FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Finančna matematika 2

Pisni izpit

30. januar 2023

Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Naloge so 4. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	a.	b.	c.	d.
1.				
2.			•	•
3.			•	•
4.				•
Skupaj				

1. (25) Naj bosta B in D neodvisni Brownovi gibanji glede na filtracijo $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Definirajte za $a > 0$

$$T_a = \inf\{t \geq 0\colon \int_0^t (B_s^2 + D_s^2)ds \geq a\}\,.$$

Kot znano privzemite, da je $P(T_a < \infty) = 1$. Definirajte za $\lambda \in \mathbb{R}$

$$M_t = e^{\frac{\lambda^2}{2}\int_0^t (B_s^2+D_s^2)ds}\cos(\lambda B_t D_t) \quad \text{in} \quad N_t = e^{\frac{\lambda^2}{2}\int_0^t (B_s^2+D_s^2)ds}\sin(\lambda B_t D_t)\,.$$

a. (15) Pokažite, da sta M in N lokalna martingala.

Rešitev: ker sta B in D neodvisni Brownovi gibanji, je $\langle B, D\rangle = 0$. Proces

$$A_t = \int_0^t (B_s^2 + D_s^2)ds$$

ima končno totalno variacijo, zato je $\langle A, B\rangle = \langle A, D\rangle = 0$. Poleg tega je

$$dA_t = (B_t^2 + D_t^2)dt\,.$$

Računamo

$$\begin{aligned}
dM_t &= \frac{\lambda^2}{2}e^{\frac{\lambda^2}{2}A_t}(B_t^2 + D_t^2)\cos(\lambda B_t D_t)dt \\
&\qquad + e^{\frac{\lambda^2}{2}A_t}\Big(-\lambda D_t \sin(\lambda B_t D_t)dB_t - \lambda B_t \sin(\lambda B_t D_t)dD_t \\
&\qquad\qquad -\frac{\lambda^2}{2}D_t^2\cos(\lambda B_t D_t)dt - \frac{\lambda^2}{2}B_t^2\cos(\lambda B_t D_t)dt\Big) \\
&= e^{\frac{\lambda^2}{2}A_t}\left(-\lambda D_t \sin(\lambda B_t D_t)dB_t - \lambda B_t \sin(\lambda B_t D_t)dD_t\right)\,.
\end{aligned}$$

Za N računamo podobno.

b. (5) Utemeljite, da je

$$E\left(M_{t\wedge T_a}\right) = 1 \qquad \text{in} \qquad E\left(N_{t\wedge T_a}\right) = 0\,.$$

Rešitev: ustavljena lokalna martingala sta lokalna martingala. Ker sta tudi omejena, sta martingala, $t \wedge T_a$ pa je omejen čas ustavljanja. Po izreku o opcijskem ustavljanju je

$$E\left(M_{t\wedge T_a}\right) = E(M_0) = 1 \qquad \textit{in} \qquad E\left(N_{t\wedge T_a}\right) = E(N_0) = 0\,.$$

c. (5) Izračunajte $E\left(M_{T_a}\right)$ in $E\left(N_{T_a}\right)$. Utemeljite korake.

Rešitev: martingal $M_{t\wedge T_a}$ je omejen in po predpostavki

$$M_{t\wedge T_a} \to M_{T_a}\,,$$

ko $t \to \infty$. Po izreku o dominirani konvergenci je

$$E\left(M_{t\wedge T_a}\right) \to E\left(M_{T_a}\right)\,,$$

ko $t \to \infty$, torej je

$$E\left(M_{T_a}\right) = 1\,.$$

2. (25) Gompertzova stohastična diferencialna enačba je oblike

$$dX_t = \alpha X_t \log\left(\frac{m}{X_t}\right) dt + \sigma X_t dB_t\,,$$

kjer so α, m, σ pozitivne konstante. Privzemite, da obstaja enolična krepka rešitev pri danem začetnem pogoju $X_0 = x_0 > 0$ in da je rešitev strogo na $(0, \infty)$.

a. (10) Za $\lambda \in \mathbb{R}$ označite

$$Y_t = e^{\lambda t} \log(X_t)\,.$$

Izračunajte dY_t.

Rešitev: ker je rešitev vedno strogo na $(0,\infty)$, lahko uporabimo Itôvo formulo in dobimo

$$\begin{aligned} dY_t &= \lambda e^{\lambda t}\log(X_t)dt + e^{\lambda t}\left(\frac{1}{X_t}dX_t - \frac{1}{2X_t^2}d\langle X\rangle_t\right) \\ &= \lambda e^{\lambda t}\log(X_t)dt + e^{\lambda t}\left(\alpha\log\left(\frac{m}{X_t}\right)dt + \sigma dB_t - \frac{\sigma^2}{2}dt\right). \end{aligned}$$

Poenostavimo in sledi

$$dY_t = (\lambda - \alpha)Y_t dt + e^{\lambda t}\left(\left(\alpha\log m - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dB_t\right).$$

b. (5) Rešite Gompertzovo stohastično diferencialno enačbo pri začetnem pogoju $X_0 = x_0 > 0$.

Rešitev: z izbiro $\lambda = \alpha$ enačba preide v

$$dY_t = e^{\alpha t}\left(\alpha\log m - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma e^{\alpha t}dB_t\,,$$

od koder z integracijo in upoštevanjem, da je $Y_0 = \log x_0$, sledi

$$Y_t = \log(x_0) + \frac{1}{\alpha}\left(\alpha\log m - \frac{\sigma^2}{2}\right)\left(e^{\alpha t} - 1\right) + \sigma\int_0^t e^{\alpha s}dB_s$$

in posledično

$$X_t = (x_0)^{e^{-\alpha t}}\exp\left(\frac{1}{\alpha}\left(\alpha\log m - \frac{\sigma^2}{2}\right)\left(1 - e^{-\alpha t}\right) + \sigma\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}dB_s\right).$$

c. (10) Kot znano privzemite, da za slučajno spremenljivko $U \sim \mathrm{N}(a, b^2)$ velja

$$E\left(e^U\right) = e^{a+\frac{b^2}{2}}.$$

Izračunajte $E(X_t)$, pri čemer utemeljite korake.

Rešitev: integral

$$\sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dB_s$$

je stohastični integral zvezne deterministične funkcije, zato je normalno porazdeljen s pričakovano vrednostjo 0 *in varianco*

$$b^2 = \sigma^2 \int_0^t e^{-2\alpha(t-s)} ds = \sigma^2 \left(\frac{1 - e^{-2\alpha t}}{2\alpha} \right)$$

V izrazu za X_t *je v eksponentu normalna slučajna spremenljivka s pričakovano vrednostjo*

$$\frac{1}{\alpha} \left(\alpha \log m - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left(1 - e^{-\alpha t} \right)$$

in varianco b^2*. Sledi*

$$E(X_t) = (x_0)^{e^{-\alpha t}} \exp\left(\frac{1}{\alpha} \left(\alpha \log m - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left(1 - e^{-\alpha t} \right) + \frac{\sigma^2}{4\alpha} \left(1 - e^{-2\alpha t} \right) \right).$$

3. (25) Naj bo B standardno Brownovo gibanje.

a. (15) Naj bosta $0 < a < b \leq T$. Poiščite indegrand H, da bo

$$B_a B_b = a + \int_0^T H_s dB_s \,.$$

Namig: Definirajte martingala

$$M_t = \int_0^t \chi_{[0,a)}(s) dB_s \quad \textit{in} \quad N_t = \int_0^t \chi_{[a,b)}(s) dB_s \,.$$

in ugotovite, kaj sta M_T in N_T.

Rešitev: označimo z $\chi_{[a,b)}$ indikator intervala $[a,b)$. Definiramo

$$M_t = \int_0^t \chi_{[0,a)}(s) dB_s \quad \textit{in} \quad N_t = \int_0^t \chi_{[a,b)}(s) dB_s \,.$$

Formula za parcialno integracijo da

$$M_T N_T = B_a(B_b - B_a) = \int_0^T M_s dN_s + \int_0^T N_s dM_s \,,$$

pri čemer smo upoštevali, da je $\langle M, N \rangle = 0$. Prepišemo lahko v

$$B_a(B_b - B_a) = \int_0^T M_s \chi_{[a,b)}(s) dB_s + \int_0^T N_s \chi_{[0,a)}(s) dB_s \,.$$

Po drugi strani je

$$B_a^2 = a + 2\int_0^T \chi_{[0,a)}(s) B_s dB_s \,.$$

Sledi

$$\begin{aligned} B_a B_b &= (B_b - B_a) B_a + B_a^2 \\ &= a + \int_0^T M_s \chi_{[a,b)}(s) dB_s + \int_0^T N_s \chi_{[0,a)}(s) dB_s \\ &\qquad +2\int_0^T \chi_{[0,a)}(s) B_s dB_s \,. \end{aligned}$$

Iz tega je razviden integrand.

b. (10) Najdite integrand, da bo

$$(B_b - B_a)^2 = b - a + \int_0^T K_s dB_s \,.$$

Rešitev: zapišemo

$$(B_b - B_a)^2 = B_b^2 - 2B_aB_b + B_b^2 \,.$$

Vemo, da je

$$B_b^2 = b + 2\int_0^T \chi_{[0,b)}(s) B_s dB_s \quad \textit{in} \quad B_a^2 = a + 2\int_0^T \chi_{[0,a)}(s) B_s dB_s \,.$$

Reprezentacijo srednjega člena smo našli v prvem delu naloge. Iz tega lahko razberemo K*.*

4. (25) Naj bo $B_t^{(\nu)} = B_t + \nu t$ Brownovo gibanje s tendenco ν. Kot znano privzemite, da je

$$F(y,\nu,t) = P\left(\max_{0\le s\le t} B_s^{(\nu)} \ge y\right) = 1 - \Phi\left(\frac{y}{\sqrt{t}} - \nu\sqrt{t}\right) + e^{2\nu y}\left(1 - \Phi\left(\frac{y}{\sqrt{t}} + \nu\sqrt{t}\right)\right) .$$

Privzemite Black-Scholesov model z obrestno mero r in volatilnostjo σ. Digitalna opcija je dana z izplačilom

$$V_T = 1\left(\max_{0\le t\le T} S_t \ge a\right)$$

za dan nivo a, pri čemer privzamemo $S_0 < a$.

a. (15) Izračunajte V_0.

Rešitev: vemo, da je

$$V_0 = E_Q\left(\tilde{V}_T\right) .$$

Razpišemo in dobimo

$$\begin{aligned}
V_0 &= E_Q\left(e^{-rT}1\left(\max_{0\le t\le T} S_t \ge a\right)\right) \\
&= e^{-rT}Q\left(\max_{0\le t\le T} S_t \ge a\right) \\
&= e^{-rT}Q\left(\max_{0\le t\le T} \exp\left(\log S_0 + rt + \sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right) \ge a\right) \\
&= e^{-rT}Q\left(\max_{0\le t\le T} \left(\log S_0 + rt + \sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right) \ge \log a\right) \\
&= e^{-rT}Q\left(\max_{0\le t\le T} \left(rt/\sigma + W_t - \frac{\sigma}{2}t\right) \ge \frac{1}{\sigma}\log\left(a/S_0\right)\right).
\end{aligned}$$

Označimo

$$\nu = \frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2} \quad \text{in} \quad y = \frac{1}{\sigma}\log\left(a/S_0\right) .$$

Odgovor je

$$V_0 = e^{-rT}\left(1 - \Phi\left(\frac{y}{\sqrt{T}} - \nu\sqrt{T}\right)\right) + e^{2\nu y - rT}\left(1 - \Phi\left(\frac{y}{\sqrt{T}} + \nu\sqrt{T}\right)\right).$$

b. (10) Označite $\bar{S}_t = \max_{0\le s\le t} S_t$ za $0 \le t \le T$. Kot znano privzemite, da je

$$\tilde{V}_t = e^{-rT}1\left(\bar{S}_t \ge a\right) + e^{-rT}1\left(\bar{S}_t < a\right)F\left(\frac{1}{\sigma}\log(a/S_t), \frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}, T - t\right) .$$

Izrazite H_0 s funkcijo $F(y,\nu,t)$. Utemeljite korake.

Rešitev: v zgornjem zapisu razberemo, da je

$$\tilde{V}_t = \tilde{F}(S_t, \bar{S}_t, T-t)$$

za ustrezno funkcijo $\tilde{F}$. *Funkcija* $\tilde{F}$ *sicer ni povsod dvakrat zvezno odvedljiva, vendar je dovolj, da je odvedljiva v okolici* $(0,0,T)$. *Torej je*

$$H_0 = -\frac{\partial \tilde{F}}{\partial y}\left(\frac{1}{\sigma}\log(a/S_0), \frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}, T\right) \cdot \frac{1}{\sigma S_0}\,.$$