FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Finančna matematika 2

Pisni izpit

28. januar 2022

Ime in priimek: ____________________ Vpisna št: ☐☐☐☐☐☐☐☐

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Naloge so 4. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	a.	b.	c.	d.
1.				
2.			•	•
3.			•	•
4.				•
Skupaj				

1. (25) Naj bo B standardno Brownovo gibanje. Za $a < 0 < b$ definirajte časa ustavljanja

$$T_a = \inf\{t \geq 0 \colon B_t = a\} \quad \text{in} \quad T_b = \inf\{t \geq 0 \colon B_t = b\}$$

ter $T = T_a \wedge T_b$.

a. (5) Izračunajte

$$E\left(e^{\lambda B_T - \frac{\lambda^2}{2}T}\right) \quad \text{in} \quad E\left(e^{-\lambda B_T - \frac{\lambda^2}{2}T}\right).$$

Utemeljite korake.

Rešitev: ker je proces $M_t = e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t}$ martingal, za vsak t velja

$$E\left(e^{\lambda B_{T\wedge t} - \frac{\lambda^2}{2}(T\wedge t)}\right) = 1$$

po izreku o opcijskem ustavljanju. Ker velja $P(T < \infty) = 1$ in so izrazi v pričakovani vrednosti omejeni, lahko uporabimo izrek o dominirani konvergenci in dobimo

$$E\left(e^{\lambda B_T - \frac{\lambda^2}{2}T}\right) = 1\,.$$

Enako velja, če λ zamenjamo z $-\lambda$.

b. (10) Izpeljite enačbi

$$e^{\lambda a} E\left(e^{-\frac{\lambda^2}{2}T} \cdot 1(T = T_a)\right) + e^{\lambda b} E\left(e^{-\frac{\lambda^2}{2}T} \cdot 1(T = T_b)\right) = 1$$

in

$$e^{-\lambda a} E\left(e^{-\frac{\lambda^2}{2}T} \cdot 1(T = T_a)\right) + e^{-\lambda b} E\left(e^{-\frac{\lambda^2}{2}T} \cdot 1(T = T_b)\right) = 1$$

Rešitev: enačbi sledita iz dejstva, da na dogodku $\{T = T_a\}$ velja $B_T = a$ in podobno za b. Upoštevamo še, da je $1(T = T_a) + 1(T = T_b) = 1$.

c. (5) Izračunajte

$$E\left(e^{-\frac{\lambda^2}{2}T} \cdot 1(T = T_a)\right) \quad \text{in} \quad E\left(e^{-\frac{\lambda^2}{2}T} \cdot 1(T = T_b)\right)$$

Rešitev: v b. sta linearni enačbi za iskani količini. Ko ju rešimo, sledi

$$E\left(e^{-\frac{\lambda^2}{2}T} \cdot 1(T = T_a)\right) = \frac{e^{\lambda b} - e^{-\lambda b}}{e^{\lambda(b-a)} - e^{-\lambda(b-a)}}\,.$$

Podobno dobimo drug rezultat.

d. (5) Izračunajte

$$E\left(e^{-\frac{\lambda^2}{2}T}\right)$$

Rešitev: seštejemo rezultata v c.

2. (25) Stohastična diferencialna enačba za proces X naj bo dana kot

$$dX_t = \frac{1}{X_t}dt + X_t dB_t$$

z začetnim pogojem $X_0 = 1$. Privzemite, da obstaja enolična rešitev, za katero je $P(X_t > 0) = 1$ za vse $t \geq 0$.

a. (15) Definirajte

$$Z_t = e^{-B_t - \frac{1}{2}t} \quad \text{in} \quad Y_t = Z_t^2 X_t^2 \,.$$

Izračunajte dY_t.

Rešitev: Itôva formula nam da

$$dZ_t = -Z_t dB_t \,,$$

iz česar sledi $d\langle Z\rangle_t = Z_t^2 dt$. *Iz stohastične enačbe za* X *sledi* $d\langle X, Z\rangle_t = -Z_t X_t dt$ *in* $d\langle X\rangle_t = X_t^2 dt$. *Uporabimo Itôvo formulo za funkcijo* $f(x,z) = x^2 z^2$. *Računamo*

$$\begin{aligned}
dY_t &= 2X_t Z_t^2 dX_t + 2X_t^2 Z_t dZ_t \\
&\quad + Z_t^2 d\langle X\rangle_t + X_t^2 d\langle Z\rangle_t + 4X_t Z_t d\langle X, Z\rangle_t \\
&= 2X_t Z_t^2 \left(\frac{1}{X_t}dt + X_t dB_t\right) - 2X_t^2 Z_t^2 dB_t \\
&\quad + Z_t^2 X_t^2 dt + X_t^2 Z_t^2 dt - 4X_t^2 Z_t^2 dt \\
&= 2Z_t^2 dt - 2Y_t dt \,.
\end{aligned}$$

b. (10) Kot znano privzemite, da je rešitev nehomogene linearne diferencialne enačbe

$$u' + 2u = 2z^2$$

za znano funkcijo z in z začetnim pogojem $u(0) = u_0$ dana z

$$u(t) = e^{-2t}\left(u_0 + 2\int_0^t e^{2s} z(s)^2 ds\right) \,.$$

Najdite proces X.

Rešitev: enačba za Y *iz prvega dela je deterministična. Upoštevajoč formulo v besedilu naloge in dejstvo, da je* $Y_0 = x_0^2 = 1$, *dobimo*

$$Y_t = e^{-2t}\left(1 + 2\int_0^t e^{-2B_s + s} ds\right) \,.$$

Ker je $Y_t > 0$ *in je* $\sqrt{y}$ *na* $(0, \infty)$ *dvakrat zvezno odvedljiva, je* $\sqrt{Y_t}$ *semimartingal. Izračunamo*

$$X_t = Z_t^{-1} \cdot \sqrt{Y_t}\,,$$

kar lahko poenostavimo v

$$X_t = e^{B_t - \frac{1}{2}t} \cdot \sqrt{1 + 2\int_0^t e^{-2B_s + s} ds}\,.$$

3. (25) Naj bo B standardno Brownovo gibanje in $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ njegova naravna filtracija.

a. (13) Naj bo $0 \leq t < T$. Pokažite, da je

$$E\left(B_T^+|\mathcal{F}_t\right) = \frac{\sqrt{T-t}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{B_t^2}{2(T-t)}} + B_t \Phi\left(\frac{B_t}{\sqrt{T-t}}\right).$$

kjer je $x^+ = \max(x,0)$ in je $\Phi(z)$ porazdelitvena funkcija standardizirano normalne porazdelitve.

Rešitev: Gostota B_T pogojno na $B_t = x$ enaka

$$p_{T-t}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2(T-t)}}.$$

Sledi, da je

$$\begin{aligned}
E\left(B_T^+|B_t = x\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} y^+ p_{T-t}(x,y)dy \\
&= \int_0^{\infty} y\, p_{T-t}(x,y)dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_0^{\infty} y e^{-\frac{(y-x)^2}{2(T-t)}} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_0^{\infty} [(y-x)+x] e^{-\frac{(y-x)^2}{2(T-t)}} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \left(-(T-t) e^{-\frac{(y-x)^2}{2(T-t)}} \Big|_0^{\infty} + x \int_0^{\infty} e^{-\frac{(y-x)^2}{2(T-t)}}\, dy \right) \\
&= \frac{\sqrt{T-t}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2(T-t)}} + x\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{T-t}}\right).
\end{aligned}$$

Zaradi markovske lastnosti je

$$E\left(B_T^+|\mathcal{F}_t\right) = \frac{\sqrt{T-t}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{B_t^2}{2(T-t)}} + B_t \Phi\left(\frac{B_t}{\sqrt{T-t}}\right).$$

b. (12) Najdite integrand H_s, da bo za $0 \leq t < T$ veljalo

$$E\left(B_T^+|\mathcal{F}_t\right) = E\left(B_T^+\right) + \int_0^t H_s dB_s\,.$$

Rešitev: Ker je

$$E\left(B_T^+|\mathcal{F}_t\right) = F(B_t, t)$$

za $0 \leq t < T$ *in je* $F(x,t)$ *tam gladka funkcija, bo veljalo*

$$E\left(B_T^+ | \mathcal{F}_t\right) = E(B_T^+) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(B_s, s) dB_s \,.$$

S parcialnim odvajanjem dobimo

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,t) = \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{T-t}}\right) ,$$

torej je

$$H_t = \Phi\left(\frac{B_t}{\sqrt{T-t}}\right) .$$

4. (25) Privzemite Black-Scholesov model za gibanje cene delnice S. Obrestna mera r in volatilnost $\sigma > 0$ naj bosta konstantni. Definirajte

$$d_1(x, K, t) = \frac{\log(x/K) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

in

$$d_2(x, K, t) = d_1(x, K, t) - \sigma\sqrt{T-t}\,.$$

Naj bosta K_1 in K_2 s $K_1 < K_2$ dani števili, opcija pa naj ob dospetju izplača

$$V_T = \max(\min(S_T, K_2), K_1)\,.$$

a. (5) Izrazite V_0 s funkcijama d_1 in d_2.

Rešitev: označimo z $V_t^{c,K}$ cenovni proces evropske nakupne opcije z izvršno ceno K. Zapišemo lahko

$$V_T = K_1 + V_T^{c,K_1} - V_t^{c,K_2}\,,$$

kar je linearna kombinacija. Veljalo bo

$$\begin{aligned} V_0 &= K_1 e^{-rT} + S_0\Phi(d_1(S_0, K_1, 0)) - e^{-rT}K_1\Phi(d_2(S_0, K_1, 0)) \\ &\quad - S_0\Phi(d_1(S_0, K_2, 0)) + e^{-rT}K_2\Phi(d_2(S_0, K_2, 0))\,. \end{aligned}$$

b. (10) Izrazite V_t s funkcijama d_1 in d_2.

Rešitev: podobno kot v prejšnji točki je sklep, da je

$$\begin{aligned} V_t &= K_1 e^{-r(T-t)} + S_t\Phi(d_1(S_t, K_1, t)) - e^{-r(T-t)}K_1\Phi(d_2(S_t, K_1, t)) \\ &\quad - S_t\Phi(d_1(S_t, K_2, t)) + e^{-r(T-t)}K_2\Phi(d_2(S_t, K_2, t))\,. \end{aligned}$$

c. (5) Izračunajte H_0.

Rešitev: vemo, da je za nakupno opcijo $H_0 = \Phi(d_1(S_0, K, 0))$. Za opcijo s konstantnim izplačilom K_1 je varovalna listnica dana z $(K_1 e^{-r(T-t)}, 0)$. Varovalna listnica za linearno kombinacijo izplačil je linearna kombinacija varovalnih listnic. Sledi

$$H_0 = \Phi(d_1(S_0, K_1, 0)) - \Phi(d_1(S_0, K_2, 0)\,.$$

d. (5) Izračunajte H_t za $0 \le t \le T$.

Rešitev: podobno kot v prejšnji točki dobimo

$$H_t = \Phi(d_1(S_t, K_1, t)) - \Phi(d_1(S_t, K_2, t))\,.$$