

# SEMINARSKA NALOGA

## UVOD V FINANČNO MATEMATIKO

FAKULTETA ZA MANAGEMENT, UNIVERZA NA PRIMORSKEM

Seminarska naloga je edina obveznost pri predmetu *Uvod v finančno matematiko*. Ocenjeno dobite, ko oddate seminarsko nalogo. Rešitve lahko napišete na roko.

### 1. NALOGE IZ KNJIGE

Preberite prvo poglavje v knjigi *S.E. Shreve, Stochastic Calculus for Finance I: The Binomial Asset Pricing Model, Springer 2000*. Naredite naloge 1.2, 1.3, 1.4, 1.6, 1.7 in 1.9.

### 2. OPCIJE ODVISNE OD CELOTNE POTI

Končno izplačilo opcije je lahko odvisno od celotnega poteka cen temelja. Primer so *Azijske opcije*, kjer je izplačilo odvisno od povprečne cene delnice v nekem časovnem obdobju. Označimo cene temelja v časih  $t = 0, 1, 2, \dots, T$  z  $S_0, S_1, \dots, S_T$ , izplačilo na koncu pa bo enako

$$f(S_0, S_1, \dots, S_T),$$

kjer je  $f: \mathbb{R}^T \rightarrow \mathbb{R}_+$  ustrezna nenegativna funkcija. Privzemite običajni binomski model, ko se cena delnice, ki je trenutno enaka  $s_j$ , lahko spremeni v ali  $s_{2j+1}$  ali  $s_{2j+2}$ . Upoštevajte, da je obrestna mera konstantna in enaka  $r$ .

- a. Označite z  $v_t(s_0, s_{j_1}, \dots, s_{j_k})$  vrednost opcije v trenutku  $t$ , če je bil dosedanji potek cen delnice  $s_0, s_{j_1}, \dots, s_{j_t}$ . Izrazite  $v_t(s_0, s_{j_1}, \dots, s_{j_t})$  s količinama

$$v_{t+1}(s_0, s_{j_1}, \dots, s_{j_t}, s_{2j_t+1}) \quad \text{in} \quad v_{t+1}(s_0, s_{j_1}, \dots, s_{j_t}, s_{2j_t+2}).$$

- b. Označite s

$$x_t(s_0, s_{j_1}, \dots, s_{j_t}) \quad \text{in} \quad y_t(s_0, s_{j_1}, \dots, s_{j_t})$$

varovalno listnico, ki jo morate imeti v trenutku  $t$ , če je bil potek cen delnice  $s_0, s_{j_1}, \dots, s_{j_t}$ . Izpeljite ustrezne rekurzivne formule za par  $(x_t, y_t)$ .

- c. Prepričajte se, da je

$$v_0(s_0) = E[f(S_0, S_1, \dots, S_T)],$$

če matematično upanje  $E$  računamo na podlagi martingalskih verjetnosti.

- d. Prepričajte se, da je

$$v_t(s_0, s_{j_1}, \dots, s_{j_t}) = E[V_n(s_0, s_{j_1}, \dots, s_{j_t}, S_{t+1}, \dots, S_T) | S_0 = s_0, \dots, S_t = s_{j_t}].$$

- e. Vzemite konkretni primer binomskega modela in naj bo

$$f(S_0, \dots, S_T) = \left( \frac{S_0 + \dots + S_T}{T+1} - c \right)_+$$

za neko izvršno ceno  $c$ . Zapišite konkretno rekurzivne formule iz točk a.-c.

- f. Napišite program v vašem najljubšem računalniškem programu, ki bo izračunal ceno azijske opcije za binomski model. Vsi parametri naj bodo spremenljivke, ki jim lahko damo vrednost na začetku. Število korakov  $T$  naj bo zmerno.