Ekonomska fakulteta

AKTUARSKA MATEMATIKA 1

Smer Aktuarstvo

Pisni izpit

24. september 2004

Ime in priimek: ______________________________

Navodilo

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Rešitev naloge mora zajemati vse potrebne izračune in utemeljitve. Nalog je 8 in vsaka je vredna 20 točk, torej skupaj 160 točk. Za pozitivno oceno je potrebno zbrati 60% točk. Za reševanje imate 90 minut časa. Za vse izračune uporabite tablice umrljivosti A1967-70 Ultimate.

Naloga	***a.***	***b.***	***c.***	***d.***	***e.***	***f.***	***Skupaj***
1.				•	•	•	
2.				•	•	•	
3.					•	•	
4.			•	•	•	•	
5.				•	•	•	
6.							
7.					•	•	
8.					•	•	
Skupaj							

1. (20) Posameznik pri banki vzame kredit v višini $D = 100.000£$. Kredit bo odplačal v enakih obrokih, plačljivih na koncu vsakega meseca v trajanju 25 let. Privzemite, da je efektivna obrestna mera $i = 5\%$. Za računanje privzemite, da so vsi meseci enako dolgi.

a. (5) Izračunajte višino mesečnega obroka.

Rešitev: Označite višino obroka z A. Sedanja vrednost vseh prihodnjih obrokov mora biti enaka sedanji vrednosti dolga D. Označimo $v = (1+i)^{-1}$ in $w = v^{1/12}$ (nekoliko smo poenostavili in predpostavili, da so meseci enako dolgi). Vseh mesecev je $n = 300$, zato mora veljati enačba

$$D = A(w + w^2 + \cdots + w^{300}) = \frac{Aw(1 - w^{300})}{1 - w}\,.$$

Sledi

$$A = \frac{D(1-w)}{w(1-w^{300})}\,.$$

Konkretno je $A = 578,14£$.

b. (5) Kako velik bo dolg takoj po plačilu obroka na koncu 12. leta odplačevanja kredita?

Rešitev: Sedanja vrednost 144 izplačil v prvih 12 letih je

$$A(w + w^2 + \cdots + w^{144}) = \frac{Aw(1 - w^{144})}{1 - w}\,,$$

kjer je A višina obroka, w pa je definiran v rešitvi a. dela naloge. V denarnih enotah dobimo 62.887, 15. Sedanja vrednost preostalega dolga je 37.112, 85. Če boste povprašali po vašem preostalem dolgu v banki po 12 letih, bo odgovor

$$A(w + w^2 + \cdots + w^{144}) \cdot (1+i)^{12} = 66.649, 35\,.$$

c. (10) Kolikšen del 145. obroka so obresti?

Rešitev: Režim odplačevanja glavnice in obresti je stvar dogovora, tako da je v nalogi nekaj možnosti interpretacije. Najbolj naravna interpretacija je ta, da z vsakim obrokom odplačamo obresti na preostali *dolg po plačilu zadnjega obroka in del glavnice. V našem primeru je preostali dolg po* 144. *obroku enak* $66.649,35$. *V času do plačila* 145. *obroka se nabere obresti v višini* $\left((1+i)^{\frac{1}{12}}-1\right)\times 66.649,35 = 271,54$.

2. (20) V spodnji tabeli je amortizacijski načrt za obveznico CITI75 izdajatelja CitiGroup. Če obveznico kupite danes, boste v prihodnosti dobivali plačila kuponov po navedenem amortizacijskem načrtu, na koncu pa boste dobili še glavnico. Obveznica je denominirana v EUR in se prodaja v apoenih po 1.000,00 EUR. Privzemite, da je leto dolgo 1 enoto, deleži leta pa se računajo s privzetkom, da ima leto 365 dni.

Datum	Št. kupona	Kupon	Izplač. glavnice	Preostala glavnica
02.08.2005	1	50	0	1000
02.08.2006	2	50	0	1000
02.08.2007	3	50	0	1000
02.08.2008	4	50	0	1000
02.08.2009	5	50	0	1000
02.08.2010	6	50	0	1000
02.08.2011	7	50	0	1000
02.08.2012	8	50	0	1000
02.08.2013	9	50	0	1000
02.08.2014	10	50	0	1000
02.08.2015	11	50	0	1000
02.08.2016	12	50	0	1000
02.08.2017	13	50	0	1000
02.08.2018	14	50	0	1000
02.08.2019	15	50	1000	0

a. (5) Cena apoena obveznice na dan 15. 9. 2004 je 985 EUR. Bi se odločili za nakup te obveznice, če predpostavite, da bo letna efektivna obrestna mera v obdobju konstantno enaka 4% in da boste izplačila kuponov porabili in ne ponovno investirali?

Rešitev: Dne 15. 9. 2004 je do izplačila naslednjega kupona še 321 dni. Označimo $v = (1+i)^{-1}$ *in* $\delta_0 = \frac{321}{365}$. *Označimo še* $A = 50$ *in* $G = 1000$. *Sedanjo vrednost prihodnjih izplačil izračunamo kot*

$$A(v^{\delta_0} + v^{\delta_0+1} + \cdots + v^{\delta_0+14}) + Gv^{\delta_0+14}\,.$$

Poenostavimo v

$$v^{\delta_0}\left(\frac{A(1-v^{15})}{(1-v)} + Gv^{14}\right).$$

Konkretno dobimo, da je sedanja vrednost enaka 1.116, 48 EUR. *Nakup obveznice se izplača.*

b. (5) Bi kupili obveznico, če bi vsa izplačila kuponov reinvestirali ob 4% obrestni meri do dneva zapadlosti glavnice? Ali bi omenjene transakcije imele vpliv na sedanjo vrednost denarnega toka? Utemeljite vaš razmislek.

Rešitev: Če izplačila kuponov ponovno investirate pri isti obrestni meri, je sedanja vrednost teh izplačil povsem enaka, kot v trenutku, ko ste prejeli plačilo kupona, saj se ustrezne potence v pokrajšajo. Obveznico bi kupili kot v delu a. naloge.

c. (10) Privzemite spet, da boste vse kupone reinvestirali pri efektivni obrestni meri j. Kolikšen bi moral biti j, da bi bila sedanja vrednost prihodnjega denarnega toka točno enaka ceni obveznice na dan 15. 9. 2004? Zapišite samo enačbo, ni pa je potrebno rešiti. Odgovorite le na vprašanje, ali bi moral j biti večji ali manjši od i.

Rešitev: Če izplačila kuponov ponovno investiramo pri obrestni meri i, je sedanja vrednost obveznice večja od cene. To pomeni, da mora biti j manjši od i. Oglejmo si, kaj se zgodi s k-tim kuponom po vrsti. Na koncu življenja obveznice bo izplačilo kupona v vrednosti A nominalno vredno $A(1+j)^{14-k}$, *sedanja vrednost pri obrestni meri i te nominalne vsote pa bo* $A(1+j)^{14-k}v^{\delta_0+14}$. *Sedanja vrednost denarnega toka do konca življenja obveznice bo tako*

$$\sum_{k=0}^{14} A(1+j)^{14-k}v^{\delta_0+14} + v^{\delta_0+14}G\,.$$

Poenostavimo v

$$v^{\delta_0+14}\left(\frac{A\left((1+j)^{15}-1\right)}{j}+G\right)=985\,.$$

Ta sedanja vrednost bi morala biti enaka ceni obveznice 985 EUR. *Numerično lahko izračunamo, da je* $j = 0,3\%$.

3. (20) S ${}_tp_x$ označimo verjetnost, da oseba stara x let preživi vsaj še t let.

a. (5) Produkt

$$p_x \cdot p_{x+1} \cdots p_{x+n-1}$$

zapišite z enim samim aktuarskim simbolom. Utemeljite vaš razmislek.

Rešitev: Osnovna lastnost količin ${}_tp_x$ je formula

$${}_sp_x \cdot {}_tp_{x+s} = {}_{s+t}p_x \,.$$

Računamo po vrsti

$$p_x \cdot p_{x+1} = {}_1p_{x+1} \cdot {}_1p_x = {}_2p_x \,.$$

Če nadaljujemo, sledi

$$p_x \cdot p_{x+1} \cdots p_{x+n-1} = {}_np_x \,.$$

b. (5) Produkt

$${}_sp_x \cdot {}_tp_{x+s}$$

zapišite z enim samim aktuarskim simbolom. Utemeljite vaš razmislek.

Rešitev: Količina ${}_sp_x$ je verjetnost, da oseba stara x let živi vsaj še s let, količina ${}_tp_{x+s}$ pa je pogojna verjetnost, da oseba stara $x+s$ let preživi še t let. Po elementarni formuli $P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$ sledi, da je produkt verjetnost, da oseba stara x let preživi še $s+t$ let, torej

$${}_sp_x \cdot {}_tp_{x+s} = {}_{t+s}p_x \,.$$

c. (5) Vsoto

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_x \cdot p_{x+1} \cdots p_{x+n-1}$$

zapišite z enim samim aktuarskim simbolom. Utemeljite vaš razmislek.

Rešitev: Z upoštevanjem a. dobimo

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} p_x \cdot p_{x+1} \cdots p_{x+n-1} &= \sum_{n=1}^{\infty} {}_n p_x \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(K_x \geq n) \\ &= E(K_x) \\ &= e_x \,.\end{aligned}$$

Oglejte si formulo (2.26) v Gerberju.

d. (5) Definirajte slučajno spremenljivko

$$K_x^* = \begin{cases} K_x\,, & \text{če je } K_x \leq n \\ n\,, & \text{če je } K_x > n \end{cases}$$

in označite $e_{x:\,\overline{n}|} = E(K_x^*)$. Pokažite, da velja

$$e_{x:\,\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} {}_k p_x \,.$$

Rešitev: Formula ni nič drugega kot znana enakost

$$E(K_x^*) = \sum_{k=1}^{n} P(K_x^* \geq k)\,.$$

Seštevamo samo do n, ker je $P(K_x^* \geq k) = 0$ *za* $k \geq n+1$.

4. (20) Oseba stara 30 let sklene z zavarovalnico mešano zavarovanje za obdobje 25 let. Zavarovalna vsota 50.000 EUR se izplača ob koncu leta, v katerem zavarovanec umre, oziroma ob doživetju. Premije se placujejo letno prenumerandno, dokler zavarovanec živi, vendar največ 20 let. Sklenitveni stroški znašajo 1% zavarovalne vsote, inkaso stroški 2% bruto premije ter upravni stroški 0,5% zavarovalne vsote za vsako leto zavarovanja. Za izračune uporabite tablice umrljivosti A1967-70 Ultimate.

a. (5) Zapišite letno bruto premijo.

Rešitev: Označimo $x = 30$, $n = 25$, $A = 50.000$, $\alpha = 1\%\,(A)$, $\beta = 2\%\,(\Pi)$ *in* $\gamma = 0,5\%\,(A)$. *Za premijo velja enačba*

$$\Pi\,\ddot{a}_{30:\,\overline{20|}} = A \cdot A_{30:\,\overline{25|}} + \alpha \cdot A + \beta \cdot \Pi \ddot{a}_{30:\,\overline{20|}} + \gamma \cdot A \cdot \ddot{a}_{30:\,\overline{20|}}\,.$$

Z uporabo tablic sledi, da je $\Pi = 1.724,95$ EUR.

b. (5) Izračunajte bruto matematično rezervo ob koncu 20. leta zavarovanja.

Rešitev: Velja

$$_{20}V_{30:\,\overline{25|}} = A\big(A_{50:\,\overline{5|}} + \gamma \cdot \ddot{a}_{50:\,\overline{5|}}\big)\,.$$

Konkretno je $_{20}V_{30:\,\overline{25|}} = 42.333,50$.

c. (10) Privzemite, da matematične rezerve obračunavate v zveznem času. Označite $x = 30$ in $T = 25$. Kaj bi morala biti limita

$$\lim_{t \to T} {}_tV_x\,?$$

Rešitev: Ko se bliža čas doživetja, morajo rezerve konvergirati proti zavarovalni vsoti A.

5. (20) Privzemite splošno zavarovanje za primer smrti za osebo staro x let z izplačili $c_1, c_2, \ldots, c_n$ na koncu leta, ko oseba umre in premijami $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_{n-1}$, ki se plačujejo na začetku vsakega leta. Efektivna obrestna mera naj bo konstantna in enaka i v celotnem obdobju.

a. (5) Privzemite, da so vse premije enake. Zapišite formulo za višino premij.

Rešitev: Pričakovana sedanja vrednost izplačil je enaka

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_{k+1} v^{k+1} P(K_x = k)\,,$$

pričakovana sedanja vrednost vplačanih premij, ki so enake π, pa je

$$\pi \sum_{k=0}^{n-1} (1 + v + \cdots + v^k) P(K_x = k) + (1 + v + \cdots + v^{n-1})\, P(K_x \geq n)\,.$$

Zadnji člen v zgornji formuli ustreza primeru, ko oseba preživi obdobje zavarovanja. Tudi v tem primeru je oseba plačala vse premije. Premijo izračunamo tako, da izenačimo obe pričakovani sedanji vrednosti.

b. (5) Zapišite formulo za ${}_kV_x$ v splošnem primeru za $0 < k < n$.

Rešitev: Postavimo se na začetek leta k in privzemimo, da je zavarovana oseba še živa. Pričakovana sedanja vrednost prihodnjih obveznosti bo

$$\sum_{i=k}^{n-1} c_{i+1} v^{i-k+1} P(K_{x+k} = i - k)\,,$$

pričakovana sedanja vrednost premij pa

$$\begin{aligned} &\sum_{i=k}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{i-k} v^j \, \pi_{k+j} \right) P(K_{x+k} = i - k) + \\ &+ \quad (\pi_k + v\pi_{k+1} + \cdots + \pi_{n-1} v^{n-k-1}) P(K_{x+k} \geq n - k)\,. \end{aligned}$$

Zadnji člen spet ustreza primeru, ko oseba preživi obdobje zavarovanja in je plačala vse premije. Razlika prve in druge vsote je enaka zahtevani ${}_kV_x$.

c. (10) Za $0 < k < n-1$ izpeljite *Facklerjevo formulo*

$$ {}_{k+1}V_x = ({}_kV_x + \pi_t)\,\frac{1+i}{p_{x+k}} - c_{k+1}\,\frac{q_{x+k}}{p_{x+k}}\,. $$

Rešitev: Najelegantnejši je naslednji razmislek: Rezerva v trenutku k mora biti enaka sedanji pričakovani vrednosti obveznosti v letu k in sedanji pričakovani vrednosti rezerve v letu $k+1$, če bo ta potrebna, torej če bo oseba še živa, odštejemo pa premijo, ki jo je oseba plačala na začetku leta. Sledi

$$ {}_kV_x = vc_{k+1}P(K_{x+k} = 0) + v \cdot {}_{k+1}V_x \cdot P(K_{x+k} \geq 1) - \pi_k\,. $$

Upoštevamo, da je $P(K_{x+k} = 0) = q_{x+k}$ in $P(K_{x+k} \geq 1) = p_{x+k}$. Vstavimo in upoštevamo še $v = (1+i)^{-1}$ in formula sledi.

6. (20) V tablicah smrtnosti pri i=4% poiščite in zapišite:

a. (3) Neto enkratno premijo za dosmrtno zavarovanje za primer smrti za 40 let staro osebo.

Rešitev: $A_{40} = 0,27331$.

b. (3) Neto enkratno premijo za mešano zavarovanje za 30 let staro osebo in zavarovalno dobo 30 let.

Rešitev: $A_{30:\,\overline{30|}} = 0,32209$.

c. (3) Neto enkratno premijo za dosmrtno prenumerandno življenjsko rento za 33 let staro osebo.

Rešitev: $\ddot{a}_{33} = 20,488$.

d. (3) Neto enkratno premijo za 15 let trajajočo prenumerandno življenjsko rento za 30 let staro osebo.

Rešitev:

$$\ddot{a}_{30:\,\overline{15|}} = \frac{N_{30} - N_{45}}{D_{30}} = \frac{219735,21 - 99765,54}{10433,31} = 11,50\,.$$

e. (4) Neto enkratno premijo za zavarovanje za doživetje za 20 let staro osebo in zavarovalno dobo 23 let.

Rešitev:

$$A_{20:\,\overset{1}{\overline{23|}}} = \frac{D_{43}}{D_{20}} = \frac{6180,60}{15557,44} = 0,397\,.$$

f. (4) Kaj bi se zgodilo s premijo v točki e., če bi uporabili selektivne tablice smrtnosti za prvo leto selekcije?

Rešitev: Vzamemo $A_{20:\,\overset{1}{\overline{23|}}}$ *iz selektivnih tablic in dobimo*

$$A_{20:\,\overset{1}{\overline{23|}}} = \left.\frac{D_{43}}{D_{20}}\right|_{\text{Selek.}} = \frac{6173,68}{15552,28} = 0,397\,.$$

7. (20) Oseba stara x z zavarovalnico sklene zavarovanje za primer smrti za vse življenje. Plačilo na koncu leta smrti je $A = 10.000$ EUR. Premije se plačujejo letno prenumerandno v višini P. Privzemite, da je efektivna obrestna mera ves čas konstantna in enaka i. Naj bo ${}_kL_x$ razlika med sedanjo vrednostjo prihodnjih izplačil in sedanjo vrednostjo prihodnjih premij na začetku leta k-tega leta zavarovanja.

a. (5) Navedite, kakšne vrednosti lahko zavzame slučajna spremenljivka ${}_kL_x$. Uporabite lahko aktuarske simbole.

Rešitev: Označimo $y = x + k$. Če bo $K_y = l$ za $l = 0, 1, \ldots,$ bo

$$ {}_kL_x = Av^{l+1} - P(1 + v + \cdots + v^l)\,. $$

b. (5) Izrazite $P({}_kL_x = y_k)$ za vse vrednosti y_k, ki pridejo v poštev.

Rešitev: Iz a. sledi, da za $y_l = Av^{l+1} - P(1 + v + \cdots + v^l)$ velja $P({}_kL_x = y_l) = P(K_y = l)$.

c. (5) Izrazite $E({}_kL_x)$ z aktuarskimi simboli.

Rešitev: Velja

$$ E({}_kL_x) = AE(v^{K_y+1}) - PE(\ddot{a}_{\overline{K_y+1}|}) = A \cdot A_y - P\ddot{a}_y\,. $$

Glej Gerber, formuli (3.3) in (4.3).

d. (5) Z besedami pojasnite, zakaj so rezerve ${}_kV_x$ naraščajoča funkcija $t \geq x$.

Rešitev: Če je oseba na začetku leta k še živa, bo pričakovana sedanja vrednost prihodnjega izplačila večja (ker je bliže v času), pričakovana sedanja vrednost premij pa manjša (ker jih bo oseba plačala manj).

8. (20) Oseba stara $x = 40$ let z zavarovalnico sklene zavarovanje za doživetje v trajanju 20 let z izplačilom $A = 1$. Privzemite, da je efektivna obrestna mera enaka $i = 4\%$ za celotno obdobje. Poleg tega zavarovalnica vrne akumulirano vrednost premij pri efektivni obrestni meri $i = 4\%$, če je $K_x \leq 10$. Premije se plačujejo prenumerandno vsako leto vseh 20 let zavarovanja.

a. (5) Izračunajte neto premijo za to zavarovanje.

Rešitev: Kot vedno izenačimo pričakovano sedanjo vrednost premij s pričakovano sednjo vrednostjo izplačil. Označimo $v = (1+i)^{-1}$. *Označimo iskano premijo s* Π. *Sedanja vrednost izplačil je*

$$PV = \begin{cases} \Pi(1+v+\cdots+v^k) & \textit{če je } K_x = k \textit{ in } 0 \leq k \leq 10, \\ 0 & \textit{če je } 11 \leq K_x < 20, \\ v^{20} & \textit{če je } K_x \geq 20. \end{cases}$$

Sledi

$$\begin{aligned} & E\big(\textit{sedanja vrednost izplačil}\big) = \\ & = \sum_{k=0}^{10} \Pi(1+\cdots+v^k)P(K_x = k) + v^{20}P(K_x \geq 20)\,. \end{aligned}$$

Sedanjo vrednost premij dobimo kot

$$\begin{aligned} & E\big(\textit{sedanja vrednost premij}\big) = \\ & = \sum_{k=0}^{19} \Pi(1+\cdots+v^k)P(K_x = k) + \Pi(1+\cdots+v^{19})P(K_x \geq 20)\,. \end{aligned}$$

Zadnji člen dodamo, ker oseba v primeru doživetja, torej ko je $K_x \geq 20$, *plača vse premije. Izenačimo in dobimo*

$$\begin{aligned} \sum_{k=11}^{19} \Pi(1+\cdots+v^k)P(K_x = k) + \Pi(1+\cdots+v^{19})P(K_x \geq 20) = \\ = \quad v^{20}P(K_x \geq 20)\,. \end{aligned}$$

Enakost lahko zapišemo tudi z aktuarskimi simboli. Vemo, da je

$$\ddot{a}_{\overline{n|}} = 1 + v + \cdots + v^{n-1}\,.$$

Po (4.11) v Gerberju je

$$\ddot{a}_{x:\,\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1}(1+v+\cdots+v^k)P(K_x=k)+(1+v+\cdots+v^{n-1})P(K_x\geq n)\,.$$

Sledi, da je

$$\sum_{k=0}^{10}\Pi(1+\cdots+v^k)P(K_x=k) = \Pi\left(\ddot{a}_{40:\,\overline{11}|}-\ddot{a}_{\overline{11}|}P(K_x\geq 11)\right).$$

Enačbo za neto premijo lahko zapišemo kot

$$\Pi\left(\ddot{a}_{40:\,\overline{11}|}-\ddot{a}_{\overline{11}|}P(K_{40}\geq 11)\right)+v^{20}P(K_{40}\geq 20)=\Pi\,\ddot{a}_{40:\,\overline{20}|}\,.$$

Iz tabel dobimo

$$P(K_{40}\geq 20)=0,8836 \qquad \textit{in} \qquad P(K_{40}\geq 11)=0,9661\,.$$

Iz tabel sledi še $\ddot{a}_{\overline{11}|}=8,760$. *Končno sledi še*

$$\ddot{a}_{40:\,\overline{20}|}=13,764 \qquad \textit{in} \qquad \ddot{a}_{40:\,\overline{11}|}=9,013\,.$$

b. (5) Izračunajte ${}_{10}V_{40:\,\overline{20}|}$.

Rešitev: Postavimo se na začetek 10*-tega leta. Označimo* $y=x+10$. *Pričakovana sedanja vrednost izplačil bo*

$$\Pi(1+v+\cdots+v^{10})P(K_y=0)+v^{10}P(K_y\geq 10)\,.$$

Pričakovana sedanja vrednost premij pa bo

$$\sum_{k=0}^{9}\Pi(1+\cdots+v^k)P(K_y=k)+(1+v+\cdots+v^9)P(K_y\geq 10)\,.$$

Zadnji člen ustreza primeru, ko oseba preživi obdobje zavarovanja. Rezerve so torej

$$\begin{aligned}{}_{10}V_{x:\,\overline{n}|} &= \Pi(1+\cdots+v^{10})P(K_y=0)+v^{10}P(K_y\geq 10)-\\ &- \sum_{k=0}^{9}\Pi(1+\cdots+v^k)P(K_y=k)-(1+\cdots+v^9)P(K_y\geq 10)\end{aligned}$$

c. (5) Izrazite ${}_{11}V_{40:\,\overline{20|}}$ z aktuarskimi simboli.

Rešitev: Na začetku 11*-tega leta se zgornji produkt spremeni v zavarovanje za doživetje s prenumerandnimi premijami. Dobimo*

$$ {}_{11}V_{40:\,\overline{20|}} = v^9 \cdot P(K_{51} \geq 9) - $$

$$ - \sum_{k=0}^{9} \Pi(1+v+\cdots+v^k)P(K_{51}=k) - \Pi(1+v+\cdots+v^8)P(K_{51} \geq 9)\,. $$

Z aktuarskimi simboli napišemo

$$ {}_{11}V_{40:\,\overline{20|}} = v^9\,{}_9p_{51} - \ddot{a}_{51:\,\overline{10|}}\,. $$

d. (5) Izračunajte Π_{11}^s in Π_{11}^r.

Rešitev: Po definiciji je $\Pi_{11}^s = {}_{12}V_x \cdot v - {}_{11}V_x$*. Po definiciji je* $\Pi = \Pi_{11}^s + \Pi_{11}^r$.