FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Finančna matematika 2

Pisni izpit

4. marec 2022

Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Naloge so 4. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	a.	b.	c.	d.
1.			•	•
2.				•
3.			•	•
4.				•
Skupaj				

1. (25) Naj bo B standardno Brownovo gibanje in definirajte

$$X_t = \int_0^t 1(B_s > 0) dB_s \, .$$

Definirajte

$$A_t = \int_0^t 1(B_s > 0) ds \, .$$

a. (15) Pokažite, da sta procesa

$$M_t = e^{\frac{\lambda^2}{2} A_t} \cos(\lambda X_t) \quad \text{in} \quad N_t = e^{\frac{\lambda^2}{2} A_t} \sin(\lambda X_t)$$

martingala.

Rešitev: Računamo z diferenciali in opazimo, da je $A_t = \langle M \rangle_t$. Dobimo

$$\begin{aligned} dM_t &= \frac{\lambda^2}{2} e^{\frac{\lambda^2}{2} A_t} \cos(\lambda X_t) dA_t - e^{\frac{\lambda^2}{2} A_t} \left(\lambda \sin(\lambda X_t) dX_t - \frac{\lambda^2}{2} \cos(\lambda X_t) d\langle X \rangle_t \right) \\ &= e^{\frac{\lambda^2}{2} A_t} \left(\frac{\lambda^2}{2} \cos(\lambda X_t) dA_t - \lambda \sin(\lambda X_t) 1(B_t > 0) dB_t - \frac{\lambda^2}{2} \cos(\lambda X_t) dA_t \right) \\ &= -\lambda e^{\frac{\lambda^2}{2} A_t} \sin(\lambda X_t) 1(B_t > 0) dB_t \, . \end{aligned}$$

Ker je integrand na vsakem končnem intervalu omejen, je lokalni martinal M tudi martingal. Podobno računamo za N.

b. (10) Naj bo $T = \inf\{t \geq 0 \colon A_t \geq 1\}$. Izračunajte $E(M_T)$ in $E(N_T)$. Utemeljite korake. Kot znano lahko privzamete, da je $P(T < \infty) = 1$.

Rešitev: T je čas ustavljanja. Proces $(M_{T\wedge t})_{t\in[0,\infty)}$ je omejen lokalni martingal, torej martingal, in lahko uporabimo dejstvo, da imajo martingali konstantno upanje, pa dobimo

$$E(M_{T\wedge t}) = 1 \, .$$

Ko $t \to \infty$ zaradi predpostavk in zveznosti M_t sledi, da $M_{T\wedge t} \to M_T$. Zaradi omejenosti lahko uporabimo izrek o dominirani konvergenci in dobimo

$$E(M_T) = 1 \, .$$

Ker je $A_T = 1$, sledi, da je

$$E\left(\cos(\lambda X_T)\right) = e^{-\frac{\lambda^2}{2}} \, .$$

Podobno sklepamo, da je

$$E\left(\sin(\lambda X_T)\right) = 0 \, .$$

Sledi, da je $X_T \sim \mathrm{N}(0,1)$.

2. (25) Prilagojena zvezna procesa X in Y naj ustrezata enačbama

$$\begin{aligned} dX_t &= X_t dB_t^{(1)} + X_t dB_t^{(2)} \\ dY_t &= -Y_t dt + Y_t dB_t^{(1)}, \end{aligned}$$

kjer sta $B^{(1)}$ in $B^{(2)}$ neodvisni Brownovi gibanji. Predpostavite še začetna pogoja $X_0 = Y_0 = 1$.

a. (5) Izračunajte $d(X_t Y_t)$.

Rešitev: Računamo

$$\begin{aligned} d(X_t Y_t) &= X_t dY_t + Y_t dX_t + d\langle X, Y\rangle_t \\ &= X_t \left(-Y_t dt + Y_t dB_t^{(1)}\right) + Y_t \left(X_t dB_t^{(1)} + X_t dB_t^{(2)}\right) + X_t Y_t dt \\ &= 2X_t Y_t dB_t^{(1)} + X_t Y_t dB_t^{(2)}. \end{aligned}$$

b. (10) Najdite $X_t Y_t$.

Namig: proces

$$W_t = \frac{2B_t^{(1)} + B_t^{(2)}}{\sqrt{5}}$$

je Brownovo gibanje.

Rešitev: Iz prvega dela naloge sledi, da je

$$X_t Y_t = 1 + 2\int_0^t X_s Y_s dB_s^{(1)} + \int_0^t X_s Y_s dB_s^{(2)}.$$

Prepišemo

$$X_t Y_t = 1 + \sqrt{5}\int_0^t X_s Y_s dW_s.$$

Tako enačbo enolično reši eksponentni martingal

$$X_t Y_t = \mathcal{E}(\sqrt{5}W)_t = \exp\left(\sqrt{5}W_t - \frac{5}{2}t\right)$$

ali

$$X_t Y_t = \exp\left(2B_t^{(1)} + B_t^{(2)} - \frac{5}{2}t\right).$$

c. (10) Izračunajte $\mathrm{cov}(X_t, Y_t)$. Lahko privzamete, da sta $\int_0^t X_s dB_s^{(1)}$ ter $\int_0^t X_s dB_s^{(2)}$ martingala.

Rešitev: Ker imamo opravka z eksponentnim martingalom je

$$E(X_t Y_t) = 1\,.$$

Iz dejstva da sta $\int_0^t X_s dB_s^{(1)}$ ter $\int_0^t X_s dB_s^{(2)}$ martingala ter iz prve enačbe v besedilu naloge tudi izhaja, da je $E(X_t) = EX_0 = 1$ za vse t. Po drugi strani lahko drugo SDE (Black Scholes enačbo) za Y takoj rešimo: $Y_t = e^{-t}\mathcal{E}(B^{(1)})_t$, in torej $EY_t = e^{-t}$. Sledi

$$\mathrm{cov}(X_t, Y_t) = E(X_t Y_t) - E(X_t)E(Y_t) = 1 - e^{-t}\,.$$

(Da sta $\int_0^t X_s dB_s^{(1)}$ ter $\int_0^t X_s dB_s^{(2)}$ res martingala vidimo iz $Y_t = e^{-t}\mathcal{E}(B^{(1)})_t$ in iz izraza za $X_t Y_t$: ko izrazimo X_t, vidimo da je le-ta dovolj 'integrabilen' da dobimo martingale.)

3. (20) Naj bo B standardno Brownovo gibanje in naj bo $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ filtracija, ki jo generira. Naj bo

$$A_t = \int_0^t B_s^2 ds\,.$$

a. (10) Za $0 \leq t < T$ izračunajte

$$E\left(A_T | \mathcal{F}_t\right)\,.$$

Rešitev: Računamo

$$\begin{aligned} A_T &= A_t + \int_t^T B_s^2 ds \\ &= A_t + \int_t^T \left(B_t + (B_s - B_t)\right)^2 ds \\ &= A_t + B_t^2(T-t) + 2B_t \int_0^{T-t} (B_{t+u} - B_t) du + \int_0^{T-t} (B_{t+u} - B_t)^2 du\,. \end{aligned}$$

Po markovski lastnosti je $(B_{t+u} - B_t \colon u \geq 0)$ Brownovo gibanje neodvisno of $\mathcal{F}_t$. Opazimo še, da je

$$E\left[\int_0^{T-t} (B_{t+u} - B_t) du\right] = 0$$

in

$$E\left[\int_0^{T-t} (B_{t+u} - B_t)^2 du\right] = \int_0^{T-t} u du = \frac{(T-t)^2}{2}\,.$$

Po pravilih za pogojno pričakovano vrednost bo

$$E\left(A_T | \mathcal{F}_t\right) = A_t + B_t^2(T-t) + \frac{(T-t)^2}{2}\,.$$

b. (10) Poiščite prilagojen proces H, da bo veljalo

$$E\left[\int_0^T H_s^2 ds\right] < \infty$$

in

$$A_T = E\left(A_T\right) + \int_0^T H_s dB_s\,.$$

Rešitev: Iz prvega dela sledi, da je

$$E\left(A_T | \mathcal{F}_t\right) = F(B_t, A_t, t)\,.$$

Ker je

$$F(x,y,t) = y + x^2(T-t) + \frac{(T-t)^2}{2}\,,$$

je funkcija dovolj gladka, da uporabimo Itôvo formulo. Sledi

$$\begin{aligned} F(B_t, A_t, t) - F(0,0,0) = \\ = \quad & \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(B_s, A_s, s) dB_s + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial y}(B_s, A_s, s) dA_s \\ & + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial t}(B_s, A_s, s) ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(B_s, A_s, s) ds\,. \end{aligned}$$

Na levi je martingal. To pomeni, da se morajo členi na desni, ki imajo končno totalno variacijo, sešteti v konstanto. Sledi, da je

$$F(B_t, A_t, t) = \frac{T^2}{2} + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(B_s, A_s, s) dB_s\,.$$

Sledi

$$H_t = 2B_t(T-t)\,.$$

Očitno je zadoščeno tudi pogoju za integrabilnost.

4. (25) Predpostavite Black-Scholesov model za gibanje cene delnice, v katerem je obrestna mera $r = 0$. Fiksirajmo zapadlost $T \in (0, \infty)$ in nivo $a \in (0, \infty)$. Digitalna opcija ima izplačilno funkcijo

$$V_T = 1\left(\max_{0 \le t \le T} S_t \ge a\right),$$

torej izplačilo je 1, če cena opcije v časovnem intervalu $[0, T]$ preseže prag a, 0 sicer.

a. (10) Definirajte $\bar{S}_t = \max_{0 \le s \le t} S_s$ za $t \ge 0$. Za $0 \le t$ in $0 \le x$ definirajte

$$Q\left(\bar{S}_t / S_0 \ge x\right) = F(x, t),$$

kjer je Q običajna nova mera. Utemeljite, da je za $0 \le t \le T$

$$E_Q\left(1(\bar{S}_T \ge a) | \mathcal{F}_t\right) = 1(\bar{S}_t \ge a) + 1(\bar{S}_t < a) F(a/S_t, T - t).$$

Rešitev: Zapišemo lahko

$$1 = 1(\bar{S}_t \ge a) + 1(\bar{S}_t < a).$$

Oba člena na desni sta $\mathcal{F}_t$ merljiva. Računamo

$$\begin{aligned}
&E_Q\left(1(\bar{S}_T \ge a) | \mathcal{F}_t\right) \\
&= E_Q\left(1(\bar{S}_t \ge a, \bar{S}_T \ge a) | \mathcal{F}_t\right) + E_Q\left(1(\bar{S}_t < a, \bar{S}_T \ge a) | \mathcal{F}_t\right) \\
&= 1(\bar{S}_t \ge a) \\
&\qquad + 1(\bar{S}_t < a) E_Q\left(S_t \max_{0 \le s \le T-t} \exp\left(\sigma(W_{t+s} - W_t) - \frac{\sigma^2}{2} s\right) \ge a | \mathcal{F}_t\right) \\
&= 1(\bar{S}_t \ge a) + 1(\bar{S}_t < a) F\left(a/S_t, T - t\right).
\end{aligned}$$

b. (5) Naj bo $T_a = \inf\{t \ge 0 \colon S_t = a\}$. Utemeljite, da za $T_a \le T$ velja

$$V_{T_a} = 1.$$

Rešitev: Če S_t doseže prag a pred časom T, vemo zagotovo, da bomo na koncu morali izplačati 1. *Gibanje cene delnice od T_a naprej je brezpredmetno, zato v varovalnem portfelju delnice ne bo več, zaradi odsotnosti diskontiranja pa bo vrednost v trenutku $T_a \le T$ enaka zgornjemu znesku.*

c. (10) Privzemite da je $F(x, t)$ razreda C^2 v x in razreda C^1 v t za $t > 0$, $x > 0$. Pokažite, da je na $\{t < T_a \wedge T\}$ varovalna komponenta H za vrednostni proces V naše digitalne opcije enaka

$$H_t = -\frac{\partial F}{\partial x}\left(a/S_t, T - t\right) \cdot \frac{a}{S_t^2}.$$

Rešitev: Do strogo pred časom $T_a \wedge T$ *(procese ustavimo ob* $T_{a-\epsilon} \wedge (T-\epsilon)$, $\epsilon \in (0, a \wedge T)$*) lahko uporabimo Itôvo formulo in dobimo komponento* H_t *s parcialnim odvodom "*$\partial V_t / \partial S_t$*" za kar uporabimo izraz iz točke (a): do tega časa se namreč* V_t *izraža s* C^2 *funkcijo* S_t*-ja in* t*-ja. Uporabiti moramo samo še pravilo za odvajanje posrednih funkcij. Spustimo* $\epsilon \downarrow 0$.