Aktuarska matematika 1
Domača naloga
Rok za oddajo: Ob pisnem izpitu

Naloge so sestavni del preverjanja znanja pri predmetu Aktuarska matematika 1. Vsaka naloga je vredna 10 točk, v skupnem seštevku pa naloge štejejo za 50% končne ocene pri predmetu.

Opomba: Oštevilčenje formul in sklicevanje na poglavja in razdelke velja za knjigo H. Gerber, Matematika življenjskih zavarovanj, DMFA, 1996, ali na angleško tretjo izdajo iste knjige.

Opomba: V nalogah, ki zahtevajo konkretne izračune, uporabite tablice umrljivosti *A1967-70 Ultimate*.

1. V spodnji tabeli je amortizacijski načrt za obveznico RS13. Če kupite obveznico, v prihodnosti dobivate plačila kuponov ob navedenem datumu, na koncu pa vam bodo izplačali tudi glavnico. Kuponi se izplačujejo polletno. Zaradi preprostosti privzemite, da je vsako leto dolgo 1 enoto, pol leta 1/2 enote, deleži leta pa se računajo s privzetkom, da ima leto 365 dni.

Datum	Št. kupona	Kupon	Izpl.glavnice	Preostala glavnica
29.6.98	1	27.75	0	1000
29.12.98	2	27.75	0	1000
29.6.99	3	27.75	0	1000
29.12.99	4	27.75	0	1000
29.6.00	5	27.75	0	1000
29.12.00	6	27.75	0	1000
29.6.01	7	27.75	0	1000
29.12.01	8	27.75	0	1000
29.6.02	9	27.75	0	1000
29.12.02	10	27.75	0	1000
29.6.03	11	27.75	0	1000
29.12.03	12	27.75	0	1000
29.6.04	13	27.75	0	1000
29.12.04	14	27.75	0	1000
29.6.05	15	27.75	0	1000
29.12.05	16	27.75	0	1000
29.6.06	17	27.75	0	1000
29.12.06	18	27.75	0	1000
29.6.07	19	27.75	0	1000
29.12.07	20	27.75	1000	0

a. Predpostavite, da je cena obveznice na dan 4. 3. 2002 enaka 105%. To pomeni, da boste za obveznico plačali 1050 enot (namesto nominalne vrednosti 1000 enot). Predpostavite, da je jakost obresti enaka $\delta = 0,1$. Bi se 4. 3. 2002 odločili za nakup te obveznice?

Predpostavljajte, da bo jakost obresti δ v navedenem obdobju konstantna (to je sicer nerealistično, lahko pa je prvi približek). Predpostavljajte tudi, da boste plačila iz kuponov porabili in ne ponovno investirali pri dani obrestni meri.

b. Pri kolikšni jakosti obrestne mere bi bil nakup obveznice enako dobra naložba kot vezana vloga z enako jakostjo obresti? (Opozorilo: Rešitev te naloge je možna samo numerično).

2. Predpostavite, da je jakost obrestne mere konstantno enaka δ. Predpostavite, da v trenutku $t = 0$ na banki deponirate x enot denarja, ki se obrestujejo zvezno z jakostjo δ. Med trenutkoma t_1 in t_2 z $0 < t_1 < t_2$ bo z vašega računa odtekal denarni tok z jakostjo c. To pomeni, da boste v enoti časa potrošili c enot denarja.

   Koliko mora biti najmanj x, da boste "zmogli" opisani denarni tok? Ne pozabite upoštevati, da se denar obrestuje tudi med trošenjem! Natančno navedite vaše predpostavke.

3. Pokažite, da za $m < n$ velja enačba

$$A_{x:\overline{n}|} = A^1_{x:\overline{m}|} + v^m\, {}_mp_x\, A_{x+m:\overline{n-m}|}\,.$$

   Pojasnite enakost z besedami.

4. Vrednost $A_x = E(v^{K+1})$ se spremeni, če se spremenijo verjetnosti ${}_np_x$ ali če se spremeni jakost obrestne mere.

   a. Ugotovite, kaj se zgodi z A_x, če jakosti obrestne mere prištejemo konstanto $c > 0$.

   b. Ugotovite, kaj se zgodi z A_x, če jakosti smrtnosti prištejemo konstanto $c > 0$.

   c. Predpostavite, da se q_{x+n} poveča za konstanto c. Pokažite, da se A_x poveča za

$$cv^{n+1}\, {}_np_x\, (1 - A_{x+n+1})\,.$$

5. Preberite si razdelek 3.3.

   a. Pojasnite formulo (3.22) ((3.3.2) v angleški izdaji).

b. Pokažite, da za $x > 0$ velja

$$\bar{A}_x = \frac{1}{v^x {}_x p_0} \int_x^\infty v^y {}_y p_0 \, \mu_y \, \mathrm{d}y \, .$$

c. Pokažite, da za $x \geq 0$ velja

$$\frac{\mathrm{d}\bar{A}_x}{\mathrm{d}x} = (\mu_x + \delta)\, \bar{A}_x - \mu_x \, ,$$

kjer je $\delta > 0$ jakost obrestne mere.

d. Pokažite, da za $x \geq 0$ velja

$$\frac{\mathrm{d}\bar{A}_x}{\mathrm{d}x} = (\mu_x + \delta)\, \bar{A}^1_{x:\overline{n}|} + \mu_{x+n} \bar{A}_{x:\overline{n}|}^{\ \ \frac{1}{}} - \mu_x \, .$$

6. Preberite si oznake v poglavju 5.

a. Pokažite, da velja

$$\frac{1}{\ddot{a}_{65:\overline{10}|}} - \frac{1}{\ddot{s}_{65:\overline{10}|}} = P^1_{65:\overline{10}|} + d \, .$$

b. Izrazite splošno razliko

$$\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} - \frac{1}{\ddot{s}_{x:\overline{n}|}}$$

z d in $P^1_{x:\overline{n}|}$. Formulo tudi dokažite.

c. Čemu je po vašem mnenju enaka razlika

$$\frac{1}{\ddot{a}^{(12)}_{65:\overline{10}|}} - \frac{1}{\ddot{s}^{(12)}_{65:\overline{10}|}} \ ?$$

Dokažite vaše trditve.

7. Brez računanja (res brez!) odgovorite na naslednja vprašanja. Pri tem je ${}_kV_{x:\,\overline{n}|}$ količina, definirana v (6.1) (ali (6.2.1) v angleški verziji).

a. ${}_0V_{x:\,\overline{n}|} =?$.

b. ${}_nV_{x:\,\overline{n}|} =?$.

c. ${}_{n-1}V_{x:\,\overline{n}|} = ?$.

d. ${}_{1}V_{x:\,\overline{n}|} = ?$

8. Privzemite splošno zavarovanje za primer smrti z izplačili $c_1, c_2, \ldots$ na koncu leta, ko oseba umre in premijami $\pi_0, \pi_1, \ldots$, ki se plačujejo na začetku vsakega leta. Izpeljite *Facklerjevo formulo*

$$ {}_{t+1}V = ({}_tV + \pi_t)\,\frac{1+i}{p_{x+t}} - c_{t+1}\,\frac{q_{x+t}}{p_{x+t}}\,. $$

9. Oseba stara 30 let sklene z zavarovalnico mešano zavarovanje za obdobje 20 let. Zavarovalna vsota 20.000 EUR se izplača ob doživetju oziroma ob koncu leta, v katerem oseba umre. Premije se plačujejo letno postnumerandno, dokler zavarovanec živi, vendar največ 10 let. Sklenitveni stroški znašajo 3,5% zavarovalne vsote, inkaso stroški 2% bruto premije ter upravni stroški 0,5% zavarovalne vsote za vsako leto zavarovanja.

   a. S komutacijskimi števili zapišite letno bruto premijo. Izračunajte premijo, če je $i = 4\%$.

   b. S komutacijskimi števili zapišite bruto matematično rezervo ob koncu k-tega leta. Privzemite, da je $i = 4\%$. Izračunajte bruto matematično rezervo (ločite primera $k \leq 10$ in $k > 10$)!

10. Komutacijska števila:

   a. S komutacijskimi števili zapišite neto enkratno premijo za m let odloženo, prenumerandno, n let trajajočo življenjsko rento za x let staro osebo.

      Namig: Uporabite enačbo, ki povezuje časovno omejeno rento z dosmrtnimi rentami in upoštevajte obdobje odloga.

   b. Zgornjo premijo zapišite še za primer, ko se renta izplačuje k-krat letno!

   c. Za rento v višini 100 EUR, $k = 4$, $m = 10$, $n = 20$, $x = 30$ ter $i = 4\%$ izračunajte omenjeno premijo!

11. V tablicah smrtnosti pri $i = 4\%$ poiščite in zapišite:

    a. Neto enkratno premijo za dosmrtno zavarovanje za primer smrti za 50 let staro osebo!

    b. Neto enkratno premijo za mešano zavarovanje za 40 let staro osebo in zavarovalno dobo 20 let!

    c. Neto enkratno premijo za dosmrtno prenumerandno življenjsko rento za 25 let staro osebo!

    d. Neto enkratno premijo za 15 let trajajočo prenumerandno življenjsko rento za 35 let staro osebo!

12. S pomočjo komutacijskih števil zapišite in izračunajte bruto matematično rezervacijo ob koncu 23. leta za naslednji zavarovalni produkt:

    Osebi stari 35 *let bo zavarovalnica začela čez* 21 *let izplačevati dosmrtno rento v višini* 1.000 *EUR ob koncu vsakega leta, z garantirano dobo izplačevanja prva tri leta. Premija se plačuje letno, postnumerandno, v času odloga. Začetni stroški znašajo* 100 *EUR, inkaso stroški* 2% *bruto premije ter upravni stroški* 0,8% *letne rente za ves čas trajanja zavarovanja.*

13. Katarina Perman je rojena 6. 10. 2003. Zavarovalnica ponuja (v nekoliko poenostavljeni obliki) naslednje zavarovanje:

    > Sklenitelj zavarovanja je mati, ki bi bila ob sklenitvi zavarovanja stara 33 let, Katarina pa 0 let. Premije bi mati plačevala prenumerandno 6 let v enakih zneskih. Ob dopolnjenem 19 letu starosti bi Katarina prejela izplačilo v višini 10.000 EUR. V vmesnem času bi v primeru smrti matere zavarovalnica Katarini izplačala do tedaj vplačane in obrestovane premije in sicer na koncu leta smrti. V primeru smrti Katarine je upravičenec mati, ki prejme enaka izplačila, kot bi jih Katarina, v primeru smrti obeh pa so upravičenci dediči po zakonu, ki prejmejo enake vsote, kot bi jih Katarina.

    Pri vseh izračunih uporabite tablice AM1976-70, ki ste jih dobili na predavanjih.

a. (5) Izračunajte neto premijo za zgornje zavarovanje, če privzamete efektivno letno obrestno mero 4%. Privzemite, da se tudi vplačane premije obrestujejo z efektivno obrestno mero 4%.

b. (5) Izračunajte neto premijsko rezervo na začetku 18 leta zavarovanja pod privzetkom, da je mati živa. Privzemite efektivno obrestno mero v višini 4%.