

WEIBULLOVA PORAZDELITEV S KRNJENJEM

Weibullova porazdelitev s parametroma α in σ ima gostoto

$$f(x, \alpha, \sigma) = \frac{\alpha}{\sigma} \cdot \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\alpha-1} \exp(-(x/\sigma)^\alpha)$$

za $x > 0$, kjer sta $\alpha > 0$ in $\sigma > 0$.

- Označite z x_1, x_2, \dots, x_n opazovane vrednosti in predpostavljajte, da so to opazovane vrednosti med sabo neodvisne slučajne spremenljivke z Weibullovo porazdelitvijo. Izpeljite enačbe za oceni parametrov po metodi največjega verjetja.
- Pokažite, da sta v primeru, ko niso vse opazovane vrednosti enake, enačbi enolično rešljivi.

Namig: Oglejte si levo in desno stran druge enačbe. Leva je padajoča funkcija α , za desno pa utemeljite, da je naraščajoča z limito, ki je strogo pozitivna, ko $\alpha \rightarrow \infty$.

- Na str. 264-265 v učbeniku je omenjeno, da velja, ko $n \rightarrow \infty$,

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} \mathbf{N}(0, \Sigma),$$

kjer je Σ asimptotska kovariančna matrika in $\theta = (\hat{\alpha}, \hat{\sigma})$. Izračunajte asimptotsko kovariančno matriko Σ .

Namig: Upoštevajte, da je $\int_0^\infty (\log u)^k u^{p-1} e^{-u} du = \Gamma^{(k)}(p)$. Računanje vam utegne zelo olajšati dejstvo, da je $(X/\sigma)^\alpha$ eksponentno porazdeljena slučajna spremenljivka s parametrom 1. Dejstvo preverite!

- Simulirajte vzorce velikosti $n = 1000$ iz Weibullove porazdelitve za danima parametroma in vsakič ocenite sicer znane parametre. Postopek ponovite $M = 1000$ -krat. Primerjajte standardno napako za $\hat{\alpha}$, ki jo da teorija, s tisto, ki ste jo dobili s simulacijo. Komentirajte.
- Pogosto so opazovane vrednosti **krnjene**, kar pomeni, da za opazovano vrednost vidimo X , če je ta manjši od neke konstante c , sicer pa vemo le, da je $X > c$. Zapišite, kaj bi bila funkcija verjetja v primeru, ce so opazovane vrednosti vse krnjene pri isti vrednosti $c > 0$. Izpeljite enačbi za oceni parametrov po metodi največjega verjetja. Kako bi v tem primeru izračunali standardno napako cenilk? Kako bi proceduro teoretično utemeljili?

f. Kot v d. preverite s simulacijami, da so vaši izračuni pravilni.