FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Finančna matematika 2

Pisni izpit

3. februar 2021

Ime in priimek: ____________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Naloge so 4. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	a.	b.	c.	d.
1.			•	•
2.			•	•
3.			•	•
4.				•
Skupaj				

1. (25) Naj bo B standardno Brownovo gibanje. Naj bo $T = \inf\{t \geq 0 \colon B_t \in \{a, -b\}\}$ za $a, b > 0$.

a. (15) Utemeljite, da je $M_t = B_t^3 - 3tB_t$ martingal. Izračunajte $\mathrm{cov}(B_T, T)$. Utemeljite vse korake.

Rešitev: Po Itôvi formuli je

$$M_t = \int_0^t (3B_s^2 - 3s)dB_s\,.$$

Za integrand velja

$$\int_0^t E\left[\left(3B_s^2 - 3sB_s\right)^2\right] ds = \int_0^t 18s^2 ds < \infty\,,$$

zato je M martingal. Po izreku o opcijskem ustavljanju velja

$$E(M_{T\wedge t}) = E(M_0) = 0$$

za vsak $t > 0$. Prepišemo v

$$E\left(B_{T\wedge t}^3\right) = 3E\left((T\wedge t)B_{T\wedge t}\right)\,.$$

Na levi strani je integrand po absolutni vrednosti omejen z $\max(a,b)^3$, na desni pa z $\max(a,b)\cdot T$. S predavanj vemo, da je $E(T) < \infty$. Ko $t \to \infty$, lahko na levi in na desni uporabimo izrek o dominirani konvergenci. Sledi

$$E(B_T^3) = a^3 \cdot \frac{b}{a+b} - b^3 \cdot \frac{a}{a+b} = E(TB_T)\,.$$

Poenostavimo v

$$E(TB_T) = ab(a-b)\,.$$

Iz predpostavk izhaja $E(B_T) = 0$, zato je $\mathrm{cov}(B_T, T) = ab(a-b)$.

b. (10) Pokažite, da je $N_t = B_t^4 - 6tB_t^2 + 3t^2$ martingal. Izračunajte $\mathrm{cov}(B_T^2, T)$. Utemeljite vse korake. Kot znano privzemite

$$E(T^2) = \frac{1}{3}ab\left(a^2 + 3ab + b^2\right)\,.$$

Rešitev: Vemo, da je

$$E(B_T^2) = a^2 \cdot \frac{b}{a+b} + b^2 \cdot \frac{a}{a+b} = ab\,.$$

Ker je $B_t^2 - t$ martingal, je

$$E(B_{T\wedge t}^2) = E(T\wedge t)\,.$$

Ko $t \to \infty$, na levi uporabimo izrek o dominirani, na desni pa izrek o monotoni konnvergenci. Sledi

$$E(T) = E(B_T^2) = ab\,.$$

Po Itû je

$$N_t = \int_0^t (4B_s^3 - 12sB_s)dB_s\,.$$

Za integrand velja

$$\int_0^t E\left[\left(4B_s^3 - 12sB_s\right)^2\right] ds < \infty\,,$$

zato je N martingal. Po izreku o opcijskem ustavljanju velja

$$E\left(B_{T\wedge t}^4\right) + 3E\left(T\wedge t)^2\right) = 6E\left((T\wedge t)B_{T\wedge t}^2\right)\,.$$

Utemejitev, da enakost velja, ko $t \to \infty$, sledi po izrekih o dominirani in monotoni konvergenci. Dobimo

$$E(TB_T^2) = \frac{1}{6}\left(E\left(B_T^4\right) + 3E(T^2)\right)\,.$$

Vstavimo in upoštevamo zgornje. Dobimo

$$E(TB_T^2) = \frac{1}{3}ab\left(a^2 + 3ab + b^2\right)$$

in posledično

$$\operatorname{cov}(B_T^2, T) = \frac{1}{3}ab\left(a^2 + 3ab + b^2\right) - a^2b^2 = \frac{1}{3}ab(a-b)^2.$$

2. (25) Za zvezen semimartingal X naj velja

$$dX_t = X_t(1 - X_t)dW_t \,,$$

kjer je W standardno Brownovo gibanje in $X_0 = x_0 \in (0,1)$. Kot znano privzemite, da je $P(X_t \in (0,1)) = 1$ za vse $t \geq 0$. Definirajte

$$Y_t = \log\left(\frac{X_t}{1 - X_t}\right)$$

in

$$y_0 = \log\left(\frac{x_0}{1 - x_0}\right) .$$

a. (10) Pokažite, da je

$$Y_t = y_0 + W_t + \frac{1}{2}\int_0^t \tanh\left(\frac{Y_s}{2}\right) ds \,.$$

Utemeljite, da ima ta stohastična diferencialna enačba enolično določeno krepko rešitev. Pri tem je

$$\tanh y = \frac{\sinh y}{\cosh y} = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \,.$$

Rešitev: Funkcija

$$f(x) = \frac{x}{1 - x}$$

je na $(0,1)$ dvakrat zvezno odvedljiva. Ker proces vedno ostane na tem intervalu, lahko uporabimo Itôvo formulo. Izračunamo

$$f'(x) = \frac{1}{x(1 - x)} \quad \textit{in} \quad f''(x) = \frac{2x - 1}{x^2(1 - x^2)} \,.$$

Ugotovimo še, da je

$$dX_t = X_t(1 - X_t)dW_t \quad \textit{in} \quad d\langle X\rangle_t = X_t^2(1 - X_t)^2 dt$$

in

$$X_t = \frac{e^{Y_t}}{1 + e^{Y_t}} \,, \quad \textit{torej} \quad 2X_t - 1 = \frac{e^{Y_t} - 1}{e^{Y_t} + 1} = \tanh(Y_t/2) \,.$$

Sledi

$$\begin{aligned}
f(X_t) - f(x_0) &= Y_t - y_0 \\
&= \int_0^t \frac{1}{X_s(1 - X_s)} dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{2X_s - 1}{X_s^2(1 - X_s)^2} d\langle X\rangle_t \\
&= \int_0^t dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t (2X_s - 1)ds \\
&= W_t + \frac{1}{2}\int_0^t \tanh(Y_s/2)ds \,.
\end{aligned}$$

Funkcija $\mu(y) = \tanh(y/2)$ ima odvod omejen z $1/2$, zato je izpolnjen Lipschitzov pogoj in s tem zagotovljen obstoj krepke rešitve in njena enoličnost.

b. (5) Izračunajte $E(Y_t)$.

Rešitev: Iz dejstva, da je X omejen, izhaja da je X omejen martingal, torej je $E(X_t) = E(X_0) = x_0$. Iz prvega dela naloge imamo, da je

$$Y_t = y_0 + W_t + \frac{1}{2}\int_0^t (2X_s - 1)ds \,.$$

Sledi

$$E(Y_t) = y_0 + \frac{1}{2}\int_0^t (2x_0 - 1)ds = y_0 + (x_0 - 1/2)t$$

c. (10) Izračunajte $\mathrm{cov}(X_t, Y_t)$.

Namiga: izračunajte $d(X_t Y_t)$.

Rešitev: Veljalo bo

$$X_t Y_t = x_0 y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y\rangle_t \,.$$

Vstavimo diferenciale in ne levi in desni uporabimo pričakovano vrednost. Ker je X omejen, lahko poljubno zamenjamo integriranje in pričakovane vrednosti. Sledi

$$E(X_t Y_t) = x_0 y_0 + \frac{1}{2}\int_0^t E(X_s(2X_s - 1))ds + \int_0^t E(X_s(1 - X_s))ds \,.$$

Poenostavimo in sledi

$$E(X_t Y_t) = x_0 y_0 + \frac{1}{2}\int_0^t E(X_s)ds = x_0 y_0 + \frac{x_0 \cdot t}{2} \,.$$

Kovarianca sledi.

3. (25) Naj bo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zvezna in omejena. Definirajte

$$X_T = \int_0^T f(B_s) ds\,.$$

Za slučajno spremenljivko X_T je $E(X_T^2) < \infty$.

a. (10) Za $0 \le t < T$ definirajte funkcijo

$$\psi(x,t) = \int_0^t E\left(f(x+B_s)\right) ds\,.$$

Izrazite $E(X_T|\mathcal{F}_t)$ s funkcijo $\psi(x,t)$.

Rešitev: Zapišemo

$$X_T = X_t + \int_t^T f(B_s - B_t + B_t) ds\,.$$

Zaradi neodvisnosti Brownovega gibanja $(B_s - B_t\colon s \ge t)$ od $\mathcal{F}_t$, lahko izračunamo pogojno pričakovano vrednost po običajnih pravilih kot

$$E(X_T|\mathcal{F}_t) = X_t + \psi(B_t, T-t)\,.$$

b. (10) Privzemite, da je funkcija $\psi(x,t)$ dovolj gladka, da lahko uporabimo Itôvo formulo. Z njo izrazite integrand H, za katerega je

$$X_T = E(X) + \int_0^T H_s dB_s\,.$$

Rešitev: Označimo $M_t = E(X_T|\mathcal{F}_t)$. Po definiciji je M martingal. Po Itôvi formuli je

$$M_t = X_t + \int_0^t \frac{\partial \psi}{\partial x}(B_s, T-s) dB_s - \int_0^t \frac{\partial \psi}{\partial t}(B_s, T-s) ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 x}(B_s, T-s) ds\,.$$

Po definiciji je X proces z končno totalno variacijo. Isto velja za zadnja dva integrala. Sledi, da se morajo vsi procesi s končno totalno variacijo sešteti v konstanto. Sledi

$$X_T = E(X_T) + \int_0^t \frac{\partial \psi}{\partial x}(B_s, T-s) dB_s\,.$$

c. (5) Naj bo $f(x) = \sin x$. Najdite integrand H, da bo

$$\int_0^T \sin(B_s)ds = \int_0^T H_s dB_s \,.$$

Kot znano privzemite $E(\cos(B_t)) = e^{-\frac{t}{2}}$.

Rešitev: Računamo

$$\begin{aligned}
\psi(x,t) &= \int_0^t E(\sin(x+B_s))ds \\
&= \int_0^t E(\sin x \cdot \cos B_s + \cos x \cdot \sin B_s)ds \\
&= \int_0^t \sin x \cdot e^{-\frac{s}{2}} ds \\
&= 2\sin x \left(1 - e^{-\frac{t}{2}}\right) \,.
\end{aligned}$$

V tem primeru je $E(X_T) = 0$. Iskan integrand je tako

$$H_s = 2\cos x \left(1 - e^{-\frac{(T-t)}{2}}\right) \,.$$

4. (25) Za gibanje temelja predpostavite Black-Scholesov model, v katerem sta volatilnost σ in obrestna mera r konstantni. Predpostavljamo torej, da je

$$S_t = S_0 \exp\left(\mu t + \sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2} t\right) .$$

Izplačilo opcije v času dospetja T naj bo

$$V_T = \begin{cases} S_T - a, & \text{če je } S_T > a \\ b - S_T, & \text{če je } S_T < b \\ 0, & \text{sicer} \end{cases} .$$

a. (10) Izračunajte začetno ceno V_0 opcije.

Namig: sestavite opcijo iz enostavnejših elementov.

Rešitev: Zapišemo lahko

$$V_T = (S_T - a)_+ + (b - S_T)_+ = (S_T - a)_+ + (S_T - b)_+ - (S_T - b) .$$

Označimo z $V_t^{e,k}$ *ceno evropske nakupne opcije z izvršno ceno* k. *Iz zgornjega sledi, da je*

$$V_0 = E_Q(\tilde{V}_T) = V_0^{e,a} + V_0^{e,b} - (S_0 - be^{-rT}) .$$

b. (15) Navedite komponento H_t varovalne listnice.

Rešitev: Naj bo $H_t^{e,k}$ *komponenta varovalne listnice za evropsko nakupno opcijo z izvršno ceno* k *v trenutku* t. *Iz zgornjega sledi, da je*

$$H_t = H_t^{e,a} + H_t^{e,b} - 1 .$$