[(T_t^{\pi^m}(M) - T_t^{\pi^n})^2 \right]}{\varepsilon^2}$$

This means that there is a subsequence $T_t^{\pi^{n_k}}(M)$ such that $T_t^{\pi^{n_k}}(M) \to T_t(M)$ uniformly.

So $T_s(M)$ can be chosen to be continuous. Since $T_t^{\pi^n}(M) \xrightarrow{L^2} T_t(M)$ the difference $X_t^2 - T_t(M)$ must be a martingale (practice session).

Finally we need $T_t(M)$ to be increasing. If we take π^n to contain points $t \cdot k \cdot 2^{-n}$ then $T_t^{\pi^n}$ is increasing on dyadics. This means that T_t is increasing on dyadics. By continuity T_t must be increasing.

Step 6: Uniqueness is straightforward. We assumed that M is bounded.

Suppose M is a local martingale and T_n the localizing sequence. We argued that for continuous M we can choose T_n so that M^{T_n} is bounded, and hence has a quadratic variation $\langle M^{T_n} \rangle$. Furthermore, we can choose T_n such that $P(T_n < \infty) = 1$.

Dokazali smo, da je $M^2 - \langle M \rangle$ lokalni martingal za kvadratno variacijo $\langle M \rangle$.

Iz definicij zlahka sledi, da je $\langle aM \rangle = a^2 \langle M \rangle$. Če sta M in N lokalna martingala, sta to tudi $(M+N)$ in $(M-N)$. Po izreku 3.11 obstajata kvadratični variaciji $\langle M+N \rangle$ in $\langle M-N \rangle$. Torej je

$$(M+N)^2 - \langle M+N \rangle \text{ lokalni martingal}$$

in

$$(M-N)^2 - \langle M-N \rangle \text{ lokalni martingal.}$$

Potem je lokalni martingal tudi $1/4$ x razlika obeh. Dobimo, da je

$$M_t \cdot N_t - \frac{1}{4}\left[\langle M+N \rangle_t - \langle M-N \rangle_t\right]$$

lokalni martingal.

<u>Definicija</u>: Naj bosta M in N lokalna martingala. Kvadratično kovariacijo M in N definiramo kot

$$\langle M, N\rangle_t = \frac{1}{4}\left[\langle M+N\rangle_t - \langle M-N\rangle_t\right].$$

Iz definicij takoj sledi nekaj trditev:

(i) Kvadratična kovariacija je edini zvezni prilagojeni proces, za katerega je $M \cdot N - \langle M, N\rangle$ lokalni martingal.

(ii) Veljajo naslednje trditve:

$$\langle M, M\rangle = \langle M\rangle$$

$$\langle M_1 + M_2, N\rangle = \langle M_1, N\rangle + \langle M_2, N\rangle$$

$$\langle M, N_1 + N_2\rangle = \langle M, N_1\rangle + \langle M, N_2\rangle$$

$$\langle aM, bN\rangle = ab\,\langle M, N\rangle.$$

$$\langle M, N\rangle = \langle N, M\rangle$$

Iz konstrukcije $\langle M \rangle$ sledi, da za omejen martingal M vsote

$$T_t^{\pi} = \sum_{j=0}^{n-1} (M_{t_{j+1}} - M_{t_j})^2 + (M_t - M_{t_n})$$

za $t_n \le t \le t_{n+1}$ konvergirajo v L^2, proti $\langle M \rangle_t$ za vsak $0 \le t \le T$, ko $|\pi| \to 0$

Po Doobovi neenakosti dobimo

$$E\left[\left(\sup_{0\le t\le T} |T_t^{\pi} - \langle M \rangle_t|\right)^2\right]$$

$$= E\left[\left(\sup_{0\le t\le T} \Big|\underbrace{(M_t^2 - \langle M\rangle_t) - (M_t^2 - T_t^{\pi})}_{\text{razlika omejenih martingalov}}\Big|\right)^2\right]$$

$$\le 4\, E\left[|T_T^{\pi} - \langle M\rangle_T|^2\right]$$

$$\to 0.$$

To pomeni, da

$$\sup_{0\le t\le T} |T_t^{\pi} - \langle M\rangle_t| \xrightarrow{L^2} 0,$$

ko $|\pi| \to 0$.

Izrek 3.12: Naj bo M lokalni martingal in $\langle M \rangle$ njegova kvadratična variacija. Za $T > 0$ velja

$$\sup_{0 \le t \le T} |T_t^\pi - \langle M \rangle_t| \xrightarrow{P} 0,$$

ko $|\pi| \to 0$.

Dokaz: Naj bo τ_n zaporedje lokalizacijskih časov ustavljanja. Naj bo $\varepsilon > 0$. Privzemimo, da so M^{τ_n} omejeni. Na množici $\{\tau_n = T\}$ se M^{τ_n} in M ne razlikujeta. Lahko si izberemo dovolj velik N, da bo $P(\tau^n < T) < \varepsilon$. Ker je M^{τ_n} omejen, bo za $\eta > 0$ $|\pi| < \delta$ veljalo

$$P\left(\sup_{0 \le t \le T} |T^\pi(M^{\tau_n}) - \langle M \rangle^{\tau_n}| > \eta \right) < \varepsilon$$

Ampak M^{T_n} in M se razlikujeta samo na $\{T^n < T\}$. Zato je

$$P\Big(\sup_{0\le t\le T} |T_t^{\pi}(M) - \langle M\rangle_t| > \eta\Big)$$

$$< \varepsilon + \varepsilon$$

ker sta $\varepsilon, \eta > 0$ poljubna, trditev drži.

<u>Posledica</u>: Če za lokalna martingala M, N definiramo

$$S^{\pi}(M,N) = \sum_{j=0}^{n-1} (M_{t_{j+1}} - M_{t_j})(N_{t_{j+1}} - N_{t_j})$$

$$+ (M_t - M_{t_n})(N_t - N_{t_n}),$$

potem iz izreka 3.12 sledi

$$\sup_{0\le t\le T} |S_t^{\pi}(M,N) - \langle M,N\rangle_t| \xrightarrow{P} 0, \text{ ko}$$

$|\pi| \to 0$.

Za nadaljevanje rabimo naslednje dejstvo. Če je

$$\beta(t) = \int_0^t g(s)\, d\alpha(s),$$

je

$$\int_0^t f(s)\, d\beta(s) = \int_0^t f(s)\, g(s)\, d\alpha(s).$$

Privzemamo, da vsi integrali obstajajo v smislu Lebesgue-Stieltjesovega integrala.
(Seminarska naloga za nekatere)

<u>Izrek 3.13</u>: Naj bo M martingal z $E(M_t^2) < \infty$ za $0 \le t \le T$ in H integrand z $E\left[\int_0^T H_s^2\, d\langle M\rangle_s\right] < \infty$. Integral $X_t = \int_0^t H_s\, dM_s$ je edini martingal z $E(X_t^2) < \infty$ za $0 \le t \le T$, tak da je za vsak drug martingal N z $E(N_t^2) < \infty$ za $0 \le t \le T$

$$\langle X, N\rangle_t = \int_0^t H_s\, d\langle M, N\rangle_s.$$

Dokaz: Za elementarne integrande H lahko trditev neposredno preverimo. Naj bo H^n zaporedje elementarnih integrandov z

$$E\left[\int_0^t (H_s^n - H_s)^2 \, d\langle M\rangle_s\right] \to 0, \quad \text{ko } n \to \infty.$$

Vemo:
$$X_t^n = \int_0^t H_s^n \, dM_s \xrightarrow{L^2} X_t.$$

Sledi: $(X_t^n)^2 \xrightarrow{L^1} X_t^2$. Za oceno

$$\int_0^t (H_s^n - H_s) \, d\langle M, N\rangle_s$$

uporabimo neenačbo Kunita–Watanabe (Karatzas & Shreeve, Brownian motion and stochastic calculus, Springer, 1991, str. 142).

$$\left| \int_0^t (H_s^n - H_s) \, d\langle M, N\rangle \right|$$

$$\leq \left(\int_0^t (H_s^n - H_s)^2 \, d\langle M\rangle_s\right)^{1/2} \left(\int_0^t d\langle N\rangle_s\right)^{1/2}$$

$$= \left(\int_0^t (H_s^n - H_s)^2 \, d\langle M\rangle_s\right)^{1/2} \langle N\rangle_t^{1/2}$$

Sledi

$$E\left[\left|\int_0^t (H_s^n - H_s)\, d\langle M,N\rangle_s\right|\right]$$

Cauchy-Schwarz

$$\leq E\left[\int_0^t (H_s^n - H_s)^2 d\langle M\rangle_s\right]$$

$$\cdot\ E[N_t]$$

Po predpostavki je $E(\langle N\rangle_t) = E(N_t^2)$ $\leq E(N_T^2) < \infty$. Sledi, da

$$\int_0^t H_s^n\, d\langle M,N\rangle_s \xrightarrow{L^1} \int_0^t H_s\, d\langle M,N\rangle_s .$$

Vemo:

$$X_t^n N_t - \int_0^t H_s^n\, d\langle M,N\rangle_s$$

je martingal.

$$X_t^n \cdot N_t \xrightarrow{L^1} X \cdot N \quad \text{(Cauchy-Schwarz)}$$

$$\int_0^t H_s^n\, d\langle M,N\rangle_s \xrightarrow{L^1} \int_0^t H_s\, d\langle M,N\rangle_s$$

Po lemi sledi, da je

$$X_t \cdot N_t - \int_0^t H_s \, d\langle M, N\rangle_s$$

martingal, torej je

$$\langle X, N\rangle_t = \int_0^t H_s \, d\langle M, N\rangle_s.$$

Oglejmo si posledice. (i) Naj bo $X_t = \int_0^t H_s \, dM_s$. Računamo

za $Z_t = \int_0^t K_s \, dX_s$

$$\langle Z, N\rangle_t = \int_0^t K_s \, d\langle X, N\rangle_s$$

$$= \int_0^t K_s \cdot H_s \, d\langle M, N\rangle_s$$

po pripombi o Stieltjes-Lebesguovih integralov.

Sledi: $\int_0^t K_s \, dX_s = \int_0^t H_s \cdot K_s \, dM_s$.

(ii) Kako je z ustavljanjem?

Vemo:

$$X^T_t = \int_0^t H_s \cdot 1(s \leq T)\, dM_s .$$

Kaj pa $\int_0^t H_s\, dM^T_s$?

<u>Lema 3.14</u>: Naj bosta M in N zvezni lokalni martingala in T čas ustavljanja. Velja

$$\langle M^T, N^T \rangle = \langle M, N^T \rangle$$
$$= \langle M^T, N \rangle = \langle M, N \rangle^T$$

<u>Dokaz</u>: Vemo, da je

[illegible] in

$$M^T_t = \int_0^t 1(s \leq T)\, dM_s$$

Po izreku 3.13 je

$$\langle M^T, N \rangle_t = \int_0^t 1(s \leq T)\, d\langle M, N \rangle_s$$
$$= \langle M, N \rangle^T_s$$

ker je $\langle M^T, N^T \rangle$ očitno $\langle M, N \rangle^T$, lema sledi.

Računamo za $Y_t = \int_0^t H_s \, dM^T_s$

$$
\begin{aligned}
\langle Y, N\rangle_t &= \int_0^t H_s \, d\langle M^T, N\rangle_s \\
&= \int_0^t H_s \, d\langle M, N\rangle^T_s \\
&= \langle X, N\rangle^T \\
&= \langle X^T, N\rangle
\end{aligned}
$$

Sledi

$$\int_0^t H_s \, dM^T_s = X^T_t .$$

Lokalizacijo torej imamo tudi za integratorje! Integriranje lahko razširimo na lokalne martingale, za katere je

$$P\left(\int_0^T H_s^2 \, d\langle M\rangle_s < \infty\right) = 1 \; !$$

Vse gre z lokalizacijo kot v primeru Brownovega gibanja.

Vpeljimo oznako $X = H \circ M$, če je $X_t = \int_0^t H_s \, dM_s$. Za stohastične integrale veljajo pravila

(i) $(\alpha H_1 + \beta H_2) \circ M = \alpha H_1 \circ M + \beta H_2 \circ M$

linearnost

(ii) $\langle H \circ M, K \circ N \rangle = HK \circ \langle M, N \rangle$

(iii) $H \circ (K \circ M) = (H \circ K) \circ M$

$= HK \circ M$

asociativnost

(iv) $H \circ M^T = H 1_{[0,T]} \circ M$

$= (H \circ M)^T$

Super tabela!

3.4. Semimartingales and general Itô formula

To be completely free we need one more generalization.

<u>Definition</u>: A process X is a continuous semimartingale if it can be written as

$$X = M + A$$

where M is a continuous local martingale and A is a continuous adapted process.

Note that the split $X = M + A$ is unique due to Theorem ....

If H is an integrand with

$$P\left(\int_0^t H_s^2 \, d\langle M\rangle_s < \infty\right) = 1$$

we define

$$\int_0^t H_s \, dX_s = \int_0^t H_s \, dM_s + \int_0^t H_s \, dA_s .$$

We will assume H to be locally bounded.

<u>Remark</u>: All the terms are well defined. If H is locally bounded then the integral

$\int_0^t H_s \, dA_s$ has bounded total variation i.e. $H \cdot X$ is again a semimartingale.

<u>Definition</u>: If $X = M + A$ and $Y = N + B$ are semimartingales we define

$$\langle X, Y \rangle = \langle M, N \rangle .$$

Some analysis shows that for a sequence of partitions π^n of $[0,T]$ we get

$$\sum_{i=0}^{k-1} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})(Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}) \xrightarrow{P} \langle X, Y \rangle_T$$

as $|\pi^n| \to 0$.

This last statement is the key to the general Itô formula.

3.4. Semimartingali in splošna Itôva formula

Itôva formula

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t f'(B_s)\, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)\, ds$$

je motivacija za še eno, ampak tokrat zadnjo posplošitev.

<u>Definicija</u>: Prilagojen zvezen proces X je <u>semimartingal</u>, če je oblike $X = M + A$, kjer je M lokalni martingal in A proces z omejeno totalno variacijo.

<u>Opomba</u>: Razcep je zaradi leme 3.9 enoličen do konstante natančno.

__Definicija__: Integrand H je lokalno omejen, če obstajo lokalizacijsko zaporedje časov ustavljanja T^n in zaporedje konstant C_n, da je $|H^{T_n}| \leq C_n$ za vsak n.

Če je X semimartingal $X = M + A$, definiramo

$$\int_0^t K_s \, dX_s = \underbrace{\int_0^t K_s \, dM_s}_{\text{stoh. int.}} + \underbrace{\int_0^t K_s \, dA_s}_{\text{Stieltjesov integral.}}$$

__Opomba__: Vsi zvezni integrandi so lokalno omejeni.

__Definicija__: Kvadratično variacijo semimartingalov $X = M + A$ in $Y = N + B$ definiramo kot

$$\langle X, Y \rangle = \langle M, N \rangle.$$

Za dokaz splošne Itôve leme brez dokaza navajamo še nekaj trditev:

(i) Izrek 3.12 in njegova posledica veljata tudi za semimartingale. Dokaz je samo majhna razširitev.

(ii) Za lokalno omejene integrande K je proces $\int_0^t K_s dA_s$ proces z omejeno totalno variacijo, tako da je $\int_0^t K_s dX_s = (K \cdot X)_s$ tudi semimartingal.

(iii) Velja naslednja stohastična varianta izreka o dominirani konvergenci: naj bodo K^n lokalno omejeni integrandi z $K^n \to K$ po točkah. Naj bo za lokalno omejen proces $|K^n| \leq H$ za vse n.

Potem velja

$$\sup_{0\le t\le T} |(K^n \circ X)_t - (K\circ X)_t| \xrightarrow{P} 0,$$

ko $n\to\infty$. Dokaz je spet par vrstic in sledi iz prejšnjih izrekov (glej M. Yor, D. Revuz, Continuous Martingal Calculus, Springer, 1990, str. 135).

Pripravljeni smo na splošno Itôvo formulo.

<u>Izrek 3.15</u>: Naj bosta X, Y zvezna semimartingala. Velja

$$X_t\cdot Y_t - X_0\cdot Y_0 = \int_0^t X_s\,dY_s + \int_0^t Y_s\,dX_s + \langle X,Y\rangle_s$$

in

$$X_t^2 - X_0^2 = 2\int_0^t X_s\,dX_s + \langle X\rangle_s.$$

Dokaz: Dovolj je dokazati drugo trditev. Zapišemo za particijo $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = t$ intervala $[0, t]$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \left(X_{t_{j+1}} - X_{t_j} \right)^2$$

$$= X_t^2 - X_0^2$$

$$- 2 \sum_{j=0}^{n} X_{t_j} \left(X_{t_{j+1}} - X_{t_j} \right).$$

Vemo: ko $|\pi| \to 0$,

$$\sum_{j=0}^{n-1} \left(X_{t_{j+1}} - X_{t_j} \right) \xrightarrow{P} \langle X \rangle_t$$

in

$$\sum_{j=0}^{n-1} X_{t_j} \left(X_{t_{j+1}} - X_{t_j} \right) \xrightarrow{P} \int_0^t X_s \, dX_s .$$

S tem je druga trditev dokazana, prva pa sledi z uporabo druge na $X+Y$ in $X-Y$.

Formuli v izreku 3.15 rečemo formula za parcialno odvajanje. Simbolično bomo pisali, če je

$$Y_t = \int_0^t H_s \, dX_s$$

$$dY_t = H_t \cdot dX_t \, .$$

V tej obliki je

$$d(XY)_t = X_t \, dY_t + Y_t \cdot dX_t + d\langle X, Y \rangle_t \, .$$

Te oznake bodo učinkovite za računanje.

Lotimo se Itôve formule.

<u>Izrek 3.16</u>: Naj bodo $X^1, \dots, X^d$ zvezni semimartingali in F dvakrat zvezno parcialno odvedljiva funkcija. Velja

$$F(X_t^1, \dots, X_t^d) - F(X_0^1, \dots, X_0^d)$$

$$= \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i}(X_s^1, \dots, X_s^d)\, dX_s^i$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \int_0^{t_2} \frac{\partial F}{\partial x_i \partial x_j}(X_s^1, \dots, X_s^d)\, d\langle X^i, X^j\rangle_s$$

<u>Ideja dokaza</u>:

(i) Najprej bomo utemeljili, da formula velja za F, ki so polinomi spremenljivk $x_1, x_2, \dots, x_d$.

(ii) Splošno funkcijo F lahko aproksimiramo s polinomom.

(iii) Uporabimo stohastično verzijo izreka o dominirani konvergenci.

(iv) Pri vsem upoštevamo, da je dovolj dokazati formulo za ustavljene proces $(X^k)^{T^n}$, če je T^n lokalizacijsko zaporedje.

<u>Dokaz</u>: Omejimo se na $d=2$.

U splošnem je dokaz enak, le nekaj več je pisanja. Formula očitno velja za $F(x,y) = 1$.

Recimo, da velja za F_1 in F_2.

Potem velja za $aF_1 + bF_2$.

Če formula velja za F, definirajmo $G(x,y) = x F(x,y)$.

Označimo $Z_t = F(X_t, Y_t)$. Iz predpostavke sledi

$$
\begin{aligned}
dZ_t = \; & \frac{\partial F}{\partial x}(X_t, Y_t)\, dX_t + \frac{\partial F}{\partial y}(X_t, Y_t)\, dY_t \\
& + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(X_t, Y_t)\, d\langle X\rangle_t \\
& + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(X_t, Y_t)\, d\langle X, Y\rangle_t \\
& + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(X_t, Y_t)\, d\langle Y\rangle_t
\end{aligned}
$$

Po izreku 3.15 je

$$X_t \cdot Z_t - X_0 \cdot Z_0$$

$$= \int_0^t X_s \, dZ_s + \int_0^t Z_s \, dX_s$$

$$+ \langle X, Z \rangle_t$$

Člen dZ_s poznamo in lahko začnemo zbirati člene.

Zberemo člene, ki vsebujejo dX_s:

$$\int_0^t X_s \frac{\partial F}{\partial x}(X_s, Y_s) \, dX_s$$

$$+ \int_0^t F(X_s, Y_s) \, dX_s$$

$$= \int_0^t \frac{\partial G}{\partial x}(X_s, Y_s) \, dX_s$$

Zberemo člene z dY_s:

$$\int_0^t X_s \frac{\partial F}{\partial y}(X_s, Y_s)\, dY_s$$

$$= \int_0^t \frac{\partial G}{\partial y}(X_s, Y_s)\, dY_s$$

Potrebujemo še $\langle X, Z\rangle$. Uporabimo pravila

$$\langle X_1 + X_2, Y\rangle = \langle X_1, Y\rangle + \langle X_2, Y\rangle$$

$$\langle X, K \circ X\rangle = K \circ \langle X\rangle$$

$$\langle X, H \circ Y\rangle = H \circ \langle X, Y\rangle$$

ter dejstvo, da je $\langle X, A\rangle = 0$, če ima A končno totalno variacijo.

Sledi

$$d\langle X, Z\rangle_t = \frac{\partial F}{\partial x}(X_t, Y_t)\, d\langle X\rangle_t$$

[illegible] $d\langle Y\rangle_t.$

$$+ \frac{\partial F}{\partial y}(X_t, Y_t)\, d\langle X, Y\rangle_t$$

Гледаме члена с $d\langle X\rangle_s$:

$$\frac{1}{2}\int_0^t X_s \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(X_s, Y_s)\, d\langle X\rangle_s$$

$$+ \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(X_s, Y_s)\, d\langle X\rangle_s \quad = (*)$$

Ампак:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x F(x,y)\right)$$

$$= x \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial F}{\partial x}$$

$$(*) = \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(X_s, Y_s)\, d\langle X\rangle_s$$

Гледаме члена с $d\langle X, Y\rangle_s$:

$$\int_0^t X_s \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(X_s, Y_s)\, d\langle X, Y\rangle_s$$

$$+ \int_0^t \frac{\partial F}{\partial y}(X_s, Y_s)\, d\langle X, Y\rangle_s \quad = (*)$$

Ампак:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}\left(x F(x,y)\right) = x \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial F}{\partial y}$$

$$(*) \quad = \int_0^t \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}(X_s, Y_s)\, d\langle X, Y\rangle_s$$

Zberemo člene z $d\langle Y\rangle_s$.

$$\frac{1}{2} \int_0^t X_s \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(X_s, Y_s)\, d\langle Y\rangle_s$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}(X_s, Y_s)\, d\langle Y\rangle_s .$$

Ha! Formula velja za $x F(x,y)$ in podobno za $y F(x,y)$.

Posledično velja formula za vse polinome $P(x,y)$.

Privzemimo, da sta X, Y vedno v omejeni množici U.

Funkcijo F lahko na omejeni množici enakomerno aproksimiramo z zaporedjem polinomov P^n, tako da enakomerno konvergirajo tudi vsi prvi in drugi odvodi.

Po stohastičnem in navadnem izreku o dominirani konvergenci:

$$P^n(X_t, Y_t) \xrightarrow{s.g.} F(X_t, Y_t), \quad n \to \infty$$

$$P^n(X_0, Y_0) \xrightarrow{s.g} F(X_0, Y_0), \quad n \to \infty$$

$$\int_0^t \frac{\partial P^n}{\partial x}(X_s, Y_s)\, dX_s \xrightarrow{P} \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(X_s, Y_s)\, dX_s$$

(stohastična verzija izreka o dominirani konvergenci).

$$\int_0^t \frac{\partial^2 P^n}{\partial x^2}(X_s, Y_s)\, d\langle X\rangle_s \to \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(X_s, Y_s)\, d\langle X\rangle_s$$

po navadnem izreku o dominirani konvergenci.

Če X, Y nista na omejeni množici, ju ustavimo v ustreznem T^n in Itôva formula velja za X^{T^n}, Y^{T^n}. Ampak zaradi lokalizacije se do T integrali ujemajo. Ko $T^n \uparrow \infty$ vidimo, da Itôva formula velja v splošnem.

Zmaga!

4.2. Black-Scholesov model, vrednotenje opcij

V zveznem času bo model gibanja cen temelja semimartingal. Najbolj znan model je Black-Scholesov model dan z

$$S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2} t},$$

kjer sta μ in $\sigma > 0$ parametra. Model je zvezna varianta binomskega modela v smislu, da so za $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ kvocienti

$$\frac{S_{t_1}}{S_{t_0}}, \frac{S_{t_2}}{S_{t_1}}, \dots, \frac{S_{t_n}}{S_{t_{n-1}}}$$

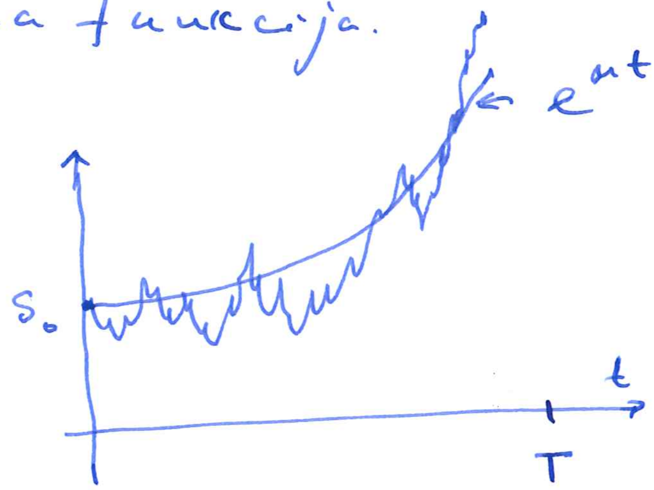
neodvisni, oziroma je $\log S_t$ Brownovo gibanje pomnoženo s konstanto + premica.

Ker vemo, da je $e^{\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t}$ martingal, je

$$E(S_t) = e^{\mu t},$$

torej je pričakovan donos eksponentna funkcija.

Slika:



Ves čas se bomo omejili na končen interval $[0,T]$, kjer bo T čas dospetja.

Oznake:

- T, čas dospetja
- $(H^0_t, H_t)_{0 \le t \le T}$ komponenti varovalne listnice.
- S_t, $0 \le t \le T$ cena delnice.

- V_t cena opcije v trenutku t, $0 \leq t \leq T$
- $\tilde{S}_t = e^{-rt} \cdot S_t$ je diskontirana cena delnice.
- $\tilde{V}_t = e^{-rt} V_t$ je diskontirana cena opcije.
-

<u>Opombe</u>:

(i) Zaenkrat privzemamo, da obstaja trgovalna strategija, ki replicira opcijo.

(ii) Za parameter σ privzemamo, da je znan.

Potrebujemo še definicijo trgovalne strategije, ki je samofinancirajoča.

Sklepamo po analogiji z diskretnim primerom

$$V_t - V_0$$

$$= \sum_{s=0}^{t-1} (V_{s+1} - V_s)$$

$$= \sum_{s=0}^{t-1} (H_s^0 \cdot S_{s+1}^0 + H_s \cdot S_{s+1} - H_s^0 \cdot S_s^0 - H_s \cdot S_s)$$

$$= \sum_{s=0}^{t-1} \Big[\underbrace{H_s^0 (S_{s+1}^0 - S_s^0)}_{\approx \int_0^t H_s^0 \, dS_s^0} + \underbrace{H_s (S_{s+1} - S_s)}_{\approx \int_0^t H_s \, dS_s} \Big]$$

Pri tem je

$$V_t - V_0 = H_t^0 \cdot S_t^0 + H_t \cdot S_t - H_0^0 \cdot S_0^0 + H_0 \cdot S_0$$

Definicija: Trgovalna strategija $(H_t^0, H_t)_{0 \le t \le T}$ je samofinancirajoča glede na filtracijo $(\mathcal{F}_t)_{0 \le t \le T}$, če velja:

(i) Procesa H_t^0 in H_t sta prilagojena.

(ii) $$H_t^0 \cdot S_t^0 + H_t \cdot S_t = H_0^0 S_0^0 + H_0 \cdot S_0 + \int_0^t H_u^0 \, dS_u^0 + \int_0^t H_u \, dS_u$$

(iii) $$\int_0^T |H_t^0| \, dt < \infty \quad \text{in} \quad \int_0^T H_t^2 \, dt < \infty.$$

Opombi:

(i) Pogoj (iii) je zgolj tehnične narave.

(ii) Pogoj (ii) lahko zapišemo v diferencialni obliki kot

$$dV_t = H_t^0 \, dS_t^0 + H_t \cdot dS_t$$

Izrek 4.1: Definirajmo $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$ in $\tilde{V}_t = e^{-rt} V_t$. Trgovalna strategija $(H_t^0, H_t)_{0 \le t \le T}$ je samofinancirajoča, če in samo če je

$$\tilde{V}_t = \tilde{V}_0 + \int_0^t H_u \, d\tilde{S}_u$$

za $0 \le t \le T$.

Dokaz: Iz definicij sledi, da je $dS_t^0 = r e^{rt} \cdot dt$. Računamo s privzetkom, da je strategija samofinancirajoča

$$d\tilde{V}_t = d(e^{-rt} V_t)$$

$$= -r e^{-rt} (\cancel{H_t^0 e^{rt}} + H_t \cdot S_t)$$

$$+ e^{-rt} (\cancel{H_t^0 \cdot r e^{rt} dt}$$

$$+ H_t \cdot dS_t)$$

$$= H_t (-r e^{-rt} S_t \, dt + e^{-rt} dS_t)$$

$$= H_t \, d\tilde{S}_t$$

Obratno privzemimo, da velja

$$\tilde{V}_t = \tilde{V}_0 + \int_0^t H_u \, d\tilde{S}_u .$$

Prepišemo

$$-re^{-rt} V_t \, dt + e^{-rt} dV_t$$

$$= H_t \, d\tilde{S}_t$$

$$= H_t \left(-re^{-rt} S_t \, dt + e^{-rt} dS_t\right)$$

Upoštevamo

$$V_t = H_t^\circ S_t^\circ + H_t \cdot S_t$$ in

Pokrajšamo enake člene na levi in desni in ostane

$$dV_t - \underbrace{r H_t^\circ S_t^\circ dt}_{= H_t^\circ \cdot dS_t^\circ} = H_t \cdot dS_t ,$$

torej

$$dV_t = H_t^\circ \cdot dS_t^\circ + H_t \cdot dS_t$$

Enačba iz izreka 4.1. bo izhodišče za vrednotenje opcij.

Glavna ideja: če bi bil proces $\tilde{S}_t$ martingal, bi bil pod ustreznimi predpostavkami tudi integral $\int_0^t H_u \, d\tilde{S}_u$ martingal in bi veljalo

$$E(\tilde{V}_T) = \tilde{V}_0 + \cancel{E\left[\int_0^t H_u \, d\tilde{S}_u\right]}^{\,0}$$

$$= \tilde{V}_0 + 0.$$

Vrednost opcije bi lahko izračunali kot pričakovano vrednost

$$E(\tilde{V}_T) = E\left[(S_T - K)_+ \cdot e^{-rT}\right]$$

za, recimo, evropsko prodajno opcijo. Podobno bi lahko rekli, ker bi bil proces $\tilde{V}_t$

martingal, da je

$$\tilde{V}_t = E[\tilde{V}_T \mid \mathcal{F}_t].$$

Vendar $\tilde{S}_t$ ni martingal !

Potrebujemo še idejo <u>zamenjave mere.</u> Formalno je slučajna spremenljivka X merljiva funkcija $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to \mathbb{R}$. Paru $(\Omega, \mathcal{F})$ moramo dodati še verjetnostno mero P, da dobi X porazdelitev $\mu_X(A) = P(X \in A)$ in pričakovano vrednost $E(X)$. Tako porazdelitev kot $E(X)$ sta odvisne od izbire verjetnostne mere P, zato bomo to odvisnost označili z $E_P(X)$. Če izberemo drugačno mero Q, bomo dobili drugačno porazdelitev X in drugačen $E_Q(X)$.

Pri tem se X kot funkcija na $(\Omega, \mathcal{F})$ ne bo spremenila. Eden od načinov uvajanja nove mere na $(\Omega, \mathcal{F})$ je naslednji: recimo, da je U nenegativna slučajna spremenljivka z $E(U) = 1$. Recimo, da na $(\Omega, \mathcal{F})$ že imamo mero P. Definiramo novo mero Q z

$$\boxed{Q(A) = E_P[U \cdot 1_A].}$$

Mera Q je verjetnostna, ker je

$$Q(\Omega) = E_P[U \cdot 1_\Omega] = E_P(U) = 1.$$

To, da je mera, sledi iz izreka o dominirani konvergenci. Če je X slučajna spremenljivka, velja

$$\boxed{E_Q(X) = E_P(X \cdot U).}$$

Formula velja za indikator $X = 1_G$ po definiciji, torej zaradi linearnosti za stopničaste X in po izreku o dominirani konvergenci za vse X.

Izrek 4.2: Naj bo U na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ taka, da je $E(U) = 1$ in $P(U > 0) = 1$. Če $X_n \xrightarrow{P} X$, ko $n \to \infty$, potem $X_n \xrightarrow{Q} X$, ko $n \to \infty$ in obratno.

Dokaz: Iz definicij sledi, da je $P(A) = 0$, če in samo če je $Q(A) = 0$. Vemo, da $X_n \xrightarrow{P} X$, če in samo če ima vsako podzaporedje nadaljnje podzaporedje, ki konvergira s.g. Ampak skoraj gotova konvergenca pa je enaka za P in za Q. Torej je izrek dokazan.

Oglejmo si naslednjo situacijo: recimo, da imamo dano filtracijo $(\mathcal{F}_t)_{0 \le t \le T}$ in je $Q(A) = E_P(U \cdot 1_A)$ za U z $P(U > 0) = 1$. Če je S_t semimartingal na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ znamo definirati integral

$$\int_0^t H_u \cdot dS_u .$$

Začnemo z elementarnimi integrali in računamo postopoma. Če je S_t semimartingal tudi na $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ lahko naredimo isto. Konstruiramo integral tako, da ga gledamo najprej za elementarne integrale in nadaljujemo. Ampak za elementarne integrale dobimo enak rezultat! Definicija ni odvisna od tega ali izberemo P ali Q.

V obeh primerih vemo, da za zvezen integrand H velja

$$\sum_{j=0}^{n-1} H_{u_j} (S_{u_{j+1}} - S_{u_j}) \xrightarrow{P} \int_0^t H_u \, dS_u$$

in

$$\sum_{j=0}^{n-1} H_{u_j} (S_{u_{j+1}} - S_{u_j}) \xrightarrow{Q} \int_0^t H_u \, dS_u$$

Ampak limiti sta enaki kot merljivi funkciji s.g. po Izreku 4.2!

<u>Sklep</u>: Če je $(S_t)_{0 \le t \le T}$ semimartingal glede na filtracijo $(\mathcal{F}_t)_{0 \le t \le T}$ tako na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ kot na $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ lahko v obeh primerih za zvezne integrande „zgradimo" stohastični integral $\int_0^t H_s \, dS_s$ za $0 \le t \le T$.

Ampak integrala se ujemata kot goli merljivi funkciji.

Ker se integrala ujemata za zvezne integrande, se morata potem sploh ujemati (seminarska naloga).

<u>Sklep</u>: Če imamo samofinancirajočo strategijo $(H_t^0, H_t)_{0 \le t \le T}$ velja

$$\tilde{V}_t = \tilde{V}_0 + \int_0^t H_s \, d\tilde{S}_s .$$

na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Ampak integrala se ujemata, če „gradimo" integrale na $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$. Če torej vemo, da zgornja enačba velja na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, bo veljala tudi na $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$.

<u>Opomba</u>: Pri tem moramo vedeti, da je S_t semimartingal glede na $(\mathcal{F}_t)_{0 \le t \le T}$ tudi na $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$!

To nam bo povedal izrek Girsanova.

Vrnimo se k opcijam.

Definicija: Naj bo B Brownovo gibanje in $\mu \in \mathbb{R}$. Procesu $B^\mu_t = B_t + \mu t$ rečemo Brownovo gibanje s tendenco μ.

Opomba: B^μ je očitno semimartingal.

Naj bo B Brownovo gibanje na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ in definirajmo

$$Q(A) = E_P\left[e^{\mu B_T - \frac{\mu^2}{2} T} \cdot 1_A\right]$$

Izrek 4.3: Na $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ je B Brownovo gibanje s trendom μ.

Dokaz: Najprej opazimo, da je B^μ zvezen proces z neodvisnimi prirastki in je $B^\mu_{t+h} - B^\mu_t \sim N(\mu h, h)$.

Za omejene zvezne funkcije f_k in particijo $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$

računamo

$$E_Q\left(\prod_{k=1}^{n} f_k\left(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}\right)\right)$$

$$= E_P\left[e^{\mu B_T - \frac{\mu^2}{2}T} \cdot \prod_{k=1}^{n} f_k\left(B_{t_k} - B_{t_{k-1}}\right)\right]$$

$$= E_P\left[\prod_{k=1}^{n} e^{\mu\left(B_{t_k} - B_{t_{k-1}}\right)} \times \prod_{k=1}^{n} e^{-\frac{\mu^2}{2}(t_k - t_{k-1})} \times \prod_{k=1}^{n} f_k\left(B_{t_k} - B_{t_{k-1}}\right)\right]$$

(neodvisnost)

$$= \prod_{k=1}^{n} E_P\left[e^{\mu\left(B_{t_k} - B_{t_{k-1}}\right) - \frac{\mu^2}{2}(t_k - t_{k-1})} \cdot f_k\left(B_{t_k} - B_{t_{k-1}}\right)\right]$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{t_k - t_{k-1}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\mu x - \frac{\mu^2}{2}(t_k - t_{k-1})} \times f_k(x)\, e^{-\frac{x^2}{2(t_k - t_{k-1})}}\, dx$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{t_k - t_{k-1}}} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} f_k(x) \cdot e^{-\frac{(x-\mu(t_k - t_{k-1}))^2}{2(t_k - t_{k-1})}} dx$$

$$= \prod_{k=1}^{n} E_P\left[f_k \left(B_{t_k} + \mu t_k - (B_{t_{k-1}} - \mu t_{k-1}\right) \right]$$

$$= E_P\left[\prod_{k=1}^{n} f_k \left(B^{\mu}_{t_k} - B^{\mu}_{t_{k-1}} \right) \right]$$

<u>Sklep</u>: Proces, ki je na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ Brownovo gibanje, na $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ vidimo kot Brownovo gibanje s trendom μ.

Vrnimo se k enačbi

$$\tilde{V}_t = \tilde{V}_0 + \int_0^t H_u \, d\tilde{S}_u,$$

ki velja tako pod P kot pod Q in izberimo ustrezen μ.

Vemo, da je

$$\tilde{S}_t = S_0 e^{-rt + \mu t + \sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2} t}$$

Če za μ v izreku 4.3 izberemo $\frac{r-\mu}{\sigma}$, postane pod Q B Brownovo gibanje s trendom $\frac{r-\mu}{\sigma}$, torej je $B_t = \tilde{B}_t + \frac{r-\mu}{\sigma} t$, kjer je $\tilde{B}_t$ Brownovo gibanje pod Q.

Vstavimo in dobimo

$$\tilde{S}_t = S_0 e^{-rt + \mu t + \sigma(\tilde{B}_t + \frac{r-\mu}{\sigma} t) - \frac{\sigma^2}{2} t}$$

$$= S_0 e^{\sigma \tilde{B}_t - \frac{\sigma^2}{2} t}.$$

Pod Q je $\tilde{S}_t$ martingal!

Če je H_t kolikor toliko pohleven, je tudi

$$\int_0^t H_u \, d\tilde{S}_u$$

pod Q martingal in bo veljalo

$$E_Q(\tilde{V}_T) = V_0 + \underbrace{E_Q\left(\int_0^t H_u \, d\tilde{S}_u\right)}_{=0\,!}$$

$$= V_0$$

in

$$E_Q(\tilde{V}_T \mid \mathcal{F}_t) = \tilde{V}_t .$$

Verjemimo za trenutek, da je H dovolj pohleven. Velja torej

$$V_0 = \tilde{V}_0 = E_Q\left[e^{-rT}(S_T - K)_+\right]$$

in $\quad S_T = S_0 \, e^{\sigma \tilde{B}_T - \frac{\sigma^2}{2} T}$ z

$\tilde{B}_T \sim N(0,T)$. Zmaga!

Izračunati moramo samo še pričakovano vrednost.

Vmesni računi: Naj bo $X \sim N(a, b^2)$.

Za $c > 0$ računamo

$$E[(e^X - c)_+]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, b} \int_{-\infty}^{\infty} (e^x - c)_+ \, e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, b} \int_{\log c}^{\infty} (e^x - c) \, e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}} dx$$

= (*) v prvem integralu nova spremenljivka $\frac{x-a}{b} = u$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\log c - a}{b}}^{\infty} e^{bu+a} e^{-u^2/2} du$$

$$- \frac{c}{\sqrt{2\pi} \cdot b} \int_{\log c}^{\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}} dx$$

$$= \frac{e^{a + \frac{b^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\log c - a}{b}}^{\infty} e^{-\frac{(u-b)^2}{2}} du$$

$$- \frac{c}{\sqrt{2\pi}\, b} \int_{\log c}^{\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}} dx$$

$= (*)$ v prvem integralu nova spremenljivka $u - b = v$

$$(*) = \frac{e^{a+\frac{b^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\log c - a}{b} - b}^{\infty} e^{-v^2/2}\, dv$$

$$- \frac{c}{\sqrt{2\pi}\, b} \int_{\log c}^{\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}}\, dx$$

$$= e^{a+\frac{b^2}{2}} \left(1 - \Phi\left(\frac{\log c - a - b^2}{b}\right)\right)$$

$$- c\, P(X \geq \log c)$$

$$= e^{a+\frac{b^2}{2}} \left(1 - \Phi\left(\frac{\log c - a - b^2}{b}\right)\right)$$

$$- c\left(1 - \Phi\left(\frac{\log c - a}{b}\right)\right)$$

$= (*)$ Upoštevamo

$$1 - \Phi(z) = \Phi(-z)$$

$$= e^{a+\frac{b^2}{2}} \Phi\left(\frac{a+b^2-\log c}{b}\right)$$

$$- c\, \Phi\left(\frac{a-\log c}{b}\right)$$

Pri tem je Φ porazdelitvena funkcija $N(0,1)$ porazdelitve.

Računamo z $S_t = S_0 e^{rt + \sigma^2 \tilde{B}_t - \frac{\sigma^2}{2}t}$

$$V_0 = E_Q\left[e^{-rT}(S_T - k)_+\right]$$

$$= E_Q\left[\left(e^{-rT} S_T - e^{-rT} \cdot k\right)_+\right]$$

$$= E_Q\left[\left(e^{\cancel{-rT} + \log S_0 + \sigma \tilde{B}_T - \frac{\sigma^2}{2}T + \cancel{rT}} - e^{-rT} \cdot k\right)_+\right]$$

V loge:

$$a = \log S_0 - \frac{\sigma^2}{2}T$$

$$b^2 = \sigma^2 T$$

$$c = e^{-rT} \cdot k$$

$$\frac{a + b^2 - \log c}{b} = \frac{\log(S_0/k) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Vstavimo in sledi $a + \frac{b^2}{2} = \log S_0$

$$V_0 = S_0\,\Phi\left(\frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

$$- e^{-rT}\cdot K\,\Phi\left(\frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

Halelujah!

Označimo

$$d_1(T) = \frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2(T) = d_1(T) - \sigma\sqrt{T}.$$

V tej obliki je

$$\boxed{V_0 = S_0\,\Phi(d_1(T)) - e^{-rT}\cdot K\cdot\Phi(d_2(T))}$$

Vemo, da je prirastek $\tilde{B}_T - \tilde{B}_t$ neodvisen od $\mathcal{F}_t$ (pod P in pod Q).

Vemo tudi, da je

$$\tilde{V}_t = E_Q[\tilde{V}_T \mid \mathcal{F}_t]$$

$$= E_Q[e^{-rT}(S_T - K)_+ \mid \mathcal{F}_t]$$

Prepišemo

$$\tilde{V}_t =$$

$$= e^{-rt} E_Q\left[e^{-r(T-t)}(S_T - K)_+ \mid \mathcal{F}_t\right]$$

Opazimo, da je

$$S_T = e^{rT + \sigma \tilde{B}_T - \frac{\sigma^2}{2} T}$$

$$= e^{rt + \sigma \tilde{B}_t - \frac{\sigma^2}{2} T} \times$$

$$\times e^{r(T-t) + \sigma(\tilde{B}_T - \tilde{B}_t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}$$

$$= S_t \, e^{r(T-t) + \sigma(\tilde{B}_T - \tilde{B}_t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}$$

Prepišemo še enkrat

$$\tilde{V}_t = e^{-rt} E_Q\left[e^{-r(T-t)} (S_T - K)_+ \mid \mathcal{F}_t \right]$$

$$= e^{-rt} E_Q\Big[e^{-r(T-t)} \Big(S_t\, e^{r(T-t) + \sigma(\tilde{B}_T - \tilde{B}_t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)} - K \Big)_+ \mid \mathcal{F}_t \Big]$$

Zaradi neodvisnosti $\mathcal{F}_t$ in $\tilde{B}_T - \tilde{B}_t$ lahko smatramo S_t za konstanto. Pogojno pričakovano vrednost lahko zato računamo kot ceno opcije v $t=0$, le da T nadomestimo z $T-t$ in S_0 z S_t. Sledi

$$\tilde{V}_t = e^{-rt} \left\{ S_t\, \Phi\left(\frac{\log(S_t/K) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) - e^{-r(T-t)} \cdot K \cdot \Phi\left(\frac{\log(S_t/K) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \right\}$$

Označimo

$$d_1(x,t) = \frac{\log\left(\frac{x}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2(x,t) = \frac{\log\left(\frac{x}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

za $t < T$. V teh oznakah je

za $t < T$

$$\boxed{V_t = S_t\,\Phi(d_1(S_t,t)) - e^{-r(T-t)}K\cdot\Phi(d_2(S_t,t))}$$

<u>Opomba</u>: Dokažemo lahko, da

$V_t \to V_T$ s.g., ko $t \uparrow T$.

Ostane še vprašanje varovanja v zveznem času. Pokazali smo, da je za $t < T$

$$\tilde{V}_t = F(\tilde{S}_t, t)$$

za ustrezno funkcijo F. Po Itôvi formuli je (pod Q)

$$\begin{aligned} d\tilde{V}_t = &\frac{\partial F}{\partial x}(\tilde{S}_t, t)\, d\tilde{S}_t \\ &+ \frac{\partial F}{\partial t}(\tilde{S}_t, t)\, dt \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\tilde{S}_t, t)\, d\langle\tilde{S}\rangle_t . \end{aligned}$$

Pod Q je $\tilde{S}_t = S_0\, e^{\sigma \tilde{B}_t - \frac{\sigma^2}{2}t}$,

torej je po Itu

$$\begin{aligned} d\langle\tilde{S}\rangle_t &= \ldots\, dt \\ &= \sigma^2 \tilde{S}_t^2\, dt \end{aligned}$$

Poglejmo si levo in desno stran:

$$\underbrace{d\tilde{V}_t}_{\text{lok. MG}} = \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}(\tilde{S}_t, t)\, d\tilde{S}_t}_{\text{lok. M.G}}$$

$$\underbrace{+ \frac{\partial F}{\partial t}(S_t, t)\, dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(S_t, t) \times \tilde{S}_t^2\, dt}_{\text{proces s končno totalno variacijo}}$$

Izrek 3.9. pove, da je kos procesa s končno totalno variacijo enak 0, ker je 0 na začetku in je konstanten.

Sledi

$$\tilde{V}_t = \tilde{V}_0 + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(\tilde{S}_s, s)\, d\tilde{S}_s$$

Sklep: Našli smo H_u za $0 \leq u < T$.

Povejmo še nekoliko bolj splošno.

Izrek 4.4: Predpostavimo, da je

$$V_t = F(S_t, A_t^1, \ldots, A_t^d), \text{ kjer}$$

so A^k zvezni prilagojeni procesi s končno totalno variacijo, F pa dvakrat zvezno odvedljiva. Potem pod Q velja (in potem tudi pod P)

$$\tilde{V}_t = V_0 + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(S_s, A_s^1, \ldots, A_s^d)\, d\tilde{S}_s$$

Opomba: S tem smo našli H.

Dokaz: Računamo

$$\tilde{V}_t = e^{-rt} F(e^{rt}\tilde{S}_t, A_t^1, \ldots, A_t^d)$$

$$= \tilde{F}(\tilde{S}_t, A_t^1, \ldots, A_t^d).$$

Itôva formula nam da

$$d\tilde{V}_t = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(\tilde{S}_t, A_t^1, \dots, A_t^d)\, d\tilde{S}_t + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial a_i}(\tilde{S}_t, A_t^1, \dots, A_t^d)\, dA_t^i + \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x^2}(\tilde{S}_t, A_t^1, \dots, A_t^d)\, d\langle \tilde{S}\rangle_t$$

Zadnja dva člena imata končno totalno variacijo, zato je njuna vsota enaka 0 po izreku 3.9.

Poleg tega je

$$\tilde{F}(x, a_1, a_d) = e^{-rt} F(e^{rt}x, a_1, \dots, a_d)$$

in zato

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(x, a_1, \dots, a_d) = \frac{\partial F}{\partial x}(e^{rt}x, a_1 \dots, a_d).$$

Sledi, da je

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(\tilde{S}_t, A_t^1, \dots, A_t^d)$$

$$= \frac{\partial F}{\partial x}(S_t, A_t^1, \dots, A_t^d)$$

S tem je izrek dokazan.

<u>Opomba</u>: V diskretnem času je

$$V_{t+1} - V_t = H_t(S_{t+1} - S_t) \Rightarrow$$

$$H_t = \underbrace{\frac{V_{t+1} - V_t}{S_{t+1} - S_t}}$$

$$\approx \frac{dV_t}{dS_t} \approx \frac{\partial F}{\partial x}$$

Uporabimo izrek 4.4. na primeru evropske opcije.

$$F(x,t) = x\,\Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)}\,\Phi(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\log(x/K) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

formula ...

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)$$

$$= \Phi(d_1) + x\,\Phi'(d_1)\cdot\frac{\partial d_1}{\partial x} - K\cdot e^{-r(T-t)}\,\Phi'(d_2)\,\frac{\partial d_2}{\partial x}$$

$$= \Phi(d_1) + \cancel{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{d_1^2}{2}}\cdot\frac{1}{\cancel{x}\cdot\sigma\sqrt{T-t}} - K\cdot e^{-r(T-t)}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_2^2}{2}}\cdot\frac{1}{x\,\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$= \Phi(d_1) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, 6\sqrt{T-t}} \cdot$$

$$\left[e^{-\frac{d_1^2}{2}} - \frac{K}{x} \cdot e^{-r(T-t)} \cdot e^{-\frac{d_1^2 - 2d_1 6\sqrt{T-t} + 6^2\sqrt{T-t}}{2}} \right]$$

$$= \Phi(d_1) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, 6\sqrt{T-t}} e^{-\frac{d_1^2}{2}}$$

$$\left[1 - \frac{K}{x} \cdot e^{-r(T-t)} \cdot e^{d_1\sqrt{T-t}\cdot 6} \cdot e^{-\frac{6^2\sqrt{T-t}}{2}} \right]$$

$$= \quad -\text{''}-$$

$$\left[1 - \frac{K}{x} \cdot \cancel{e^{-r(T-t)}} \cdot \cdot \frac{x}{K} \cancel{e^{\frac{6^2}{2}\sqrt{T-t}}} \cdot \cancel{e^{r(T-t)}} \cdot \cancel{e^{-\frac{6^2}{2}\sqrt{T-t}}} \right]$$

$$= (*)$$

$$e^{\cancel{d_1} \log x - \log K + \frac{6^2}{2}\sqrt{T-t} + r(T-t)}$$

$$= \frac{x}{K} \cdot e^{\frac{6^2}{2}\sqrt{T-t}} \cdot e^{r(T-t)}$$

$$(*) \quad = \quad \Phi(d_1)$$

Primer: Za evropsko prodajno opcijo je $V_T^p = (k - S_T)_+$. Načeloma je

$$\tilde{V}_t^p = E_Q(\tilde{V}_T^p \mid \mathcal{F}_t).$$

Na srečo se lahko izognemo zoprnemu integriranju. Opazimo

$$(S_T - k)_+ - (k - S_T)_+ = S_T - k.$$

Zaradi linearnosti pričakovane vrednosti bo

$$
\begin{aligned}
E_Q[e^{-rT}(S_T-k)_+] - E_Q[e^{-rT}(k-S_T)_+] &= E_Q[e^{-rT}(S_T-k)] \\
&= E_Q[\tilde{S}_T - e^{-rT}k] \\
&= \tilde{S}_0 - e^{-rT} \cdot k \\
&= S_0 - e^{-rT} \cdot k.
\end{aligned}
$$

Upoštevali smo, da je $\tilde{S}_t$ martingal. Sledi

$$E_Q\left[e^{-rT}(K-S_T)_+\right]$$

$$= \text{vrednost nakupne opcije} - S_0 + e^{-rT}K$$

$$= S_0\,\Phi(d_1(T)) - e^{-rT}K\,\Phi(d_2(T)) - S_0 + e^{-rT}K$$

$$= e^{-rT}K\left(1-\Phi(d_2(T))\right) - S_0\left(1-\Phi(d_1(T))\right)$$

$$= e^{-rT}K\,\Phi(-d_2(T)) - S_0\,\Phi(-d_1(T)).$$

Podobno dobimo, da je

$$\tilde{V}_t^p = E_Q(\tilde{V}_T^p \mid F_t)$$

$$= E_Q(e^{-rT}(S_T - k)_+ \mid F_t)$$

$$- E_Q[\tilde{S}_T - ke^{-rT} \mid F_t]$$

$= $ vrednost nakupne opcije v t (diskontirana)

$$- (\tilde{S}_t - k) \cdot e^{-rT}$$

$\Rightarrow$

$$V_t^p = V_t^n - (S_t - ke^{-r(T-t)})$$

$$= F(S_t, t) - (S_t - ke^{-r(T-t)}).$$

Iz tega sledi

$$H_t^p = \frac{\partial F}{\partial x}(S_t, t) - 1$$

$$= \Phi(d_1(S_t, t)) - 1$$

$$= -\Phi(-d_1(S_t, t))$$

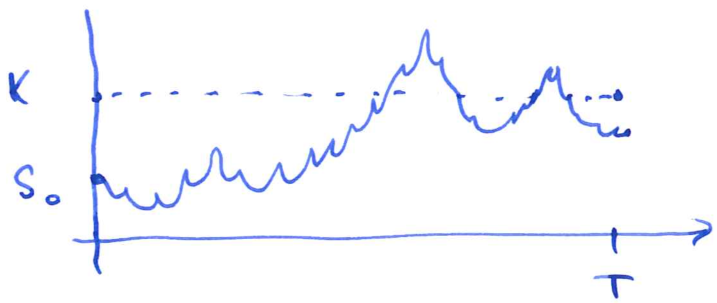
Primer: Oglejmo si še nekoliko drugačno opcijo. Označimo

$$\overline{S}_t = \max_{0 \le s \le t} S_s .$$

Proces $\overline{S}_t$ je nepadajoč, zvezen prilagojen proces, zato ima končno totalno variacijo. Izplačilo digitalne opcije je

$$V_T = 1(\overline{S}_T \ge K)$$

Slika:



Opcija izplača 1, če S_t na $[0,T]$ preseže raven K. Smiselno je privzeti $S_0 < K$. Ovrednotimo opcijo V_0.

Po teoriji je

$$V_0 = E_Q[\tilde{V}_T]$$

$$= E_Q[e^{-rT} 1(\bar{S}_T \geq k)]$$

$$= e^{-rT} P(\bar{S}_T \geq k)$$

$$= e^{-rT} P(\log \bar{S}_T \geq \log k)$$

Vemo, da je pod Q

$$\log S_t = rt + \sigma \tilde{B}_t - \frac{\sigma^2}{2} t + \log S_0$$

kjer je $\tilde{B}_t$ Brownovo gibanje.

Za Brownovo gibanje s tendenco μ velja

$$P(\bar{B}^\mu_T \geq x)$$

$$= e^{2\mu x}\left(1 - \Phi\left(\frac{x+\mu T}{\sqrt{T}}\right)\right)$$

$$+ \left(1 - \Phi\left(\frac{x-\mu T}{\sqrt{T}}\right)\right)$$

V našem primeru je

$$P\left(\max_{0\le t\le T}\left(\log S_0 + rt + \sigma \tilde{B}_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right) \ge \log K\right)$$

$$= P\left(\max_{0\le t\le T}\left(B_t + \left(\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right)t\right) \ge \frac{1}{\sigma}\left(\log K - \log S_0\right)\right)$$

V logi: $\mu = \frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}$,

$x = \frac{1}{\sigma}\left(\log K - \log S_0\right)$

Sledi:

$$V_0 = e^{-rT} \times \left\{ e^{\frac{2r}{\sigma} - \sigma}\left(1 - \Phi\left(\frac{\frac{1}{\sigma}(\log K - \log S_0) + \left(\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right)T}{\sqrt{T}}\right)\right) + \left(1 - \Phi\left(\frac{\frac{1}{\sigma}(\log K - \log S_0) - \left(\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right)T}{\sqrt{T}}\right)\right)\right\}$$

$$= e^{\frac{2}{\sigma}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)}\left(1-\Phi\left(\frac{\log(K/S_0)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right)$$

$$+\left(1-\Phi\left(\frac{\log(K/S_0)-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right)$$

Za izračun varovanja potrebujemo še

$$E_Q[\tilde{V}_T \mid \mathcal{F}_t]$$

$$= E_Q\Big[e^{-rT}\big(1(\bar{S}_t \geq K)$$

$$+ 1(\bar{S}_t < K)\big)$$

$$U_T \mid \mathcal{F}_t\Big]$$

$$= e^{-rT}\, 1(\bar{S}_t \geq K)$$

$$+ 1(\bar{S}_t < K)$$

$$\times F(S_t, t),$$

kjer je

$F(x,t)$

$$= e^{\frac{2}{\sigma}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)}\left(1-\Phi\left(\frac{\log k/x + \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)\right)$$

$$+\left(1-\Phi\left(\frac{\log k/x + \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)\right)$$

Parcialno odvajamo po x in dobimo

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,t) = e^{\frac{2}{\sigma}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)}$$

$$\cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_2^2(t)}{2}} \cdot \frac{(-1)}{x\cdot\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_2^2(t)}{2}} \cdot \frac{1}{x\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot x\cdot\sigma\sqrt{T-t}} e^{-\frac{d_2^2(t)}{2}} \times$$

$$\times \left(e^{\frac{2}{\sigma}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)} - 1\right)$$

Zaključni komentarji

(i) Formula $\tilde{V}_t = E_Q[\tilde{V}_T \mid \mathcal{F}_t]$ velja vedno, no lahko zapišemo

$$\tilde{V}_t = \tilde{V}_0 + \int_0^t H_s \, d\tilde{S}_s$$

za $0 \le t \le T$. Pri tem ni nujno, da je V_T odvisna samo od končne vrednosti temelja S_T, temveč je lahko odvisna od celotne poti. Omejili se bomo na opcije, za katere bo

$$E_Q(\tilde{V}_T^2) < \infty .$$

(ii) Za katere opcije obstaja H moramo še razčistiti. Videli bomo, da obstaja za vse smiselne opcije, tako da zgornja teorija velja.

(iii) Obstoj H je lep rezultat, vendar ga moramo še najti. To ni vedno preprosto. Videli smo, da H znamo najti, če je

$$V_t = F(S_t, t).$$

Vendar potrebujemo še to, da je H en sam.

4.3 Kompletnost, izrek Girsanova

Vrednotenje sloni na ideji, da je

$$\tilde{V}_t = V_0 + \int_0^t H_s \, d\tilde{S}_s$$

za nek prilagojen proces H_s.

Za konkretne primere smo H_s našli, vendar nismo povsem zadovoljni. Radi bi vedeli, da lahko repliciramo vse pogojne terjatve. Pomaga naslednji izrek.

Izrek 4.5 (Izrek o martingalski reprezentaciji). Naj bo U slučajna spremenljivka za $E(U^2) < \infty$ z $U \in \mathcal{F}_T^B$ in B standardno Brownovo gibanje in $(\mathcal{F}_t^B)_{0 \leq t \leq T}$ Brownova filtracija. Obstaja proces H_s z $E\left[\int_0^T H_s^2 \, ds\right] < \infty$, da je

$$U = E(U) + \int_0^T H_s \, dB_s.$$

H je enolično določen.

Dokaz sloni na nekaj dejstvih.

1. Naj bo Y slučajna spremenljivka z $E(|Y|^2) < \infty$. Čim $Y \in \mathcal{F}^B_T$.

Če velja za vsak nabor $0 \le t_1 < t_2 < \dots < t_n \le T$

$$E[Y f(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})] = 0$$

za vsako omejeno zvezno funkcijo f, je $Y = 0$ s. g.

Ko to dejstvo sprejmemo, da je dovolj vzeti

$$f(z_1, \dots, z_n) = e^{+\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})}$$

za omejene $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

2. Če je H_s omejen, je

$$\mathcal{E}(H)_t = e^{\int_0^t H_s\,dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t H_s^2\,ds}$$

lokalni martingal po Itôvi formuli. Če vzamemo

$$H_s = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \chi_{[t_k, t_{k+1})}(s),$$

je $\int_0^T H_s\, dB_s =$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})$$

in $\frac{1}{2}\int_0^T H_s^2\, ds = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_k^2}{2}(t_{k+1} - t_k)$

Računamo lahko, da je $(\xi(H)_t : 0 \le t \le T)$ martingal, poleg tega pa je še

$$\xi(H)_t = 1 + \int_0^t \xi(H)_s \cdot H_s\, dB_s,$$

torej $\xi(H)_T$ ima martingalsko reprezentacijo za poljuben nabor $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ in $0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T$.

Dokaz (izreka o martingalski reprezentaciji)

Recimo, da je $U_n = E(U_n) + \int_0^T H_s^{(n)} dB_s$ za zaporedje sl. spremenljivk U_n z $E[(U - U_n)^2] \to 0$, ko $n \to \infty$.

Zaradi Itôve izometrije je

$$E\Big[\int_0^T (H_s^n - H_s^m)^2\, ds\Big]$$

$$= E\big[(U_n - E(U_n) + E(U_m) - U_m)^2\big]$$

$$= E\big[(U_n - U_m)^2 + (E(U_n) - E(U_m))^2 + 2E\big[(U_n - U_m)(E(U_n) - E(U_m))\big]$$

Torej je $H^{(n)}$ Cauchyjevo zaporedje v $L^2(\Omega \times [0,T], P \times \lambda, \mathcal{F}_{PROG})$.

To pomeni, da obstaja limita H_s $H^{(n)}$. ~~Po Itôvi izometriji~~ velja, da je

$$U = E(U) + \int_0^t H_s\, dB_s.$$

Linearni podprostor spremenljivk U, ki imajo integralsko reprezentacijo je torej zaprt.

~~Ostaja~~ Iz teorije Hilbertovih prostorov sledi, da če ta linearen prostor ni ~~vse~~ ves $L^2(\Omega, P, \mathcal{F}_T)$

obstaja $Y \neq 0$, $E(Y \cdot U) = 0$ za vse U oblike $U = E(U) + \int_0^t H_s \, dB_s$.

Ampak to implicira točno

$$E\Big[Y \cdot \exp\Big(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k (B_{t_{k+1}} - B_{t_k}) \Big) \Big] = 0,$$

kar pomeni $Y = 0$.

Komentarji:

(i) Ortogonalnost sledi iz W. Rudin, Real and Complex Analysis, izrek 4.11, str. 79.

Komentarji:

(i) Izrek nam zagotavlja obstoj H_s, ne pove pa nam, kako H_s najdemo.

(ii) U mora biti funkcija Brownovega gibanja, zato predpostavljamo, da je filtracija Brownova.

(iii) V Black-Sholesovem modelu je pod Q

$$d\tilde{S}_u = \sigma \tilde{S}_u \cdot dW_u \quad , \quad \text{kjer je}$$

$(W_u : 0 \leq u \leq T)$ Brownovo gibanje.

Torej je

$$\int_0^t H_s \, d\tilde{S}_u = \int_0^t H_s \, \sigma \cdot \tilde{S}_u \, dW_u$$

Po izreku vedno lahko najdemo $\tilde{H}_s$, da je

$$\tilde{V}_t = V_0 + \int_0^t \tilde{H}_s \, dW_u \, .$$ Potem

je $$H_s = \frac{\tilde{H}_s}{\sigma \tilde{S}_s}$$

Figure: Let $U = \max_{0 \le s \le T} B_s$.

We know that $U \overset{d}{=} |B_T|$ so

$$E(U^2) = E(|B_T|^2) = E(B_T^2) = \mathrm{var}(B_T) = T$$

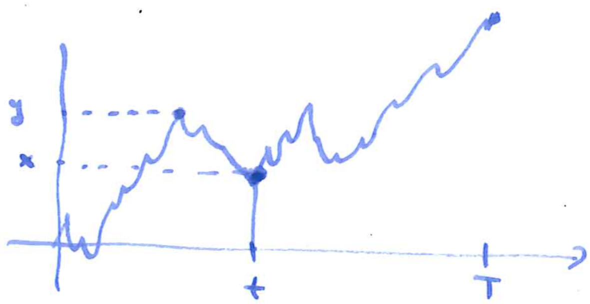
$$E(U) = E(|B_T|) = E(\sqrt{T}|B_1|) = \sqrt{T} \cdot \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty x e^{-x^2/2} dx = \frac{\sqrt{2T}}{\sqrt{\pi}}$$

We would like to find an integrand H_s such that

$$U = \frac{\sqrt{2T}}{\sqrt{\pi}} + \int_0^T H_s \, dB_s.$$

To that end we need to compute $E(U | \mathcal{F}_t)$.

Figure:



We see that writing $W_u = B_{t+u} - B_t$

$$\bar{B}_T = \max(\bar{B}_t, B_t + \bar{W}_{T-t}). \text{ So}$$

$$E(\bar{B}_T | \mathcal{F}_t) = \psi(B_t, \bar{B}_t) \quad \text{where}$$

$$\psi(x, y) = E[\max(y, x + \bar{W}_{T-t})]$$

by independence of W from $\mathcal{F}_t$.

But we know that $\overline{W}_{T-t} \stackrel{d}{=} |B_{T-t}|$ so

$$\varphi(y, x) =$$

$$= y \cdot P(\overline{W}_{T-t} \leq y-x)$$
$$+ \int_{y-x}^{\infty} (x+w) f_{\overline{W}_{T-t}}(w)\, dw$$

$$= y \cdot P(|B_{T-t}| \leq y-x)$$
$$+ \int_{y-x}^{\infty} (x+w) \sqrt{\frac{2}{\pi(T-t)}}\, e^{-\frac{w^2}{2(T-t)}}\, dw$$

$$= y \cdot P\left(|Z| \leq \frac{y-x}{\sqrt{T-t}}\right)$$
$$+ \sqrt{\frac{2}{\pi(T-t)}}$$
$$\left[\int_{y-x}^{\infty} x \cdot e^{-\frac{w^2}{2(T-t)}}\, dw + \int_{y-x}^{\infty} w \cdot e^{-\frac{w^2}{2(T-t)}}\, dw \right]$$

$$= y \cdot \left[2\Phi\left(\frac{y-x}{\sqrt{T-t}}\right) - 1 \right]$$
$$+ 2x \cdot P(B_{T-t} \geq y-x)$$
$$+ \sqrt{\frac{2}{\pi(T-t)}} \left[-(T-t)\, e^{-\frac{w^2}{2(T-t)}} \right|_{y-x}^{\infty}$$

$$= y \left[2\Phi\left(\frac{y-x}{\sqrt{T-t}}\right) - 1 \right]$$
$$+ 2x \left[1 - \Phi\left(\frac{y-x}{\sqrt{T-t}}\right) \right]$$
$$+ \sqrt{\frac{2}{\pi(T-t)}} \cdot (T-t) \cdot e^{-\frac{(y-x)^2}{2(T-t)}}$$

$$= (2x - y) + \Phi\left(\frac{y-x}{\sqrt{T-t}}\right)[2y - 2x]$$

$$+ \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\sqrt{T-t}\; e^{-\frac{(y-x)^2}{2(T-t)}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 2 - 2\,\Phi\left(\frac{y-x}{\sqrt{T-t}}\right),$$

So.

$$H_s = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{\bar{B}_s - B_s}{\sqrt{T-t}}\right)\right)$$

By Itô's formula we know that for $t < T$

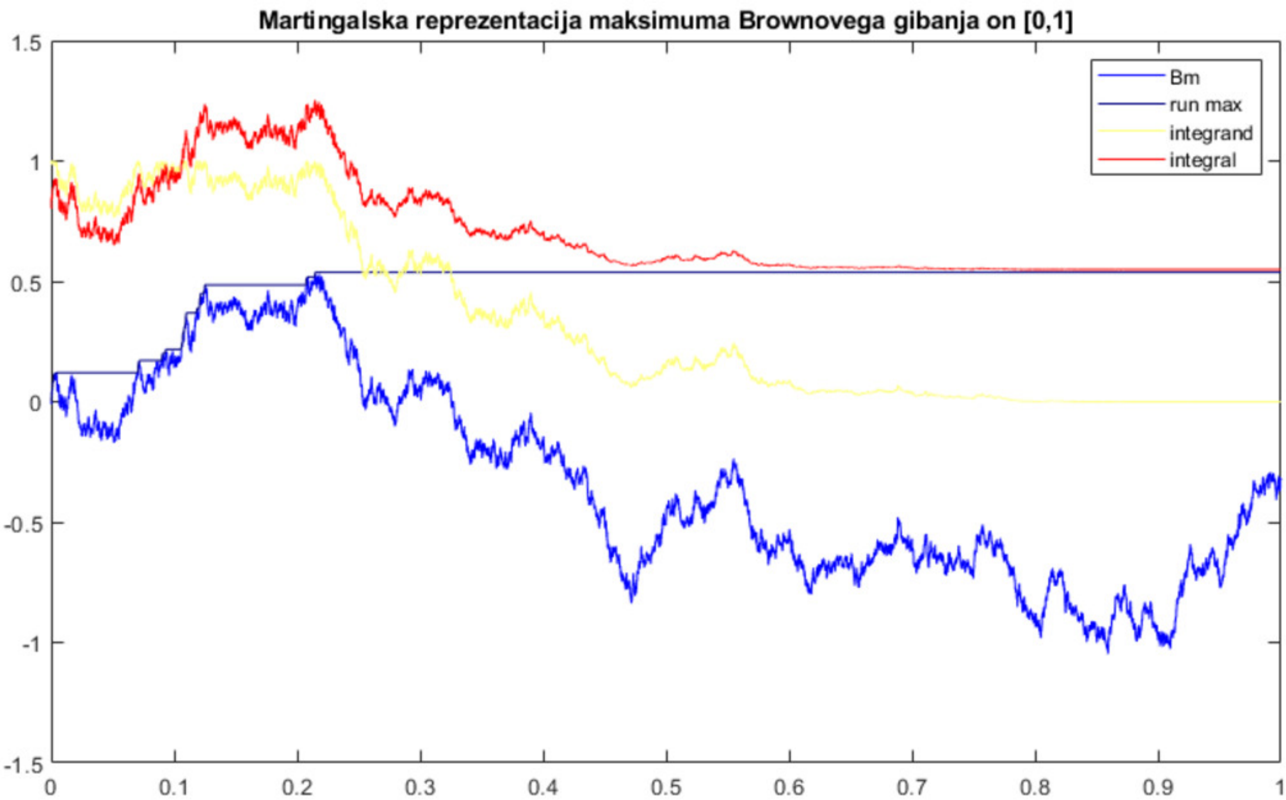
$$E(U \mid \mathcal{F}_t) = \frac{\sqrt{2T}}{\sqrt{\pi}} + \int_0^t H_s \, dB_s$$

The left side is continuous a.s. on $[0,T]$.

The integrand a.s. has a bounded limit as $t \to T$. as $\bar{B}_T \neq B_t$ a.s.

so $\dfrac{\bar{B}_t - B_t}{\sqrt{T-t}} \to 2(1 - \Phi(\mp\infty))$.

which is bounded. The equality is then true for all $t \leq T$.


Martingalska reprezentacija maksimuma Brownovega gibanja on [0,1]
Bm
run max
integrand
integral
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

Lotimo se izreka Girsanova.

Opcije smo vrednotili tako, da smo namesto mere P izbrali mero Q. Da to deluje, moramo dokazati, da je vsak proces, ki je semimartingal pod P tudi semimartingal pod Q.

Dokazali bomo nekoliko splošnejši izrek. Naj bo L lokalni martingal z $L_0 = 0$ in definirajmo

$$D_t = e^{L_t - \frac{1}{2}\langle L\rangle_t}.$$

Vemo, da je D lokalni martingal. Predpostavimo, da je D martingal in definirajmo na $\mathcal{F}_T$ mero

$$Q(A) = E_P[D_T \cdot 1_A].$$

Če je $0 \le t \le T$ in je $A \in \mathcal{F}_t$, velja

$$Q(A) = E_P[D_t \cdot 1_A].$$

<u>Opomba</u>: Po predpostavki je $E_P[D_T] = E_P[D_0] = 1$, torej je Q verjetnostna mera. Da je mera, sledi iz izreka o dominirani konvergenci.

<u>Izrek 4.6</u>: Naj bo $0 \le s < t \le T$ in $Y \in \mathcal{F}_t$ taka slučajna spremenljivka, da je $E_Q|Y| < \infty$. Velja

$$E_Q(Y \mid \mathcal{F}_s) = \frac{1}{D_s} E_P[Y \cdot D_t \mid \mathcal{F}_s].$$

<u>Dokaz</u>: Po definiciji je $E_P[|Y| \cdot D_t] = E_Q(|Y|) < \infty$, tako da obe pogojni pričakovani vrednosti obstajata.

Naj bo $G \in \mathcal{F}_s$. Računamo

$$E_Q\left[\frac{1}{D_s} E_P[Y \cdot D_t \mid \mathcal{F}_s] \cdot 1_G\right]$$

$$\overset{(\text{def})}{=} E_P\left[D_T \cdot \frac{1}{D_s} E_P[Y \cdot D_t \mid \mathcal{F}_s] \cdot 1_G\right]$$

$$= E_P\left[E_P\left[\text{---}\,''\,\text{---} \mid \mathcal{F}_s\right]\right]$$

$$= E_P\left[D_s \cdot \frac{1}{D_s} E_P[Y \cdot D_t \mid \mathcal{F}_s] \cdot 1_G\right]$$

$$= E_P\left[E_P[Y \cdot D_t \cdot 1_G \mid \mathcal{F}_s]\right]$$

$$= E_Q[Y \cdot 1_G]$$

S tem je izrek dokazan.

<u>Opombi</u>:

(i) Upoštevali smo, da je

$$E_Q(Y) = E_P[D_T \cdot Y],$$ kar

sledi iz dejstva, da zgornje velja za $Y = 1_A$ in posledično za linearne kombinacije indikatorjev. Splošen Y lahko aproksimiramo s takimi linearnimi kombinacijami.

(ii) Po Jensenovi neenačbi je

$$E_Q\left[\frac{1}{D_s}\left|E_P[Y\cdot D_t \mid \mathcal{F}_s]\right|\right]$$

$$\leq E_Q\left[\frac{1}{D_s}E_P[|Y|\cdot D_t \mid \mathcal{F}_s]\right]$$

$$= E_P\left[D_T\cdot\frac{1}{D_s}E_P[|Y|\cdot D_t \mid \mathcal{F}_s]\right]$$

$$= E_P[|Y|\cdot D_t]$$

$$= E_Q(|Y|) < \infty,$$ tako

da je desna stran v formulaciji izreka 4.6 integrabilna.

Naj bo L zvezen lokalni martingal na $0 \leq t \leq T$. Predpostavimo da je $L_0 = 0$ in je

$$D_t = e^{L_t - \frac{1}{2}\langle L \rangle_t}$$

martingal, kar pomeni $E_P(D_T) = 1$.

Definirajmo novo mero Q na $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ z

$$Q(A) = E_P(D_T \cdot 1_A).$$

<u>Izrek 4.7</u>: Naj bo M zvezen lokalni martingal glede na P. Potem je

$$\tilde{M}_t = M_t - \int_0^t D_s^{-1}\, d\langle M, D\rangle_s$$

zvezen lokalni martingal glede na Q.

Dokaz: Definirajmo čase ustavljanja

$$T^n = \inf\{0 \le t \le T : D_t \le \tfrac{1}{n} \text{ ali } \langle M, D\rangle_t \ge n \text{ ali } |M_t| \ge n\}.$$

Zaradi zveznosti so časi T^n nadlokalizirajoče zaporedje časov ustavljanja na $[0, T]$. Proces $\int_0^{t \wedge T^n} D_s^{-1} \cdot d\langle M, D\rangle_s$ je zvezen in omejen s končno totalno variacijo, zato je $\tilde{M}_t^{T^n}$ semimartingal.

Formula za parcialno integracijo da

$$\tilde{M}_t^{T^n} \cdot D_t^{T^n} = \tilde{M}_0^{T^n} \cdot D_0^{T^n} + \int_0^t \tilde{M}_s^{T^n} dD_s^{T^n} + \int_0^t D_s^{T^n} \cdot d\tilde{M}_s^{T^n} + \langle \tilde{M}^{T^n}, D^{T^n}\rangle_t$$

$$= \tilde{M}_0^{T^n} D_0^{T^n} + \int_0^t \tilde{M}_s^{T^n} dD_s^{T^n} + \int_0^t D_s^{T^n} dM_s^{T^n} - \cancel{\int_0^t d\langle \tilde{M}^{T^n}, D^{T^n}\rangle_s} + \cancel{\langle \tilde{M}^{T^n}, D^{T^n}\rangle_t}$$

Sledi, da je $(\hat{M}\cdot D)^{T^n}$ lokalni martingal, ker je vsota integralov glede na lokalni martingal. Poleg tega je $(\hat{M}\cdot D)^{T^n}$ omejen zaradi izbire T^n, torej je martingal.

Po lemi 4.6 je za $0 \le s \le t \le T$

$$E_Q[\hat{M}_t^{T^n} \mid F_s]$$

$$= \frac{1}{D_s^{T^n}} \cdot E_P[D_t^{T^n} \cdot \hat{M}_t^{T^n} \mid F_s]$$

$$= \frac{1}{D_s^{T^n}} \quad D_s^{T^n} \hat{M}^{T^n}$$

$$= \hat{M}^{T^n}.$$

Sledi, da je $\hat{M}^{T^n}$ martingal pod Q.

Ker je T^n redukcijsko zaporedje časov ustavljanja, je $\hat{M}$ lokalni martingal pod Q.

Po Itôvi formuli je

$$dD_t = D_t \cdot dL_t \quad , \quad \text{zato je}$$

$$d\langle M, D\rangle_t = D_t \cdot d\langle M, L\rangle_t$$

in posledično

$$\int_0^t D_s^{-1} \cdot d\langle M, D\rangle_s = \langle M, L\rangle_t .$$

Izrek 4.7 torej pove, da je

$$\boxed{\tilde{M}_t = M_t - \langle M, L\rangle_t}$$

lokalni martingal pod Q. Ker ima $\langle M, L\rangle$ omejeno totalno variacijo je M semimartingal pod Q.

Pod Q je D_t^{-1} martingal in je

$$P(A) = E_Q[D_T^{-1} \cdot 1_A] .$$ Isti

vzt mislek da, da je semimartingal pod Q tudi semimartingal pod P.

Navedimo brez dokaza Lévyjev izrek.

<u>Izrek 4.8</u>: Naj bo M lokalni martingal na $[0,\infty)$ ali $[0,T]$. Če je $\langle M\rangle_t = t$, je M Brownovo gibanje.

<u>Dokaz</u>: Vaje.

Vzemimo

$$L_t = \int_0^t H_s \, dB_s .$$

Pod Q je

$$\tilde{B}_t = B_t - \int_0^t H_s \, d\langle B, B\rangle_s$$

$$= B_t - \int_0^t H_s \, ds$$

lokalni martingal. To pomeni, da s spremembo mere lahko „dodamo" proces $A_t = \int_0^t H_s \, ds$, če je le A_t z omejeno variacijo ker je $\langle \tilde{B} \rangle_t = \langle B \rangle_t = t$ in se kvadratična variacija pri prehodu na Q ne spremeni, je pod Q proces $\tilde{B}$ lokalni martingal z $\langle \tilde{B} \rangle_t = t$, torej Brownovo gibanje.

<u>Izrek 4.9</u>: Naj bo

$$L_t = \int_0^t H_s \, dB_s \quad \text{za} \quad 0 \leq t \leq T$$

in privzemimo, da je

$$D_t = e^{L_t - \frac{1}{2}\langle L \rangle_t}$$

martingal. Naj bo $Q(A) = E_P[D_T \cdot 1_A]$.
Proces

$$\tilde{B}_t = B_t - \int_0^t H_s \, ds$$

je pod Q Brownovo gibanje

<u>Dokaz</u>: Smo še.

Opomba: Izrek 4.9 je izvorna verzija izreka Girsanova.

Ostane še vprašanje, kdaj je

$$D_t = e^{L_t - \frac{1}{2}\langle L\rangle_t}$$

martingal.

Brez dokaza navedimo kriterij Novikova.

Izrek 4.10: Naj bo L_t zvezen lokalni martingal za $0 \le t \le T$.

Če je

$$E\left[e^{\frac{1}{2}\langle L\rangle_T}\right] < \infty,$$

je $D_t = e^{L_t - \frac{1}{2}\langle L\rangle_t}$ martingal.

Dokaz: D. Revuz, M. Yor, Continuous martingales and Brownian motion, 2nd edition, Springer, 1991, str. 318.

Če je $L_t = \int_0^t H_s \, dB_s$ to pomeni

$$E_P\left[e^{1/2 \int_0^T H_s^2 \, ds} \right] < \infty .$$

Zaključni komentarji

(i) Izrek Girsanova omogoča, da z zamenjavo mere Brownovemu gibanju dodamo „trend" oblike $\int_0^t H_s \, ds$. Če za H_s vzamemo konstanto λ, Brownovemu gibaji dodamo trend λt in postane $B^{(\lambda)}$. To smo navedli pri obravnavi Black-Scholesovega modela.

(ii) Izrek Girsanova pove še več. Vsak proces, ki je semimartingal pod P je semimartingal tudi pod Q. To smo pri obravnavi Black-Scholesovega modela zamolčali, vendar je matematično bistveno dejstvo.

4.3. Stohastične diferencialne enačbe

V Black-Scholesovem modelu je

$$S_t = S_0 \cdot e^{\mu t + \sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2} t}$$

Itôva formula nam da

$$dS_t = S_t \cdot \left(\mu \cdot dt + \sigma \cdot dB_t - \frac{\sigma^2}{2} dt\right) + \frac{1}{2} \cdot S_t \cdot \sigma^2 dt = \mu \cdot S_t \cdot dt + \sigma \cdot S_t \cdot dB_t$$

Pri navadnih diferencialnih enačbah lahko napišemo $y' = f(x,y)$ kot $dy = f(x,y) \cdot dx$. Po analogiji rečemo zgornji enačbi <u>stohastična diferencialna enačba</u>, ker na levi proces S nastopa kot diferencial dS_t, na desni pa kot proces S_t sam.

V splošnem bo stohastična diferencialna enačba oblike

$$dX_t = \sigma(X_t, t)\,dB_t + \mu(X_t, t)\,dt$$

z začetnim pogojem $X_0 = x_0$, kar bomo razumeli kot

$$X_t = x_0 + \int_0^t \sigma(X_s, s)\,dB_s + \int_0^t \mu(X_s, s)\,ds.$$

Ugotoviti moramo, kako je z obstojem in enoličnostjo rešitev.

<u>Primer</u>: Oglejmo si enačbo

$$dX_t = dB_t - r X_t\,dt.$$

Rečemo ji Ornstein-Uhlenbeckova stohastična diferencialna enačba. Množimo z $e^{\lambda t}$ in izračunajmo diferencial.

$$d(e^{\lambda t} \cdot X_t) = \lambda e^{\lambda t} X_t\,dt + e^{\lambda t} \cdot dX_t$$

$$= \lambda e^{\lambda t} X_t \, dt$$

$$+ e^{\lambda t} (dB_t - r X_t \, dt)$$

$$= e^{\lambda t} (\lambda - r) X_t \, dt + e^{\lambda t} dB_t$$

Če izberemo $\lambda = r$ dobimo

$$d(e^{rt} X_t) = e^{rt} dB_t$$ ali

v integralski obliki

$$e^{rt} X_t = x_0 + \int_0^t e^{rs} dB_s$$

ali

$$X_t = e^{-rt} x_0 + e^{-rt} \int_0^t e^{rs} dB_s .$$

Z gornjo SDE smo rešili eksplicitno. To lahko v nekaterih primerih.

Primer: Lahko imamo tudi sisteme stohastičnih diferencialnih enačb kot recimo

$$dX_t = -Y_t\, dB_t - \tfrac{1}{2} X_t\, dt$$
$$dY_t = X_t\, dB_t - \tfrac{1}{2} Y_t\, dt\,.$$

Računamo po Itô

$$d\left(X_t^2 + Y_t^2\right)$$

$$= 2X_t\, dX_t + \cdot\, d\langle X\rangle_t$$
$$+ 2Y_t\, dY_t + \cdot\, d\langle Y\rangle_t$$

$$= 2X_t\left(-Y_t\, dB_t - \tfrac{1}{2} X_t\, dt\right) + Y_t^2\, dt$$
$$+ 2Y_t\left(X_t\, dB_t - \tfrac{1}{2} Y_t\, dt\right)$$
$$+ X_t^2\, dt$$

$$= 0\,.$$

To pomeni, da je $X_t^2 + Y_t^2$ konstanta.

To nas navede na misel, da je

$$X_t = \gamma \cos(B_t + \alpha)$$
$$Y_t = \gamma \sin(B_t + \beta).$$

Po Itô tanoj dobimo

$$dX_t = -Y_t\, dB_t - \tfrac{1}{2} X_t\, dt$$
$$dY_t = X_t\, dB_t - \tfrac{1}{2} Y_t\, dt$$

Za začetna pogoja $X_0 = x$ in $Y_0 = y_0$ lahno najdemo α, β in γ, da bo zadoščeno začetnim pogojem. Ne vemo pa, ali je rešitev edina.

<u>Definicija</u>: Prilagojen proces X je <u>krepka</u> rešitev stohastične diferencialne enačbe

$$dX_t = \sigma(X_t, t)\, dB_t + \mu(X_t, t)\, dt$$

z začetnim pogojem $X_0 = x_0$, če je prilagojena $\{\mathcal{F}_t^B\}_{0 \le t \le T}$ in zadošča enačbi. ter je zvezen.

Pri navadnih diferencialnih enačbah je ključen Lipschitzov pogoj.

Izrek 4.11: Naj bosta funkciji $\sigma(x,t)$ in $\mu(x,t)$ merljivi na $\mathbb{R} \times [0,T]$ in naj zadoščata pogoju

$$|\mu(x,t) - \mu(y,t)| + |\sigma(x,t) - \sigma(y,t)| \le D|x-y|$$

ter

$$|\sigma(x,t)| + |\mu(x,t)| \le C(1+|x|)$$

za konstanti $C, D > 0$. Potem obstaja enolično določena krepka rešitev stohastične diferencialne enačbe pri pogoju $X_0 = x_0$. Za rešitev velja

$$E\left[\int_0^t X_s^2 \, ds\right] < \infty$$

za vse $t \le T$. Bolj točno, obstajata konstanti $A, \beta < \infty$, da je

$$E[X_t^2] \le A(1+x_0^2)e^{\beta t}.$$

Preden se lotimo dokaza, nekaj komentarjev.

(i) Black-Scholesova in Ornstein-Uhlenbeckova SDE ustrezata predpostavkam izreka. Rešitvi, ki smo jih našli, sta edini krepki rešitvi.

(ii) Podoben izrek velja za sisteme enačb.

Ideja dokaza: Našli bomo zaporedje prilagojenih procesov X_t^n, za katere bo s.g. $X_t^n \to X_t$ enakomerno na $[0,T]$ in $X_t^n \xrightarrow{L^2} X_t$ za vsak $t \in [0,T]$. Poleg tega bo

$$X_t^{n+1} = x_0 + \int_0^t \sigma(X_s^n, s)\, dB_s + \int_0^t \mu(X_s^n, s)\, ds.$$

z ustreznimi ocenami bomo pokazali, da je limita X rešitev.

<u>Opomba</u>: Ideja je podobna iteraciji pri navadnih diferencialnih enačbah. Tam definiramo

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_a^x f(x(u), y_n(u))\, du.$$

Če je izpolnjen Lipschitzov pogoj za f, zaporedje funkcij y_n enakomerno konvergira.

<u>Lema 4.12</u>: Naj veljajo ocene

$$|\sigma(x,t) - \sigma(y,t)| + |\mu(x,t) - \mu(y,t)| \leq D \cdot |x-y| \quad \text{za } t \in [0,T]$$

in

$$|\sigma(x,t)| + |\mu(x,t)| \leq C(1+|x|)$$

za $x \in \mathbb{R}$. Naj bosta X, Y prilagojena zvezna procesa z $X_0 = Y_0 = a$.

Predpostavimo

$$E\left[\int_0^T X_t^2\,dt\right] < \infty \quad \text{in} \quad E\left[\int_0^T Y_t^2\,dt\right] < \infty.$$

Za konstanto $B = 8D^2 + 2D^2T$

velja

$$E\left[\sup_{0\le t\le T} |\tilde{X}_t - \tilde{Y}_t|^2\right]$$

$$\le B\, E\left[\int_0^T |X_t - Y_t|^2\,dt\right]$$

<u>Opombe</u>:

(i) Za funkciji $\sigma, \mu : \mathbb{R}\times[0,\infty) \to \mathbb{R}$ predpostavljamo, da sta merljivi.

(ii) Prvi pogoj v formulaciji izreka je analogija Lipschitzovega pogoja.

(iii) Iz drugega pogoja sledi

$$|\sigma(X_s, s)| \le C(1 + X_s^2)$$

in

$$|\mu(X_s,s)| \leq C(1+X_s^2),$$

zato integrala za $\hat{X}$ in $\tilde{Y}$ obstajata.

Dokaz: Uporabili bomo neenačbo $(a-b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ in dejstvo iz Analize 1, da je $\sup(A+B) \leq \sup A + \sup B$. Po definiciji je

$$\hat{X}_t - \tilde{Y}_t = \int_0^t (\sigma(X_s,s) - \sigma(Y_s,s))\,dB_s + \int_0^t (\mu(X_s,s) - \mu(Y_s,s))\,ds.$$

Iz zgornjih dveh neenačb sledi

$$\sup_{0\leq t\leq T} |\tilde{X}_t - \tilde{Y}_t|^2 \leq 2\sup_{0\leq t\leq T}\left(\int_0^t (\sigma(X_s,s) - \sigma(Y_s,s))\,dB_s\right)^2 + 2\sup_{0\leq t\leq T}\left(\int_0^t (\mu(X_s,s) - \mu(Y_s,s))\,ds\right)^2$$

Neenačba velja tudi za pričakovane vrednosti leve in desne str.

Res+lico

$|\sigma(X_s,s) - \sigma(Y_s,s)|$ lahko ocenimo

z $D\,|X_s - Y_s|$. Ker je

$E\left[\int_0^T |X_s - Y_s|^2 ds\right]$ po predpostavki

$< \infty$, lahko uporabimo Itôvo

izometrijo in Doobovo neenakost

in dobimo

$$E\left[\sup_{0\le t\le T}\left(\int_0^t(\sigma(X_s,s)-\sigma(Y_s,s))\,dB_s\right)^2\right]$$

$$\overset{(\text{Doob})}{\le} 4\,E\left[\int_0^T(\sigma(X_s,s)-\sigma(Y_s,s))^2 ds\right]$$

$$\overset{(\text{Itô})}{\le} 4\cdot E\left[\int_0^T D^2 |X_s-Y_s|^2 ds\right]$$

$$= 4D^2\,E\left[\int_0^T |X_s-Y_s|^2 ds\right]$$

Za drugi člen najprej uporabimo Cauchy-Schwarzovo neenačbo

$$\left(\int_0^t (\mu(X_s,s) - \mu(Y_s,s))\,ds\right)^2$$

$$\leq \int_0^t (\mu(X_s,s) - \mu(Y_s,s))^2\,ds$$

$$\cdot \int_0^t 1^2 \cdot ds$$

$$\leq \int_0^t D^2 |X_s - Y_s|^2\,ds \cdot T$$

Sledi

$$\sup_{0\leq t\leq T} \left(\int_0^t (\mu(X_s,s) - \mu(Y_s,s))\,ds\right)^2$$

$$\leq D^2 T \cdot \int_0^T |X_s - Y_s|^2\,ds$$

Sestavimo in sledi

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} |\tilde{X}_t - \tilde{Y}_t|^2\right]$$

$$\leq (8D^2 + 2D^2T)\, E\left[\int_0^T |X_s - Y_s|^2\,ds\right]$$

<u>Opomba</u>: Če je $E[\int_0^T X_t^2 dt] < \infty$ za proces X, je tudi $E[\int_0^T \hat{X}_t^2 dt] < \infty$

To sledi z enakimi koraki kot v dokazu izreka 4.12.

<u>Izrek 4.13</u>: Naj funkciji σ, μ ustrezata pogojem iz izreka 4.11. Definiramo zaporedje prilagojenih procesov X^n na $[0,T]$ s predpisom

$$X_t^0 = x_0 \quad \text{in}$$

$$X_t^{n+1} = x_0 + \int_0^t \sigma(X_s^n, s)\, dB_s + \int_0^t \mu^n(X_s, s)\, ds$$

Za konstanti $\alpha = 8C^2(1+|x_0|^2)^2$ in $\beta = 2 \cdot C^2 (1+|x_0|)^2$ velja

$$E\left[\sup_{0 \le s \le t} |X_s^n - X_s^{n-1}|^2\right] \le B^{n-1}\left(\alpha \cdot \frac{t^n}{n!} + 2\beta \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\right)$$

Dokaz: Izrek 4.12 nam da oceno

$$E\Big[\sup_{0\le t\le T} |X_t^{n+1} - X_t^n|^2\Big]$$

$$\le B \cdot E\Big[\int_0^T |X_t^n - X_t^{n-1}|^2 dt\Big].$$

Označimo

$$V_n(t) = E\Big[\sup_{0\le s\le t} |X_s^n - X_s^{n-1}|^2\Big].$$

Ocena iz Izreka 4.12 velja tudi za vse $t \le T$. Ocenimo lahko

$$V_n(t) \le B\, E\Big[\int_0^t |X_s^{n-1} - X_s^{n-2}|^2 ds\Big]$$

$$\overset{(\text{Fub.})}{\le} B \cdot \int_0^t E\big[|X_s^{n-1} - X_s^{n-2}|^2\big] ds$$

$$\le B \cdot \int_0^t E\Big[\sup_{0\le u\le s} |X_u^{n-1} - X_u^{n-2}|\Big] ds$$

$$= B \cdot \int_0^t V_{n-1}(s)\, ds.$$

Ocenimo

$$v_1(t) = E\left[\sup_{0\le s\le t} |X_s^1 - X_s^0|^2\right]$$

$$= E\left[\sup_{0\le s\le t} \left|\int_0^s \sigma(x_0,u)\,dB_u + \int_0^s \mu(x_0,u)\,du\right|^2\right]$$

$$\le 2\,E\left[\sup_{0\le s\le t}\left(\int_0^s \sigma(x_0,u)\,dB_u\right)^2\right]$$

$$+ 2\,E\left[\sup_{0\le s\le t}\left(\int_0^s \mu(x_0,s)\,ds\right)^2\right]$$

Doob & Itô

$$\le 2\cdot 4\cdot E\left[\int_0^t \sigma^2(x_0,u)\,du\right]$$

CS

$$+ 2\cdot E\left[s\cdot\int_0^s \mu_0^2(x_0,u)\,du\right]$$

$$\le 8\cdot C^2(1+|x_0|)^2\cdot t$$

$$+ 2\cdot t\cdot C^2(1+|x_0|)^2\cdot t$$

Ugotavljamo, da je

$$v_1(t) \leq \alpha t + \beta t^2 .$$

Računamo

$$v_2(t) \leq B \cdot \int_0^t v_1(s)\, ds$$

$$\leq B \cdot \int_0^t (\alpha s + \beta s^2)\, ds$$

$$= B \cdot \alpha \cdot \frac{t^2}{2} + B \cdot \beta \cdot \frac{t^3}{3}$$

$$v_3(t) \leq B \cdot \int_0^t v_2(s)\, ds$$

$$\leq B^2 \cdot \alpha \cdot \frac{t^3}{3!} + 2B^2 \cdot \frac{t^4}{4!}$$

$$\vdots$$

Indukcija

$$v_n(t) \leq B^{n-1} \left(\alpha \cdot \frac{t^n}{n!} + 2\beta \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \right)$$

<u>Opomba</u>: Če v zadnji neenačbi v izreku 4.13 izpustimo supremum, neenačba še vedno velja. Dobimo

$$E\left[|X_t^n - X_t^{n-1}|^2\right]$$

$$\leq B^{n-1}\left(\alpha \cdot \frac{t^n}{n!} + 2\beta \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\right)$$

za vsak $0 \leq t \leq T$. Velja tudi

$$E\left[\int_0^T |X_t^n - X_t^{n-1}|^2 dt\right]$$

$$\leq E\left[T \sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^n - X_t^{n-1}|^2\right]$$

$$\leq T \cdot B^{n-1}\left(\alpha \cdot \frac{t^n}{n!} + 2\beta \cdot \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\right)$$

Za slučajni spremenljivki X, Y z $E(X^2) < \infty$ in $E(Y^2) < \infty$ velja

$$E[(X+Y)^2] = E[(X+Y)X] + E[(X+Y)Y]$$

$$\overset{CS}{\leq} E[(X+Y)^2]^{1/2} E(X^2)^{1/2} + E[(X+Y)^2]^{1/2} E(Y^2)^{1/2}$$

Pokrajšamo $E[(X+Y)^2]^{1/2}$ in sledi

$$E[(X+Y)^2]^{1/2} \leq E(X^2)^{1/2} + E(Y^2)^{1/2}.$$

Bolj splošno je

$$E\left[\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2\right]^{1/2} \leq \sum_{k=1}^{n} E(X_k^2)^{1/2}.$$

<u>Opomba</u>: Pokazali smo, da je $\|X\| = E(X^2)^{1/2}$ norma v jeziku funkcionalne analize.

<u>Dokaz izreka 4.10</u>: Definiramo zaporedje prilagojenih procesov X^n kot v izreku 4.13.

Ocena v 4.13 nam da oceno

$$P\left(\sup_{0\le t\le T} |X_s^n - X_s^{n-1}| \ge \frac{1}{2^n} \right)$$

(Čebišev)

$$\le \underbrace{B^{n-1}\left(\alpha \cdot \frac{T^n}{n!} + \beta \cdot \frac{T^{n+1}}{(n+1)!} \right) \cdot 4^n}_{\text{Ta vrsta konvergira.}}$$

Iz ocene sledi, da s.g. procesi X_t^n konvergirajo enakomerno na $[0,T]$ proti zveznemu prilagojenemu procesu X, ker so po definiciji X^n zvezni na $[0,T]$. Dokazati moramo, da je X rešitev in oceno iz 4.10 ter enoličnost rešitve.

Gremo po vrsti:

(i) X je rešitev: pokažimo, da je za $m < n$

$$E\Big[\sup_{0\le t\le T} |X_t^m - X_t^n|^2\Big]$$

$$\le \Big(\sum_{k=m+1}^{n} v_k(T)^{1/2}\Big)^2$$

Velja

$$\sup_{0\le t\le T} |X_t^m - X_t^n|$$

$$\le \sum_{k=m+1}^{n} \sup_{0\le t\le T} |X_t^k - X_t^{k-1}|$$

Uporabimo neenakost za norme in sledi

$$E\Big[\big(\sup_{0\le t\le T} |X_t^m - X_t^n|\big)^2\Big]^{1/2}$$

$$\le \sum_{k=m+1}^{n} E\Big[\big(\sup_{0\le t\le T} |X_t^k - X_t^{k-1}|\big)^2\Big]^{1/2}.$$

Kvadriramo in neenačba sledi.

Ker vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} v_k(T)^{1/2}$ konvergira lahko za dan $\varepsilon > 0$ izberemo m tak, da je $\sum_{k=1}^{\infty} v_k(T)^{1/2} < \varepsilon^{1/2}$.

Po Fatoujevi lemi ocenimo

$$E\left[\sup_{0\le t\le T} |X^m_t - X_t|^2\right]$$

$$\le E\left[\liminf_{n\to\infty} \sup_{0\le t\le T} |X^m_t - X^n_t|^2\right]$$

(Fatou

$$\le \liminf_{n\to\infty} E\left[\sup_{0\le t\le T} |X^m_t - X^n_t|^2\right]$$

$$\le \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} v_k(T)^{1/2}\right)^2$$

$$< \varepsilon.$$

Iz zadnje ocene sledi

$$E\left[\int_0^T X_t^2\,dt\right] < \infty \quad \text{in}$$

$$E\left[\int_0^T (X_t^n - X_t)^2\,dt\right] \to 0, \quad \text{ko } n \to \infty.$$

Po konstrukciji je

$$(*) \quad X_t^{n+1} = x_0 + \int_0^t \sigma(X_s^n, s)\,dB_s + \int_0^t \mu(X_s^n, s)\,ds.$$

Pošljimo $n \to \infty$ na levi in desni.

Vemo: $X_t^n \xrightarrow{L^2} X_t$

$$E\left[\left(\int_0^t (\sigma(X_s^n, s) - \sigma(X_s, s))\,dB_s\right)^2\right] \overset{(\text{Itô})}{=} E\left[\int_0^t (\sigma(X_s^n, s) - \sigma(X_s, s))^2\,ds\right]$$

$$\leq D^2\, E\left[\int_0^t (X_s^n - X_s)^2\,ds\right]$$

$$\to 0, \quad \text{ko } n \to \infty$$

To pomeni

$$\int_0^t \sigma(X^n_s, s)\, dB_s \xrightarrow{L^2} \int_0^t \sigma(X_s, s)\, dB_s$$

Za zadnji integral uporabimo Cauchy-Schwarza in dobimo

$$E\left[\left(\int_0^t (\mu(X^n_s, s) - \mu(X_s, s))\, ds\right)^2\right]$$

$$\leq E\left[t \cdot \int_0^t (\mu(X^n_s, s) - \mu(X_s, s))^2 ds\right]$$

$$\leq t \cdot D^2 \cdot E\left[\int_0^t (X^n_s - X_s)^2 ds\right]$$

$$\to 0, \text{ ko } n \to \infty.$$

Sledi

$$\int_0^t \mu(X^n_s, s)\, ds \xrightarrow{L^2} \int_0^t \mu(X_s, s)\, ds.$$

Limiti leve in desne strani enačbe (*) sta enaki v L^2 in zato s.g. X je rešitev!

(ii) Naj bosta X in Y rešitvi, za katori je

$$E\Big[\int_0^T X_s^2\,ds\Big] < \infty \quad \text{in} \quad E\Big[\int_0^T Y_s^2\,ds\Big] < \infty.$$

Veljati mora $\hat{X} = X$ in $\hat{Y} = Y$ in zato po izreku 4.13

$$E\Big[\sup_{0\le s\le t} |X_s - Y_s|^2\Big]$$

$$\le E\Big[\int_0^t (X_s - Y_s)^2\,ds\Big]$$

$$\le \int_0^t E\big[(X_s - Y_s)^2\big]\,ds$$

$$\le \int_0^t E\Big[\sup_{0\le u\le s} |X_u - Y_u|^2\Big]\,ds$$

Označimo

$$v(t) = E\Big[\sup_{0\le s\le t} |X_s - Y_s|^2\Big].$$

Z gornja neenačba pomeni

$$v(t) \le \int_0^t v(s)\,ds.$$

Velja tudi $v(0) = 0$, in vemo, da je $v(t) < \infty$ za $0 \le t \le T$.

Ocenimo

$$
\begin{aligned}
v(t) &\le \int_0^t v(s)\,ds \\
&\le \int_0^t ds \cdot \int_0^s v(u)\,du \\
&\overset{(\text{Fubini})}{=} \int_0^t v(u)\,du \cdot \int_u^t ds \\
&= \int_0^t (t-u)\,v(u)\,du \\
&\le \int_0^t (t-u)\,du \int_0^u v(p)\,dp \\
&= \int_0^t v(p)\,dp \cdot \int_p^t (t-u)\,du \\
&= \int_0^t \frac{(t-p)^2}{2!}\,v(p)\,dp \\
&\;\;\vdots \\
&\le \int_0^t \frac{(t-p)^n}{n!}\,v(p)\,dp \\
&\le \frac{t^n}{n!}\,v(t)\cdot t \quad (v \text{ je naraščajoča}) \\
&\longrightarrow 0, \text{ ko } n \to \infty.
\end{aligned}
$$

Sledi $v(t) = 0$. S tem je enoličnost dokazana.

(iii) Ostane še ocena

$$E(X_t^2) \leq A(1 + x_0^2)\, e^{\beta t}$$

za ustrezna $A, \beta > 0$.

Vemo, da $X_t^n \xrightarrow{L^2} X_t$, zato $E[(X_t^n)^2] \to E(X_t^2)$.

Vemo $E[(X_t^0)^2] = x_0^2$.

Podobno kot v izreku 4.13 z uporabo neenačbe

$$(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$$

ocenimo

$$E[(X_t^n)^2] \leq 3x_0^2$$

$$+ 3E\left[\int_0^t \sigma(X_s^{n-1}, s)^2\, ds\right]$$

$$+ 3 \cdot t\, E\left[\int_0^t \mu(X_s^{n-1}, s)^2\, ds\right]$$

$$\le 3x_0^2 + 3C^2 \, E\Big[\int_0^t (1+|X_s^{n-1}|^2)\,ds\Big]$$

$$+ 3\cdot C^2\cdot t\cdot E\Big[\int_0^t (1+|X_s^{n-1}|^2)\,ds\Big]$$

$$= 3\,(x_0^2 + 3C^2 t + 3C^2 t^2)$$

$$+ 3C^2(1+t)\,E\Big[\int_0^t |X_s^{n-1}|^2\,ds\Big]$$

Označimo $w(t) = E[X_t^2]$,

$A = 3\,(x_0^2 + 3C^2 T + 3C^2 T^2)$ in

$\beta = 3C^2(1+t)$. V neenačbi

pošljimo $n \to \infty$. Sledi

$$w(t) \le A + \beta \int_0^t w(s)\,ds.$$

<u>Opomba</u>: Zamenjava vrstnega reda integriranja in limit sledi iz ocen v izreku 4.13.

Lema 4.14 : (Gronwall) Če je w merljiva na $[0,T]$ in velja

$$w(t) \leq A + \beta \int_0^t w(s)\,ds,$$

je $$w(t) \leq A \cdot e^{\beta t}.$$

Dokaz : (Wikipedia)

Opombe :

(i) Pri predpostavkah se da dokazati enoličnost rešitev tudi če ne predpostavljamo $E[\int_0^T X_t^2\,dt] < \infty$. Ker smo rešitev z zgornjo lastnostjo našli, je ta edina.

(ii) Rešitve SDE so očitno semimartingali.

<u>Primer</u>: Oglejmo si linearno stohastično diferencialno enačbo

$$dX_t = (\alpha + \beta X_t)\, dB_t + (\gamma + \delta X_t)\, dt$$

z začetnim pogojem $X_0 = x_0$. Po izreku 4.11 ima ta enačba enolično krepko rešitev. Definirajmo

$$Z_t = e^{\lambda B_t + \mu t}.$$

Po Itôvi formuli je

$$dZ_t = Z_t(\lambda\, dB_t + \mu\, dt) + \frac{1}{2} Z_t \cdot \lambda^2 dt.$$

Posledično je

$$d\langle X, Z\rangle_t = \lambda Z_t(\alpha + \beta X_t)\, dt$$

Označimo

$$Y_t = X_t \cdot Z_t.$$

Po pravilu za stohastično odvajanje produkta je

$$dY_t = X_t \cdot dZ_t + Z_t \cdot dX_t + d\langle X, Z\rangle_t$$

$$= X_t \cdot Z_t \left[\lambda \, dB_t + \left(\mu + \frac{\lambda^2}{2}\right) dt \right]$$

$$+ Z_t \left[(\alpha + \beta X_t) \, dB_t + (\gamma + \delta X_t) \, dt \right]$$

$$+ \lambda Z_t (\alpha + \beta X_t) \, dt$$

$$= \alpha Z_t \, dB_t + Y_t (\beta + \lambda) \, dB_t$$

$$+ (\gamma + \lambda \alpha) Z_t \, dt$$

$$+ Y_t \left(\mu + \frac{\lambda^2}{2} + \delta + \lambda \beta \right) dt$$

Izberimo $\lambda = -\beta$ in μ tako, da bo $\mu + \frac{\lambda^2}{2} + \delta + \lambda\beta = \mu + \delta - \frac{\lambda^2}{2} = 0$,

torej $\mu = \frac{\beta^2}{2} - \delta$

Ostane enačba

$$dY_t = \alpha Z_t \, dB_t + (\gamma + \lambda\alpha) Z_t \, dt$$

$$= \alpha Z_t \, dB_t + (\gamma - \alpha\beta) Z_t \, dt$$

Zdaj je $Z_t = e^{-\beta B_t + (\frac{\beta^2}{2} - \delta)t}$

Dobimo

$$Y_t = x_0 + \alpha \int_0^t Z_s \, dB_s + (\gamma - \alpha\beta) \times$$

$$\times \int_0^t Z_s \, dt$$

Preizkus: Velja

$X_t = \dfrac{Y_t}{Z_t}$. Po Itôu je

$$dX_t = \frac{1}{Z_t} \cdot dY_t - \frac{Y_t}{Z_t^2} \, dZ_t$$

$$+ \left(-\frac{1}{Z_t^2}\right) d\langle Y, Z\rangle_t + \frac{Y_t}{Z_t^3} \, d\langle Z\rangle_t$$

$$= \frac{1}{Z_t}\left(\alpha Z_t \, dB_t + (\gamma - \alpha\beta) Z_t \, dt\right)$$

$$- \frac{Y_t}{Z_t^2}\left(-\beta Z_t \, dB_t + Z_t(\beta^2 - \delta) dt\right)$$

$$- \frac{1}{Z_t^2}\left(-\alpha\beta Z_t^2 \, dt\right)$$

$$+ \frac{Y_t}{Z_t^3} \beta^2 Z_t^2 \, dt$$

$$= (\alpha + \beta X_t) \, dB_t + (\gamma + \delta X_t) \, dt$$

Rešitev je torej

$$X_t = \frac{Y_t}{Z_t}.$$