FACULTY OF MATHEMATICS AND PHYSICS

Department of Mathematics

Financial mathematics 2

Written examination

July 1st, 2025

Name and surname: ____________________ Student number: | | | | | | | | |

Instructions

Read carefully the problems before starting to solve them. There are 4 problems. You have two hours.

Problem	a.	b.	c.	d.	Total
1.			•	•	
2.			•	•	
3.				•	
4.					
Total					

1. (25) Naj bo B standardno Brownovo gibanje in definirajte proces M kot

$$M_t = B_t^3 - 3tB_t\,.$$

a. (10) Pokažite, da je M martingal.

Rešitev: po Itôvi formuli in pravilu za odvajanje produkta je

$$dM_t = 3B_t^2 dt + 3B_t dt - 3B_t dt - 3t dB_t = 3(B_t^2 - t)dB_t\,.$$

Sledi, da je M lokalni martingal oblike

$$M_t = \int_0^t H_s dB_s\,,$$

pri čemer za integrand H za vsak t velja $E\left(\int_0^t H_s^2 ds\right) < \infty$. Sledi, da je M martingal.

b. (15) Za $a, b > 0$ definirajte čas ustavljanja

$$T = \inf\{t \geq 0\colon B_t \in \{-a, b\}\}\,.$$

Izračunajte $\mathrm{cov}(B_T, T)$. Utemeljite korake. Privzemite, da je $E(T) < \infty$.

Rešitev: vemo, da je

$$P(B_T = -a) = \frac{b}{a+b} \qquad \textit{in} \qquad P(B_T = b) = \frac{a}{a+b}\,.$$

Sledi, da je

$$E(B_T^3) = \frac{-a^3 b + ab^3}{a+b} = ab(b-a)\,.$$

Izrek o opcijskem ustavljanju da $E(B_{T\wedge t}) = 0$, ker pa je $|B_{T\wedge t}| \leq \max(a,b)$, lahko $t \to \infty$ in je po izreku o dominirani konvergenci $E(B_T) = 0$. Računanje kovariance se tako prevede na računanje $E(B_T \cdot T)$. Za martingal M je po izreku o opcijskem ustavljanju $E(M_{T\wedge t}) = 0$. Iz definicije sledi, da je

$$|M_{T\wedge t}| \leq \max(a^3, b^3) + 3T \cdot \max(a,b)\,,$$

zato lahko uporabimo izrek o dominirani konvergenci in $t \to \infty$, da dobimo

$$E\left(B_T^3 - 3TB_T\right) = 0\,.$$

Sledi

$$\mathrm{cov}(B_T, T) = E(B_T \cdot T) = \frac{1}{3}ab(b-a)\,.$$

2. (25) Naj bo B standardno Brownovo gibanje in definirajte procesa

$$Y_t = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2x_0} + \int_0^t e^{-\frac{1}{2}B_s + \frac{1}{4}s} ds\right)^2 \quad \text{in} \quad Z_t = e^{B_t - \frac{1}{2}t},$$

kjer je $x_0 > 0$.

a. (5) Poiščite $\langle Z, Y \rangle$.

   Rešitev: proces Y je zvezen s končno totalno variacijo, zato je $\langle Y, Z \rangle = 0$.

b. (20) Naj bo $X_t = Z_t Y_t$. Pokažite, da velja

$$dX_t = \sqrt{2X_t} dt + X_t dB_t$$

   in $X_0 = x_0$.

   Rešitev: po formuli za odvajanje produkta je

$$dX_t = Z_t dY_t + Y_t dZ_t \,.$$

   Proces Z je eksponentni martingal z $dZ_t = Z_t dB_t$. Proces Y je zvezno odvedljiv, zato je diferencial kar odvod, torej

$$dY_t = \left(\sqrt{2x_0} + \int_0^t e^{-\frac{1}{2}B_s + \frac{1}{4}s} ds\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}B_t + \frac{1}{4}t} dt \,,$$

   kar lahko prepišemo v

$$dY_t = \sqrt{2Y_t} Z_t^{-1/2} dt \,.$$

   Sledi

$$dX_t = \sqrt{2Y_t Z_t} ds + Y_t Z_t dB_t \,,$$

   kar je treba pokazati. Da je $X_0 = x_0$ sledi z vstavljanjem.

3. (25) Kot znano privzemite, da je za $\lambda \in \mathbb{R}$

$$E\left(e^{\lambda(B_t - B_s)}\right) = e^{\frac{\lambda^2(t-s)}{2}}$$

za $s < t$.

a. (10) Naj bo $X_t = \int_0^t H_s dB_s$ za ustrezen integrand. Poiščite integrand K, da bo za fiksen T

$$e^{X_T - \frac{1}{2}\langle X\rangle_T} = 1 + \int_0^T K_s dB_s\,.$$

Rešitev: po Itôvi formuli velja

$$\begin{aligned} e^{X_T - \frac{1}{2}\langle X\rangle_T} &= 1 + \int_0^T e^{X_s - \frac{1}{2}\langle X\rangle_s} d\left(X - \frac{1}{2}\langle X\rangle\right)_s + \frac{1}{2}\int_0^T e^{X_s - \frac{1}{2}\langle X\rangle_s} d\langle X\rangle_s \\ &= 1 + \int_0^T e^{X_s - \frac{1}{2}\langle X\rangle_s} dX_s \\ &= 1 + \int_0^T e^{X_s - \frac{1}{2}\langle X\rangle_s} H_s dB_s\,. \end{aligned}$$

Sledi, da je

$$K_s = e^{X_s - \frac{1}{2}\langle X\rangle_s} H_s\,.$$

b. (15) Naj bo T fiksen naj bo $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ particija intervala $[0, T]$. Naj bodo $\lambda_j \in \mathbb{R}$ za $j = 0, 1, \ldots, n-1$. Naj bo

$$Y = \exp\left(\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j \left(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}\right)\right)\,.$$

Najdite integrand K, da bo

$$Y = E(Y) + \int_0^T K_s dB_s\,.$$

Rešitev: naj bo

$$H_s = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j 1_{[t_j, t_{j+1})}(s)\,.$$

Definirajmo

$$Y_t = \int_0^t H_s dB_s\,.$$

Za ta elementarni integrand je

$$Y = Y_T = \int_0^T H_s dB_s = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j \left(B_{t_{j+1}} - B_{t_j} \right) \; .$$

Nadalje je

$$\langle Y \rangle_T = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j^2 (t_{j+1} - t_j) \, .$$

Iz prve točke naloge sledi, da je

$$Y \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j^2 (t_{j+1} - t_j) \right) = 1 + \int_0^T \exp\left(Y_s - \frac{1}{2} \langle Y \rangle s \right) H_s dB_s \, .$$

Sledi

$$K_s = \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j^2 (t_{j+1} - t_j) \right) \cdot \exp\left(Y_s - \frac{1}{2} \langle Y \rangle s \right) H_s \, .$$

Ko vstavimo, nam kot prvi člen v zgornji formuli ostane točno $E(Y)$*.*

4. (25) Za gibanje temelja predpostavite Black-Scholesov model

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t)\,.$$

Obrestna mera naj bo konstantna in enaka r. Čas dospelosti označimo s T.

a. (5) Recimo, da je vrednost opcije ob dospetju enaka $V_T = S_T$. Kolikšna je vrednost opcije v času $t = 0$? Kakšna je varovalna listnica (H_t^0, H_t)?

   Rešitev: ker sta pod Q temelj $\tilde{S}_t$ in cena $\tilde{V}_t$ martingala, je

$$\begin{aligned} \tilde{V}_t &= E_Q\left(\tilde{V}_T|\mathcal{F}_t\right) \\ &= E_Q\left(\tilde{S}_T|\mathcal{F}_t\right) \\ &= \tilde{S}_t\,. \end{aligned}$$

   Iz tega tudi sledi, da je $(H_t^0, H_t) = (0, 1)$ za $0 \le t \le T$.

b. (10) Za evropsko nakupno opcijo z izvršno ceno k je za $t < T$

$$V_t = S_t\Phi(d_1) - e^{-r(T-t)}k\Phi(d_2)$$

   z

$$d_1 = \frac{\log(S_t/k) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \text{in} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

   in

$$H_t = \Phi(d_1)\,.$$

   Iz zveze

$$(k-x)_+ = (x-k)_+ - (x-k)$$

   izpeljite ceno V_t in potem še H_t za evropsko prodajno opcijo $V_T = (k - S_T)_+$.

   Rešitev: velja

$$\begin{aligned} V_t &= e^{-r(T-t)}E_Q\left[V_T|\mathcal{F}_t\right] \\ &= e^{-r(T-t)}E_Q\left[(k-S_T)_+|\mathcal{F}_t\right] \\ &= e^{-r(T-t)}E_Q\left[(S_T-k)_+ - (S_T-k)|\mathcal{F}_t\right] \\ &= e^{-r(T-t)}E_Q\left[(S_T-k)_+ - (S_T-k)|\mathcal{F}_t\right] \\ &= S_t\Phi(d_1) - e^{-r(T-t)}k\Phi(d_1) - \left(S_t - ke^{-r(T-t)}\right) \\ &= -S_t\Phi(-d_1) + ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_2)\,. \end{aligned}$$

   Zaradi linearnosti je $H_t = \Phi(d_1) - 1 = -\Phi(-d_1)$.

c. (10) Opcija *Metulj* je definirana kot

$$V_T = f(S_T)\,,$$

kjer je za $0 < a < k < b$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{k-a} & a \leq x < k \\ \frac{b-x}{b-k} & k < x < b \\ 0 & x > b \end{cases}$$

Izračunajte V_t.

Namig: oglejte si funkciji

$$\lambda\left[(x-k)_+ - (x-b)_+\right] \quad \textit{in} \quad \mu\left[(k-x)_+ - (a-x)_+\right]$$

s primerno izbranima λ in μ.

Rešitev: označimo z $V_t^{n,k}$ nakupne opcije z izvršno ceno k in s $V_t^{p,k}$ ceno prodajne opcije z izvršno ceno k. Iz namiga razberemo, da je

$$f(x) = 1 - \frac{1}{b-k}\left[(x-k)_+ - (x-b)_+\right] - \frac{1}{k-a}\left[(k-x)_+ - (a-x)_+\right]\,.$$

Sledi, da je cena Metulja *enaka*

$$V_t = 1 - \frac{1}{b-k}\left[V_t^{n,k} - V_t^{n,b}\right] - \frac{1}{k-a}\left[V_t^{p,k} - V_t^{p,a}\right]\,.$$

d. (5) Izrazite H_t za *Metulja*.

Rešitev: za linearne kombinacije opcij so varovalne listnice iste linearne kombinacije varovalnih listnic. Varovalna listnica za opcijo, ki vedno izplača 1, je $(e^{-r(T-t)}, 0)$.