FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Finančna matematika 2

Pisni izpit

15. junij 2022

Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Naloge so 4. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	a.	b.	c.	d.
1.				•
2.			•	•
3.			•	•
4.				•
Skupaj				

1. (20) Naj bosta B in D neodvisni Brownovi gibanji. Definirajte

$$M_t = B_t^4 - 6B_t^2 D_t^2 + D_t^4 \qquad \text{in} \qquad N_t = (B_t^2 - t)(D_t^2 - t)\,.$$

a. (10) Pokažite, da sta M in N martingala.

Rešitev: Itôva formula nam z upoštevanjem $\langle B, D\rangle = 0$ da

$$\begin{aligned} dM_t &= 4B_t^3 dB_t + 6B_t^2 dt - 12 B_t D_t^2 dB_t - 12 B_t^2 D_t dD_t \\ &\quad -6D_t^2 dt - 6B_t^2 dt + 4D_t^3 dD_t + 6D_t^2 dt \\ &= \left(4B_t^3 - 12B_t\right) dB_t + \left(4D_t^3 - 12B_t^2 D_t\right) dD_t\,. \end{aligned}$$

Vsi integrandi so taki, da za $t > 0$ velja $E\left(\int_0^t H_s^2 ds\right) < \infty$, zato sta oba člena martingala in posledično je martingal tudi vsota. Podobno je

$$dN_t = 2B_t(D_t^2 - t)dB_t + 2(B_t^2 - t)dD_t\,.$$

b. (5) Naj bo čas ustavljanja T dan s $T = \inf\{t \geq 0\colon B_t^2 + D_t^2 > 1\}$. Izračunajte $E(B_T^2 D_T^2)$. Utemeljite korake.

Namig: $M_t = (B_t^2 + D_t^2)^2 - 8B_t^2 D_t^2$.

Rešitev: prepišimo

$$M_t = \left(B_t^2 + D_t^2\right)^2 - 8B_t^2 D_t^2\,.$$

Po izreku o opcijskem ustavljanju je $E(M_{t\wedge T}) = 0$ za vsak $t > 0$. Poleg tega je $M_{t\wedge T}$ omejen s konstanto za vse t in lahko pošljemo $t \to \infty$ in uporabimo izrek o dominirani konvergenci. Sledi

$$E(M_T) = 0 = 1 - 8E(B_T^2 D_T^2)\,.$$

in posledično

$$E(B_T^2 D_T^2) = \frac{1}{8}\,.$$

c. (10) Pokažite, da je

$$E(T^2) = E(T) - \frac{1}{8}\,.$$

Utemeljite korake.

Rešitev: po izreku o opcijskem ustavljanju je $E(N_{t\wedge T}) = 0$ za vse $t > 0$. Če prepišemo, sledi

$$E\left(B_{t\wedge T}^2 D_{t\wedge T}^2 - T(B_{t\wedge T}^2 + D_{t\wedge T}^2) + (T\wedge t)^2\right) = 0\,.$$

Prepišemo v

$$E\left((t \wedge T)^2\right) = -E\left(B_{t\wedge T}^2 D_{t\wedge T}^2\right) + E\left((t \wedge T)(B_{t\wedge T}^2 + D_{t\wedge T}^2)\right) .$$

Ko $t \to \infty$, *leva stran po izreku o monotoni konvergenci konvergira proti* $E(T^2)$. *Pričakovani vrednosti na desni strani sta dominirani z integrabilnimi spremenljivkami in konvergirata proti pričakovanim vrednostim izrazov, kjer* $t \wedge T$ *zamenjamo s* T. *Zveza sledi.*

2. (25) Prilagojen zvezen proces X naj ustreza enačbi

$$X_t = B_t^2 - t + \int_0^t X_s dB_s \,,$$

pri čemer je B Brownovo gibanje in velja $X_0 = 0$. Kot znano privzemite, da je rešitev enolična in za vsak $t > 0$ velja $E(\int_0^t X_s^2 ds) < \infty$.

a. (15) Naj bo $Z_t = \exp(B_t - \frac{1}{2}t)$. Izračunajte $d\left(Z_t^{-1} X_t\right)$. Najdite X.

Rešitev: Itôva formula nam da $dZ_t = Z_t dB_t$. Enačbo za X prepišemo z diferenciali in dobimo

$$dX_t = 2B_t dB_t + X_t dB_t \,.$$

Sledi $d\langle Z, X\rangle_t = (2Z_t B_t + Z_t X_t)dt$. Računamo

$$\begin{aligned} d\left(Z_t^{-1} X_t\right) &= -\frac{X_t}{Z_t^2} Z_t dB_t + \frac{1}{Z_t}(2B_t + X_t) dB_t \\ &\quad + \frac{X_t}{Z_t^3} Z_t^2 dt - \frac{1}{Z_t^2}(2Z_t B_t + Z_t X_t) dt \\ &= \frac{1}{Z_t}\left(2B_t dB_t - 2B_t dt\right) . \end{aligned}$$

Sledi, da je

$$X_t = Z_t \left(\int_0^t Z_s^{-1} (2B_s dB_s - 2B_s ds) \right) .$$

b. (10) Utemeljite, da je $\langle X, B\rangle_t = \int_0^t (2B_s + X_s) ds$ in sklepajte, da je $E\left(X_t B_t\right) = 0$.

Rešitev: iz $dX_t = 2B_t dB_t + X_t dB_t$ sledi izraz za križno kvadratično variacijo. Ker je $X_t B_t - \langle X, B\rangle_t$ martingal, velja

$$\begin{aligned} E(X_t B_t) &= E\left(\langle X, B\rangle_t\right) \\ &= E\left(\int_0^t (2B_s + X_s) ds\right) \\ &= \int_0^t \left(2E(B_s) + E(X_s)\right) ds \\ &= 0 \,. \end{aligned}$$

Dejstvo, da je $E(X_t) = 0$ sledi, če v enačbi za X na levi in desni izračunamo pričakovano vrednost.

3. (25) Naj bo B Brownovo gibanje in $\lambda > 0$.

a. (10) Preverite, da je

$$\int_0^T e^{\frac{\lambda^2 s}{2}} \sin(\lambda B_s) dB_s = \frac{1}{\lambda}\left[e^{\frac{\lambda^2 T}{2}} \cos(\lambda B_T) - 1\right].$$

Rešitev: Itôva formula nam da

$$\begin{aligned} & e^{\frac{\lambda^2 T}{2}} \cos(\lambda B_T) \\ = \;& 1 + \lambda \int_0^T e^{\frac{\lambda^2 s}{2}} \sin(\lambda B_s) dB_s + \frac{\lambda^2}{2} \int_0^T e^{\frac{\lambda^2 s}{2}} \cos(\lambda B_s) ds \\ & -\frac{\lambda^2}{2} \int_0^T e^{\frac{\lambda^2 s}{2}} \cos(\lambda B_s) ds \\ = \;& 1 + \lambda \int_0^T e^{\frac{\lambda^2 s}{2}} \sin(\lambda B_s) dB_s\,. \end{aligned}$$

b. (15) Poiščite integrand H_s, da bo

$$\cos^2(\lambda B_T) = E\left(\cos^2(\lambda B_T)\right) + \int_0^T H_s dB_s\,.$$

Uporabite rezultat za izračun $E\left(\cos^2(\lambda B_T)\right)$.

Namig: zapišite $\cos^2 x$ *z adicijskim izrekom.*

Rešitev: iz adicijskega izreka sledi, da je

$$\cos^2(\lambda B_T) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos(2\lambda B_T)\right)\,.$$

Prvi del naloge nam da

$$e^{2\lambda^2 T} \cos(2\lambda B_T) = 1 + 2\lambda \int_0^T e^{2\lambda^2 s} \sin(2\lambda B_s) dB_s\,.$$

Sledi, da je

$$\begin{aligned} e^{2\lambda^2 T} \cos^2(\lambda B_T) = \;& = \frac{1}{2}\left(e^{2\lambda^2 T} + e^{2\lambda^2 T} \cos(2\lambda B_T)\right) \\ & = \frac{1}{2}\left(e^{2\lambda^2 T} + 1 + 2\lambda \int_0^T e^{2\lambda^2 s} \sin(2\lambda B_s) dB_s\right) \\ & = \frac{1 + e^{2\lambda^2 T}}{2} + \lambda \int_0^T e^{2\lambda^2 s} \sin(2\lambda B_s) dB_s\,. \end{aligned}$$

Iskani integrand je

$$H_s = \lambda e^{2\lambda^2(T-s)} \sin(2\lambda B_s) \,.$$

Če na obeh straneh predzadnje enačbe izračunamo pričakovano vrednost, sledi

$$e^{2\lambda^2 T} E\left(\cos^2(\lambda B_T)\right) = \frac{1 + e^{2\lambda^2 T}}{2}$$

in posledično

$$E\left(\cos^2(\lambda B_T)\right) = \frac{1}{2}\left(1 + e^{-2\lambda^2 T}\right) \,.$$

4. (25) Naj bo S cena delnice v Black-Scholesovem modelu, z obrestno mero $r \in (0,\infty)$, in volatilnostjo $\sigma \in (0,\infty)$. Fiksirajmo zapadlost $T \in [0,\infty)$ in označimo z Q martingalsko mero za interval $[0,T]$, tako da je na $[0,T]$, $dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$ za Q-Brownovo gibanje W.

a. (5) Naj bodo dane konstante $0 < a \leq b \leq \infty$, ter $s \in [0,\infty)$. Skicirajte graf funkcije $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ dane s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{za } 0 \leq x \leq a \\ s(x-a) & \text{za } a < x \leq b \\ s(b-a) & \text{za } x > b \end{cases} .$$

Rešitev: Naloga je elementarna.

b. (10) Zapišite $f(S_T)$ kot ustrezno linearno kombinacijo dveh izplačil evropskih nakupnih opcij. Določite za $0 \leq t \leq T$

$$V_t := E_Q\left[e^{-r(T-t)} f(S_T) | \mathcal{F}_t\right] .$$

Rešitev: $f(x) = s((x-a)^+ - (x-b)^+)$, $x \in [0,\infty)$, *in ustrezno za* S_T *namesto* x. *Ker je za* $0 \leq t < T$ *in* $k \in (0,\infty)$, *s.g.* $Q(t;k) := E_Q\left[e^{-r(T-t)}(S_T - k)^+ | \mathcal{F}_t\right] = S_t \Phi(d_1) - k e^{-r(T-t)} \Phi(d_2)$, *kjer je*

$$d_1 = \frac{\log(S_t/k) + r(T-t) + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

in

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t};$$

, sledi iz linearnosti upanja, da je s.g. $V_t = s(Q(t;a) - Q(t;b))$. *Seveda je* $V_T = f \circ S_T$, *s.g.*

c. (10) Za $0 \leq t < T$ navedite komponento H_t varovalnega portfelja za opcijo, ki izplača $f(S_T)$ v času T.

Rešitev: Ponovno sledi iz linearnosti, da je iskani H *razlika ustreznih* H*-jev za evropski nakupni opciji z izvršnima cenama* a *in* b*, pomnožen z* s*. Se pravi*
$H_t = s\left(\Phi\left(\frac{\log(S_t/a)+r(T-t)+\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) - \Phi\left(\frac{\log(S_t/b)+r(T-t)+\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)\right)$.