FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Finančna matematika 2

Pisni izpit

7. september 2021

Ime in priimek: ____________________ Vpisna št: ☐☐☐☐☐☐☐☐

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Naloge so 4. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	a.	b.	c.	d.	
1.				•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.					
Skupaj					

1. (25) Naj bo B standardno Brownovo gibanje in definirajte proces X kot

$$X_t = B_t^3 - 3tB_t\,.$$

a. (5) Pokažite, da je X lokalni martingal in izrazite $\langle X\rangle$.

Rešitev: Po Itôvi formuli in pravilu za odvajanje produkta je

$$dX_t = 3B_t^2dt + 3B_tdt - 3B_tdt - 3tdB_t = 3(B_t^2 - t)dB_t\,.$$

Sledi, da je X lokalni martingal in je $d\langle X\rangle_t = 9(B_t^2 - t)^2dt$.

b. (10) Pokažite, da sta procesa

$$M_t = e^{\frac{9\lambda^2}{2}\int_0^t(B_s^2-s)^2ds}\cos(\lambda X_t) \quad \text{in} \quad N_t = e^{\frac{9\lambda^2}{2}\int_0^t(B_s^2-s)^2ds}\sin(\lambda X_t)$$

lokalna martingala.

Rešitev: Ker je $\langle \lambda X\rangle_t = 9\lambda^2\int_0^t(B_s^2 - s)^2ds$, je za proces $R = \lambda X$

$$\begin{aligned} dM_t &= d(e^{\langle R\rangle_t/2}\cos(R_t)) \\ &= M_t\cdot d\langle R\rangle_t/2 - e^{\langle R\rangle_t/2}\sin(R_t)dR_t - M_td\langle R\rangle_t/2 \\ &= -N_tdR_t\,. \end{aligned}$$

Ker je R lokalni martingal, je torej tudi M lokalni martingal kot stohastični integral zveznega, prilagojenega procesa. Za N računamo podobno.

c. (10) Naj bo

$$T = \inf\{t \geq 0 \colon 9\int_0^t(B_s^2 - s)^2ds > 1\}\,.$$

Utemeljite, da je

$$E[M_T] = 1 \quad \text{in} \quad E[N_T] = 0\,.$$

Privzemite, da je $P(T < \infty) = 1$.

Rešitev: Ustavljen lokalni martingal je lokalni martingal. Procesa M^T in N^T sta torej omejena lokalna martingala in zato omejena martingala. Po izreku o opcijskem ustavljanju je

$$E[M_0] = E[M_{t\wedge T}] \qquad in \qquad E[N_0] = E[N_{T\wedge t}]$$

za vsak t. Ko $t\to\infty$, je $M_{T\wedge t}\to M_T$ in podobno za N. Ker je $M_{t\wedge T}$ omejen, sledi trditev z uporabo izreka o dominirani konvergenci. Argument za N je podoben.

2. (25) Prilagojen zvezen proces S naj ustreza enačbi

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mu(B_s, s) S_s ds + \int_0^t \sigma(B_s, s) S_s dB_s \,,$$

kjer sta μ in σ zvezni deterministični funkciji in je $S_0 \in (0, \infty)$.

a. (10) Privzemite, da je $S_t > 0$ za vse $0 \leq t \leq T$. Pokažite, da velja

$$\int_0^T \sigma^2(B_s, s) ds = -2 \log \left(\frac{S_T}{S_0} \right) + \int_0^T \frac{2}{S_s} dS_s \,.$$

Rešitev: Ker je $S_t > 0$, lahko uporabimo Itôvo formulo za funkcijo $f(x) = \log x$. Dobimo

$$\begin{aligned} \log(S_T) - \log(S_0) &= \int_0^T \frac{1}{S_s} dS_s - \frac{1}{2} \int_0^T \frac{1}{S_s^2} d\langle S \rangle_s \\ &= \int_0^T \frac{1}{S_s} dS_s - \frac{1}{2} \int_0^T \frac{1}{S_s^2} \sigma^2(B_s, s) S_s^2 ds \\ &= \int_0^T \frac{1}{S_s} dS_s - \frac{1}{2} \int_0^T \sigma^2(B_s, s) ds \,. \end{aligned}$$

Enačbo pomnožimo z -2 in preuredimo in rezultat sledi.

b. (15) Izračunajte stohastični diferencial procesa

$$Y_t = S_t \exp \left(- \int_0^t \sigma(B_s, s) dB_s + \int_0^t \left(\frac{\sigma^2(B_s, s)}{2} - \mu(B_s, s) \right) ds \right) \,.$$

Sklepajte, da je $S_t > 0$ s.g. za vse $0 \leq t \leq T$.

Rešitev: Izračunajmo najprej diferencial drugega člena. Označimo člen v eksponentu z Z_t. Po Itôvi formuli dobimo

$$\begin{aligned} d\left(e^{Z_t}\right)_t &= e^{Z_t} dZ_t + \frac{1}{2} e^{Z_t} d\langle Z \rangle_t \\ &= e^{Z_t} \left(-\sigma(B_t, t) dB_t + \frac{1}{2} \sigma^2(B_t, t) dt - \mu(B_t, t) dt + \frac{1}{2} \sigma^2(B_t, t) dt \right) \,. \end{aligned}$$

Odvajamo

$$\begin{aligned} d\left(S_t e^{Z_t}\right) &= e^{Z_t} dS_t + S_t e^{Z_t} dZ_t + \frac{1}{2} S_t e^{Z_t} d\langle Z \rangle_t + e^{Z_t} d\langle S, Z \rangle_t \\ &= e^{Z_t} \Big(\mu(B_t, t) S_t dt + \sigma(B_t, t) S_t dB_t - \sigma(B_t, t) S_t dB_t \\ &\qquad - \mu(B_t, t) S_t dt + \sigma^2(B_t, t) S_t dt - \sigma^2(B_t, t) S_t dt \Big) \\ &= 0 \,. \end{aligned}$$

Proces Y je konstanten in različen od 0, kar pomeni, $S_t > 0$ s.g.

3. (25) Naj bo B standardno Brownovo gibanje in naj bo $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ filtracija, ki jo generira. Naj bo

$$A_t = \int_0^t B_s^2 ds\,.$$

a. (10) Za $0 \leq t < T$ izračunajte

$$E\left(A_T | \mathcal{F}_t\right)\,.$$

Rešitev: Računamo

$$\begin{aligned}
A_T &= A_t + \int_t^T B_s^2 ds \\
&= A_t + \int_t^T \left(B_t + (B_s - B_t)\right)^2 ds \\
&= A_t + B_t^2(T-t) + 2B_t \int_0^{T-t} (B_{t+u} - B_t) du + \int_0^{T-t} (B_{t+u} - B_t)^2 du\,.
\end{aligned}$$

Po markovski lastnosti je $(B_{t+u} - B_t\colon u \geq 0)$ *Brownovo gibanje neodvisno of* $\mathcal{F}_t$. *Opazimo še, da je*

$$E\left[\int_0^{T-t} (B_{t+u} - B_t) du\right] = 0$$

in

$$E\left[\int_0^{T-t} (B_{t+u} - B_t)^2 du\right] = \int_0^{T-t} u du = \frac{(T-t)^2}{2}\,.$$

Po pravilih za pogojno pričakovano vrednost bo

$$E\left(A_T | \mathcal{F}_t\right) = A_t + B_t^2(T-t) + \frac{(T-t)^2}{2}\,.$$

b. (15) Poiščite prilagojen proces H, da bo veljalo

$$E\left[\int_0^T H_s^2 ds\right] < \infty$$

in

$$A_T = E\left(A_T\right) + \int_0^T H_s dB_s\,.$$

Rešitev: Iz prvega dela sledi, da je

$$E\left(A_T | \mathcal{F}_t\right) = F(B_t, A_t, t)\,.$$

Ker je

$$F(x,y,t) = y + x^2(T-t) + \frac{(T-t)^2}{2}\,,$$

je funkcija dovolj gladka, da uporabimo Itôvo formulo. Sledi

$$\begin{aligned} F(B_t, A_t, t) - F(0,0,0) &= \\ = \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(B_s, A_s, s)dB_s &+ \int_0^t \frac{\partial F}{\partial y}(B_s, A_s, s)dA_s \\ &+ \int_0^t \frac{\partial F}{\partial t}(B_s, A_s, s)ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(B_s, A_s, s)ds\,. \end{aligned}$$

Na levi je martingal. To pomeni, da se morajo na desni členi, ki imajo končno totalno variacijo, sešteti v konstanto. Sledi, da je

$$F(B_t, A_t, t) = \frac{T^2}{2} + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(B_s, A_s, s)dB_s\,.$$

Sledi

$$H_t = 2B_t(T-t)\,.$$

Očitno je zadoščeno tudi pogoju za integrabilnost.

4. (25) Predpostavite za gibanje cene delnice Black-Scholesov model, torej

$$S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t} .$$

Predpostavite še, da na časovnem intervalu $[0, T]$ obrestna mera ni konstantna, temveč je znana omejena funkcija $r(t)$, tako da je diskontirani proces cene enak

$$\tilde{S}_t = S_0 e^{-\int_0^t r(s)ds + \mu t + \sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t}$$

a. (10) Kako bi zamenjali mero, da bi bil $\tilde{S}$ martingal za $0 \leq t \leq T$?

Namig: Pod katero novo mero je proces

$$W_t = B_t - \int_0^t \frac{r(s) - \mu}{\sigma} ds$$

Brownovo gibanje?

Rešitev: Zapišemo drugače

$$\tilde{S}_t = S_0 \exp\left(\sigma\left(B_t - \int_0^t \frac{r(s) - \mu}{\sigma} ds\right) - \frac{\sigma^2}{2}t\right) .$$

Zamenjati bi morali mero tako, da bi bil proces

$$B_t - \int_0^t \frac{r(s) - \mu}{\sigma} ds$$

pod novo mero Brownovo gibanje. Za Radon-Nikodýmov odvod izberemo po izreku Girsanova izraz

$$\exp\left(\int_0^T \frac{r(s) - \mu}{\sigma} dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T \left(\frac{r(s) - \mu}{\sigma}\right)^2 ds\right) .$$

Pod to novo mero Q je

$$W_t = B_t - \int_0^t \frac{r(s) - \mu}{\sigma} ds$$

Brownovo gibanje. Pod Q bo torej

$$S_t = S_0 \exp\left(\int_0^t r(s)ds + \sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right) .$$

b. (5) Ovrednotite evropsko nakupno opcijo z izvršno ceno k in zapadlostjo T, v trenutku $t = 0$.

Namig: V_0 je pričakovana diskontirana vrednost V_T pod novo mero. Ne računajte integralov , temveč si pomagajte z znanimi formulami za evropske nakupne opcije pri konstantni obrestni meri.

Rešitev: Izračunati je treba

$$V_0 = e^{-\int_0^T r(s)ds} E_Q\left((S_T - k)_+\right) .$$

Pričakovana vrednost je

$$e^{-\int_0^T r(s)ds} E_Q\left(\left(S_0 e^{\int_0^T r(s)ds + \sigma W_T - \frac{\sigma^2}{2}T} - k\right)_+\right) .$$

Ta integral poznamo, saj smo ga izračunali za evropsko nakupno opcijo v primeru konstantne obrestne mere. Edina razlika je, da nadomestimo rT z $\int_0^T r(s)ds$. Sledi

$$V_0 = S_0\Phi(d_1) - ke^{-\int_0^T r(s)ds}\Phi(d_2)$$

za

$$d_1 = \frac{\log(S_0/k) + \int_0^T r(s)ds + \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}$$

in

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} .$$

c. (5) Ovrednotite evropsko nakupno opcijo z izvršno ceno k in zapadlostjo T, v trenutku t.

Rešitev: V prejšnji točki nadomestimo $\int_0^T r(s)ds$ z $\int_t^T r(s)ds$ in T s $T - t$, ter S_0 z S_t.

d. (5) Zapišite komponento H_t varovalnega portfelja.

Rešitev: Za navadno evropsko nakupno opcijo z izvršno ceno k je $H_t = \Phi(d_1)$. Velja enaka formula, le definiramo

$$d_1 = \frac{\log(S_t/k) + \int_t^T r(s)ds + \frac{\sigma^2}{2}(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} .$$