Univerza v Ljubljani, Ekonomska fakulteta

Aktuarstvo

Aktuarska statistika

Pisni izpit

18. marec 2008

Ime in priimek: ____________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Naloge so 4. Dovoljena sredstva sta dva A4 format lista in matematični priročnik. Vaše odgovore prosim napišite na priložene liste. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	a.	b.	c.	d.	
1.				•	
2.			•	•	
3.					
4.					
Skupaj			•	•	

1. (25) Za namene vzorčenja pri slovenskem javnem mnenju je populacija velikosti N razdeljena na K skupin, vsaka od teh K skupin pa na L podpkupin velikosti M, tako da je $N = KLM$. Vzorčimo tako, da najprej izberemo enostavni slučajni vzorec velikosti k skupin. Iz vsake od izbranih skupin izberemo l podksupin z enostavnim slučajnim vzorčenjem. Nazadnje v vsaki izbrani podskupini izberemo m vzorčnih enot z enostavnim slučajnim vzorčenjem. Velikost vzorca je tako $n = klm$.

a. (5) Za cenilko populacijskega povprečja vzamemo kar povprečje vrednosti spremenljivke za vse izbrane enote. Pokažite, da je ta cenilka nepristranska.

b. (10) Cenilko lahko zapišemo kot

$$\bar{Y} = \frac{1}{kl} \sum_{ij} I_{ij} \bar{Y}_{ij} \, ,$$

kjer je

$$I_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{če izberemo } i\text{-to skupino in v njej } j\text{-to podskupino} \\ 0 & \text{sicer} \, , \end{cases}$$

$\bar{Y}_{ij}$ pa je vzorčno povprečje za enostavni slučajni vzorec izbran v j-ti podskupini i-te skupine. Pri tem privzamemo, da so $\bar{Y}_{ij}$ neodvisne od I_{ij} in neodvisne med sabo. Izrazite $\mathrm{var}(\bar{Y})$ z $\mathrm{var}(\bar{Y}_{ij})$.

c. (10) Pojasnite, zakaj je vzorčna porazdelitev za cenilko $\bar{Y}$ približno normalna.

2. (25) Slučajne spremenljivke $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ naj bodo neodvisne in enako porazdeljene z gostoto

$$f(x, \lambda, \tau) = \frac{\lambda^2}{\tau}\, x^{\frac{2}{\tau}-1}\, e^{-\lambda x^{1/\tau}}$$

za $x > 0$, $\lambda > 0$ in $\tau > 0$.

a. (15) Izračunajte Fisherjevo matriko informacije za dano porazdelitev.

b. (10) Zapišite interval zaupanja pri stopnji tveganja α za oceno parametra λ na podlagi opazovanih vrednosti $y_1, \ldots, y_n$.

4. (20) Uravnoteženost ruletnega cilindra lahko preverjamo s χ^2-preizkusom. Če označimo z O_i dejansko opazovano število pojavljanj številke i v n poskusih, z E_i pa pričakovano število pojavljanj števila i v n poskusih, je formula

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^{36} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}\,.$$

Velike vrednosti χ^2 nakazujejo večje odmike opazovanih vrednosti od pričakovanih. Ničelna domneva v našem primeru je, da je cilinder uravnotežen.

a. (5) Pri preverjanju za določen cilinder smo dobili $p = 0,005$. Se to lahko zgodi, tudi če je cilinder uravnotežen? Utemeljite!

b. (5) Pri preverjanje nekega drugega cilindra smo dobili $p = 0,23$. Ali lahko z gotovostjo trdimo, da je cilinder uravnotežen? Utemeljite!

c. (5) V igralniški hiši je približno 100 cilindrov. Vsakega testirajo vsak dan na osnovi podatkov za tisti dan. Pravilo je, da natančneje preverjajo cilinder, za katere je bila p-vrednost 0,01 ali manj. Če bi bili vsi cilindri idealni, torej če bi za vsakega veljala ničelna domneva, kakšen odstotek cilindrov na dan bi kontrolirali, če ta odstotek izračunamo za neko daljše obdobje?

d. (5) Med cilindri v igralniški hiši je tudi pokvarjen cilinder, ki ga tudi vsak dan preverjamo z χ^2-preizkusom. Ga bodo kontrolirali manjkrat ali večkrat kot idealen cilinder, če je pravilo tako kot v točki c.?

4. (20) Privzemite linearni regresijski model

$$\mathbf{Y} = \mathbf{x}\beta + \epsilon\,,$$

kjer je β skalarni parameter, $E(\epsilon) = 0$ in $\mathrm{var}(\epsilon) = \mathbf{\Sigma}$. Predpostavljajmo, da je matrika $\mathbf{\Sigma}$ obrnljiva. Vektorji $\mathbf{Y}$, $\mathbf{x}$ in ϵ so n-dimenzionalni.

a. (10) Privzemite, da velja $\mathbf{a}^T\mathbf{x} = 1$ za nek vektor $\mathbf{a}$. Privzemite, da je

$$\mathrm{cov}(\epsilon, \mathbf{a}^{\mathbf{T}}\mathbf{Y}) = k\mathbf{x}$$

za neko konstanto k. Pokažite, da je $\hat{\beta} = \mathbf{a}^T\mathbf{Y}$ nepristranska, linearna cenilka parametra β z najmanjšo možno varianco.

b. (10) Privzemite, da je $\hat{\beta} = \mathbf{a}^T\mathbf{Y}$ nepristranska, linearna cenilka z najmanjšo možno varianco. Pokažite, da mora veljati

$$\mathrm{cov}(\epsilon, \mathbf{a}^{\mathbf{T}}\mathbf{Y}) = k\mathbf{x}$$

za neko konstanto k.