FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Finančna matematika 2

Pisni izpit

21. april 2023

Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Naloge so 4. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	a.	b.	c.	d.
1.				
2.			•	•
3.			•	•
4.				•
Skupaj				

1. (25) Naj bosta B in D neodvisni standardni Brownovi gibanji. Definirajte proces X s predpisom

$$X_t = (B_t + 1)^2 + D_t^2 \,.$$

Definirajte čas ustavljanja

$$T = \inf\{t \geq 0 \colon X_t \in \{a, b\}\}$$

za števili $0 < a < 1 < b$.

a. (5) Izračunajte dX_t in $d\langle X \rangle_t$.

Rešitev: po Itû je

$$dX_t = 2(B_t + 1)dB_t + 2D_t dD_t + 2dt \,.$$

Iz dX_t sledi še

$$d\langle X \rangle_t = 4(B_t + 1)^2 dt + 4D_t^2 dt = 4X_t dt \,,$$

pri čemer smo upoštevali, da je $\langle B, D \rangle = 0$.

b. (10) Definirajte proces

$$Y_t = \frac{1}{2} \log\left(X_t\right) \,.$$

Utemeljite, da je $Y_t^T = Y_{t \wedge T}$ martingal.

Rešitev: proces Y^T je omejen (natančneje ima vrednosti v $[\frac{1}{2}\log a, \frac{1}{2}\log b]$), zato je treba pokazati le da je lokalni martingal. Na intervalu $(0, \infty) \supset [a, b]$ je funkcija $\frac{1}{2}\log x$ dvakrat zvezno odvedljiva. Po Itôvi formuli je

$$\begin{aligned} Y_t^T &= \int_0^t \frac{dX_s^T}{2X_s^T} - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d\langle X \rangle_s^T}{2(X_s^T)^2} \\ &= \int_0^t \frac{(B_s^T + 1)dB_s^T + D_s^T dD_s^T}{X_s^T} \,. \end{aligned}$$

c. (10) Privzemite, da je $P(T < \infty) = 1$. Pokažite, da je

$$P\left(X_T = a\right) = \frac{\log b}{\log b - \log a} \,.$$

Rešitev: Zaradi injektivnosti logaritma je

$$P(X_T = a) = P(Y_T = \tfrac{1}{2}\log a) \,.$$

Po drugi točki je Y^T omejen martingal, zato je

$$E(Y_T) = E(Y_0) = 0$$

ali

$$\frac{1}{2}\log a \cdot P(X_T = a) + \frac{1}{2}\log b \cdot P(X_t = b) = 0\,.$$

Po drugi strani je zaradi zveznosti (dovolj z desne) poti X*-a,* $P(X_T = a) + P(X_T = b) = 1$*. Rešimo enačbe in dobimo*

$$P(X_T = a) = \frac{\log b}{\log b - \log a}\,.$$

2. (25) V modelu Black-Karasinskega proces obrestnih mer sledi stohastični diferencialni enačbi

$$dR_t = R_t\,(a - \log R_t)\,dt + \sigma R_t dB_t$$

za dane konstante $a, \sigma > 0$ in začetni pogoj $R_0 = r_0 > 0$. Pri tem je B standardno Brownovo gibanje. Privzemite, da ima enačba enolično krepko rešitev, za katero je $P(R_t > 0) = 1$ za $t \geq 0$. Definirajte $X_t = \log R_t$.

a. (5) Izračunajte dX_t.

Rešitev: ker je $R_t > 0$, lahko uporabimo Itôvo formulo za funkcijo $\log x$ in dobimo

$$\begin{aligned} dX_t &= \frac{1}{R_t} dR_t - \frac{1}{2R_t^2} d\langle R\rangle_t \\ &= \frac{1}{R_t}\left(R_t\,(a - \log R_t)\,dt + \sigma R_t dB_t\right) - \frac{1}{2R_t^2}\sigma^2 R_t^2 dt \\ &= \left(a - X_t - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dB_t\,. \end{aligned}$$

b. (5) Izračunajte $d\left(e^{\lambda t} X_t\right)$.

Rešitev: po formuli za stohastično odvajanje produkta dobimo

$$\begin{aligned} d\left(e^{\lambda t} X_t\right) &= \lambda e^{\lambda t} X_t dt + e^{\lambda t}\left(\left(a - X_t - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dB_t\right) \\ &= e^{\lambda t}\left(\lambda X_t + a - \frac{\sigma^2}{2} - X_t\right) + e^{\lambda t}\sigma dB_t\,. \end{aligned}$$

c. (10) Rešite stohastično diferencialno enačbo.

Rešitev: v prejšnji točki izberemo $\lambda = 1$ in označimo $Y_t = e^t X_t$. Enačba preide v

$$dY_t = \left(a - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma e^t dB_t\,.$$

Sledi, da je

$$Y_t = \log r_0 + \left(a - \frac{\sigma^2}{2}\right)\left(e^t - 1\right) + \sigma \int_0^t e^s dB_s\,.$$

Rešitev izhodiščne enačbe je

$$R_t = r_0^{e^{-t}} \exp\left(\left(a - \frac{\sigma^2}{2}\right)(1 - e^{-t}) + \sigma \int_0^t e^{-(t-s)} dB_s\right)\,.$$

d. (5) Poiščite $\lim_{t\to\infty} E(R_t)$. Kot znano privzemite, da za slučajno spremenljivko $U \sim \mathrm{N}(c, b^2)$ velja

$$E\left(e^U\right) = e^{c+\frac{b^2}{2}}\,.$$

Rešitev: v izrazu za R_t je v eksponentu normalna slučajna spremenljivka s pričakovano vrednostjo

$$c = \left(a - \frac{\sigma^2}{2}\right)\left(1 - e^{-t}\right)$$

in varianco

$$b^2 = \frac{\sigma^2}{2}\left(1 - e^{-2t}\right).$$

Sledi, da je

$$\lim_{t\to\infty} E(R_t) = e^a\,.$$

3. (20) Hermitov polinom stopnje n je definiran kot $He_0(x) = 1$ in

$$He_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right) .$$

Za vsak $n \geq 1$ obstaja integrand K^n, da bo veljalo

$$He_n(B_1) = E\left[He_n(B_1)\right] + \int_0^1 K_s^n dB_s .$$

a. (10) Kot znano privzemite, da velja

$$He_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} He_k(y) .$$

Izrazite

$$M_t^n = E\left[He_n(B_1) | \mathcal{F}_t\right]$$

za $0 \leq t \leq 1$ s pomočjo zgornje formule.

Rešitev: zapišemo

$$\begin{aligned} E\left[He_n(B_1)|\mathcal{F}_t\right] &= E\left[He_n(B_1 - B_t + B_t)|\mathcal{F}_t\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_t^{n-k} E\left[He_k(B_1 - B_t)\right] . \end{aligned}$$

Pri tem smo uporabili neodvisnost prirastkov Brownovega gibanja in pravila za pogojne pričakovane vrednosti.

b. (15) Izrazite integrande K^n s Hermitovimi polinomi.

Rešitev: iz prvega dela naloge sledi, da je

$$M_t = F(B_t, t)$$

za funkcijo, ki je dana kot vsota. Pri tem opazimo, da je $E\left[He_k(B_1 - B_t)\right]$ *funkcija, ki je polinom izraza* $\sqrt{1-t}$ *in zato za* $t < 1$ *odvedljiva. Iz tega sledi, da je*

$$K_t^n = \frac{\partial F}{\partial x}(B_t, t) ,$$

kar pomeni

$$K_t^n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (n-k) B_t^{n-k-1} E\left[He_k(B_1 - B_t)\right] .$$

4. (25) Predpostavite Black-Scholesov model za gibanje cene delnice v katerem je obrestna mera $r = 0$. Fiksirajmo zapadlost $T \in (0, \infty)$ in nivo $a \in (0, \infty)$. Digitalna opcija ima izplačilno funkcijo

$$V_T = 1\left(\max_{0 \le t \le T} S_t \ge a\right),$$

torej izplačilo je 1, če cena opcije v časovnem intervalu $[0, T]$ preseže prag a, 0 sicer.

a. (10) Definirajte $\bar{S}_t = \max_{0 \le s \le t} S_s$ za $t \ge 0$. Za $0 \le t$ in $1 \le x$ definirajte

$$Q\left(\bar{S}_t / S_0 \ge x\right) = F(x, t),$$

kjer je Q običajna nova mera. Utemeljite, da je za $0 \le t \le T$

$$E_Q\left(1(\bar{S}_T \ge a) | \mathcal{F}_t\right) = 1(\bar{S}_t \ge a) + 1(\bar{S}_t < a) F(a/S_t, T - t).$$

Rešitev: zapišemo lahko

$$1 = 1(\bar{S}_t \ge a) + 1(\bar{S}_t < a).$$

Oba člena na desni sta $\mathcal{F}_t$ merljiva. Računamo

$$\begin{aligned} & E_Q\left(1(\bar{S}_T \ge a) | \mathcal{F}_t\right) = \\ = \; & E_Q\left(1(\bar{S}_t \ge a, \bar{S}_T \ge a) | \mathcal{F}_t\right) + E_Q\left(1(\bar{S}_t < a, \bar{S}_T \ge a) | \mathcal{F}_t\right) \\ = \; & 1(\bar{S}_t \ge a) + 1(\bar{S}_t < a) E_Q\left(S_t \max_{0 \le s \le T - t} \exp\left(\sigma(W_{t+s} - W_t) - \frac{\sigma^2}{2} s\right) \ge a | \mathcal{F}_t\right) \\ = \; & 1(\bar{S}_t \ge a) + 1(\bar{S}_t < a) F\left(a/S_t, T - t\right). \end{aligned}$$

b. (5) Naj bo $T_a = \inf\{t \ge 0 \colon S_t = a\}$. Utemeljite, da za $T_a \le T$ velja

$$V_{T_a} = 1.$$

Rešitev: če S_t doseže prag a pred časom T, vemo zagotovo, da bomo na koncu morali izplačati 1. Gibanje cene delnice od T_a naprej je brezpredmetno, zato v varovalnem portfelju delnice ne bo več, zaradi odsotnosti diskontiranja pa bo vrednost v trenutku $T_a \le T$ enaka zgornjemu znesku. Alternativno sledi željeno takoj iz točke (a) (kjer smo izračunali kar V_t, ker je $r = 0$) če izraz tam evaluiramo v T_a.

c. (10) Privzemite, da je $F(x,t)$ razreda C^2 v x in razreda C^1 v t za $t > 0$, $x > 0$. Pokažite, da je na $\{t < T_a \wedge T\}$ varovalna komponenta H za vrednostni proces V naše digitalne opcije enaka

$$H_t = -\frac{\partial F}{\partial x}\,(a/S_t, T-t) \cdot \frac{a}{S_t^2}\,.$$

Rešitev: do strogo pred časom $T_a \wedge T$ (procese ustavimo ob $T_{a-\epsilon} \wedge (T-\epsilon)$, $\epsilon \in (0, a \wedge T)$) lahko uporabimo Itôvo formulo in dobimo komponento H_t s parcialnim odvodom "$\partial V_t/\partial S_t$" za kar uporabimo izraz iz točke (a): do tega časa se namreč V_t izraža s C^2 funkcijo S_t-ja in t-ja. Uporabiti moramo samo še pravilo za odvajanje posrednih funkcij. Spustimo $\epsilon \downarrow 0$.