FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Finančna matematika 2

Pisni izpit

6. maj 2021

Ime in priimek: ______________________________ Vpisna št.: | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Naloge so 4. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	a.	b.	c.	d.
1.			•	•
2.				•
3.			•	•
4.				
Skupaj				

1. (25) Naj bo B standardno Brownovo gibanje. Za $a, b > 0$ definirajte čas ustavljanja

$$T_{a,b} = \inf\{t \geq 0 \colon B_t \in \{-a, b\}\}\,.$$

a. (10) Procesu $X_t = (b - B_t)(B_t + a)$ prištejte ustrezno linearno funkcijo tako da boste dobili martingal.

Rešitev: vemo, da je $B_t^2 - t$ martingal. Če razpišemo

$$X_t = bB_t - B_t^2 + ab - aB_t\,,$$

so vsi členi razen B_t^2 martingali. Prišteti moramo samo t.

b. (15) Izračunajte $E(T_{a,b})$. Utemeljite vse korake.

Rešitev: iz prvega dela sledi, da je $M_t = (b - B_t)(B_t + a) + t$ martingal. Po izreku o opcijskem ustavljanju je za $t > 0$

$$E\left(M_{T_{a,b}\wedge t}\right) = E(M_0)\,.$$

Prepišemo lahko v

$$E\left((b - B_{T_{a,b}\wedge t})(B_{T_{a,b}\wedge t} + a)\right) = E(M_0) - E(T_{a,b} \wedge t)\,.$$

Integrand na levi strani je omejen in ker je $P(T_{a,b} < \infty) = 1$, konvergira proti 0, ko $t \to \infty$. Na desni lahko uporabimo izrek o monotoni konvergenci. Sledi

$$E(T_{a,b}) = E(M_0) = ab\,.$$

2. (25) Semimartingal X naj ustreza stohastični diferencialni enačbi

$$dX_t = X_t(1 - X_t)dt + X_t dW_t \,,$$

kjer je W standardno Brownovo gibanje. Privzemite, da je $X_0 = x_0 > 0$.

a. (5) Definirajte $Y_t = 1/X_t$. Izpeljite stohastično diferencialno enačbo za Y. Utemeljite, da ima stohastična diferencialna enačba za Y enolično krepko rešitev.

Rešitev: po Itôvi formuli je

$$dY_t = -\frac{1}{X_t^2} dX_t + \frac{1}{X_t^3} d\langle X \rangle_t \,.$$

Upoštevamo, da je $d\langle X \rangle_t = X_t^2 dt$ in sledi

$$dY_t = (1 - Y_t)dt + Y_t dW_t + Y_t dt \,,$$

kar se poenostavi v

$$dY_t = dt + Y_t dW_t \,.$$

Koeficienta ustrezata Lipshitzovemu pogoju, zato ima enačba enolično krepko rešitev.

b. (10) Izpeljite stohastično diferencialno enačbo za proces

$$Z_t = e^{\alpha W_t + \beta t} \cdot Y_t$$

za dana α in β.

Rešitev: računamo

$$d\left(e^{\alpha W_t + \beta t}\right) = e^{\alpha W_t + \beta t}(\alpha dW_t + \beta dt) + \frac{\alpha^2}{2} e^{\alpha W_t + \beta t} dt \,.$$

Po formuli za stohastično odvajanje produkta je

$$\begin{aligned} dZ_t &= Y_t e^{\alpha W_t + \beta t} \left(\alpha dW_t + \beta dt + \frac{a^2}{2} dt \right) + e^{\alpha W_t + \beta t} dY_t \\ & \quad + a e^{\alpha W_t + \beta t} Y_t dt \,. \end{aligned}$$

Poenostavimo lahko v

$$dZ_t = (\alpha + 1) Z_t dW_t + \left(\beta + \frac{\alpha^2}{2} + \alpha \right) Y_t dt + e^{\alpha W_t + \beta t} dt \,.$$

c. (10) Poiščite proces X.

Rešitev: v drugi točki izberemo $\alpha = -1$ in $\beta = \frac{1}{2}$. Enačba se poenostavi v

$$dZ_t = e^{-W_t + \frac{t}{2}} dt\,.$$

Sledi, da je

$$Z_t = z_0 + \int_0^t e^{-W_s + \frac{s}{2}} ds$$

in posledično

$$X_t = \left(e^{W_t - \frac{t}{2}} \left(\frac{1}{x_0} + \int_0^t e^{-W_s + \frac{s}{2}} ds \right) \right)^{-1}\,.$$

3. (25) Naj bo B standardno Brownovo gibanje. Naj bo $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = T$ particija intervala $[0, T]$. Definirajte

$$X = \prod_{k=1}^{n} \left(B_{t_k} - B_{t_{k-1}} \right) .$$

Velja $E(X) = 0$ in $E(X^2) = \prod_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})$.

a. (10) Definirajte

$$H_t^k = \begin{cases} 1 & \text{za } t_{k-1} \le t \le t_k \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

in $M_t^k = \int_0^T H_s dB_s$ za $t \in [0, T]$. Izračunajte $\int_0^T H_t^k dB_s$ in $\langle M^k, M^l \rangle$ za $k \neq l$.

Rešitev: očitno je $\int_0^T H_t^k dB_s = B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$. Po pravih za stohastične integrale je $\langle H \cdot B, K \cdot B \rangle = HK \cdot \langle B, B \rangle$. Ker je v našem primeru $H^k H^l = 0$, so vsi oklepaji enaki 0.

b. (15) Najdite integrand H, da bo

$$X = \int_0^T H_t dB_t \, .$$

Namig: $X = F(M_T^1, \ldots, M_T^n) = \prod_{k=1}^{n} M_T^k$.

Rešitev: uporabimo Itôvo formulo za $F(x_1, \ldots, x_n) = x_1 x_2 \cdots x_n$. Vsi drugi parcialni odvodi po isti spremenljivki so enaki 0, pri mešanih parcialnih odvodih pa so oklepaji enaki 0, zato v Itôvi formuli ostanejo samo prvi parcialni odvodi. Sledi

$$\prod_{k=1}^{n} M_T^k = \sum_{k=1}^{n} \int_0^T \frac{\partial F}{\partial x_k}(M_t^1, \ldots, M_t^n) dM_s^k \, .$$

Sledi, da je

$$H_t = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_k}(M_t^1, \ldots, M_t^n) H_t^k \, .$$

4. (25) Predpostavite za gibanje cene delnice Black-Scholesov model, torej

$$S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2} t} .$$

Predpostavite še, da na časovnem intervalu $[0, T]$ obrestna mera ni konstantna, temveč je znana omejena funkcija $r(t)$, tako da je diskontirani proces cene enak

$$\tilde{S}_t = S_0 e^{-\int_0^t r(s)ds + \mu t + \sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2} t}$$

a. (10) Kako bi zamenjali mero, da bi bil $\tilde{S}$ martingal za $0 \leq t \leq T$?

Namig: Pod katero novo mero je proces

$$W_t = B_t - \int_0^t \frac{r(s) - \mu}{\sigma} ds$$

Brownovo gibanje?

Rešitev: Zapišemo drugače

$$\tilde{S}_t = S_0 \exp\left(\sigma\left(B_t - \int_0^t \frac{r(s) - \mu}{\sigma} ds\right) - \frac{\sigma^2}{2} t\right) .$$

Zamenjati bi morali mero tako, da bi bil proces

$$B_t - \int_0^t \frac{r(s) - \mu}{\sigma} ds$$

pod novo mero Brownovo gibanje. Za Radon-Nikodýmov odvod izberemo po izreku Girsanova izraz

$$\exp\left(\int_0^T \frac{r(s) - \mu}{\sigma} dB_s - \frac{1}{2} \int_0^T \left(\frac{r(s) - \mu}{\sigma}\right)^2 ds\right) .$$

Pod to novo mero Q je

$$W_t = B_t - \int_0^t \frac{r(s) - \mu}{\sigma} ds$$

Brownovo gibanje. Pod Q bo torej

$$S_t = S_0 \exp\left(\int_0^t r(s) ds + \sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t\right) .$$

b. (5) Ovrednotite evropsko nakupno opcijo z izvršno ceno k in zapadlostjo T, v trenutku $t = 0$.

Namig: V_0 je pričakovana diskontirana vrednost V_T pod novo mero. Ne računajte integralov , temveč si pomagajte z znanimi formulami za evropske nakupne opcije pri konstantni obrestni meri.

Rešitev: Izračunati je treba

$$V_0 = e^{-\int_0^T r(s)ds} E_Q\left((S_T - k)_+\right) .$$

Pričakovana vrednost je

$$e^{-\int_0^T r(s)ds} E_Q\left(\left(S_0 e^{\int_0^T r(s)ds + \sigma W_T - \frac{\sigma^2}{2}T} - k\right)_+\right) .$$

Ta integral poznamo, saj smo ga izračunali za evropsko nakupno opcijo v primeru konstantne obrestne mere. Edina razlika je, da nadomestimo rT z $\int_0^T r(s)ds$. Sledi

$$V_0 = S_0\Phi(d_1) - ke^{-\int_0^T r(s)ds}\Phi(d_2)$$

za

$$d_1 = \frac{\log\left(S_0/k\right) + \int_0^T r(s)ds + \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}$$

in

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} .$$

c. (5) Ovrednotite evropsko nakupno opcijo z izvršno ceno k in zapadlostjo T, v trenutku t.

Rešitev: V prejšnji točki nadomestimo $\int_0^T r(s)ds$ z $\int_t^T r(s)ds$ in T s $T - t$, ter S_0 z S_t.

d. (5) Zapišite komponento H_t varovalnega portfelja.

Rešitev: Za navadno evropsko nakupno opcijo z izvršno ceno k je $H_t = \Phi(d_1)$. Velja enaka formula, le definiramo

$$d_1 = \frac{\log\left(S_t/k\right) + \int_t^T r(s)ds + \frac{\sigma^2}{2}(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} .$$