Ekonomska fakulteta

AKTUARSKA MATEMATIKA 1

Smer Aktuarstvo

Pisni izpit

18. maj 2004

Ime in priimek: ____

Navodilo

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Rešitev naloge mora zajemati vse potrebne izračune in utemeljitve. Nalog je 8 in vsaka je vredna 20 točk, torej skupaj 160 točk. Za pozitivno oceno je potrebno zbrati 60% točk. Za reševanje imate 90 minut časa.

Naloga	***a.***	***b.***	***c.***	***d.***	***Skupaj***
1.			•	•	
2.			•	•	
3.					
4.			•	•	
5.					
6.		•	•	•	
7.			•	•	
8.					
Skupaj					

1. (20) Privzemite, da ste vzeli kredit v višini 120.000 EUR. Efektivna letna obrestna mera naj bo 7%. Sposojeni denar investirate v nakup rente v letni višini 14.000 EUR, ki bo izplačljiva v višini 7.000 EUR ob vsaki dopolnjeni polovici leta za naslednjih 25 let. Rente boste sprva uporabljali za odplačilo kredita, ko pa bo kredit odplačan, jih boste investirali po efektivni letni obrestni meri 5%.

a. (10) Kako dolgo bo trajalo, da bo dolg odplačan?

Rešitev: Dolg boste odplačevali tako dolgo, da bo sedanja vrednost plačil presegla sedanjo vrednost dolga. Sedanja vrednost dolga je $D = 120.000$ EUR*. Sedanja vrednost* n *polletnih izplačil po* $A = 7.000$ EUR *pa je*

$$A(v^{1/2} + v + \cdots + v^{n/2})\,,$$

kjer je $v = (1+i)^{-1}$ *in* i *efektivna obrestna mera. Veljati mora*

$$\frac{v^{1/2}(1 - v^{n/2})}{1 - v^{1/2}} \geq \frac{D}{A}\,.$$

Vstavimo, $v^{1/2} = 1.0344$ *in sledi* $n \geq 26,3$*. Potrebujemo torej* $n = 27$ *polletnih plačil.*

b. (10) Izračunajte koliko denarja boste imeli na koncu 25. leta.

Rešitev: Sedanja vrednost $n = 27$ *obrokov plačila je*

$$A \cdot \frac{v^{1/2}(1 - v^{27/2})}{1 - v^{1/2}} = 121.828,2\,.$$

Sedanja vrednost ostanka po odplačilu dolga je $1.828,2$ EUR*, dejanska vrednost ob odplačilu pa bo* $3036,9$*. Ta denar se bo obrestoval* 11 *let in pol po obrestni meri* 5%*, tako da bo na koncu vreden*

$$3036,9 \cdot (1,05)^{11,5} = 5322,4\,.$$

Označimo $j = 0,05$*. Akumulirana vrednost ostalih* 23 *polletnih rent po* A *bo enaka*

$$A((1+j)^{11} + (1+j)^{10,5} + \cdots + 1) = 213.323,3\,.$$

Na koncu boste imeli $218.645,7$ EUR*.*

2. (20) V spodnji tabeli je amortizacijski načrt za obveznico RS32. Če obveznico kupite danes, boste v prihodnosti dobivali plačila kuponov po navedenem načrtu, na koncu pa boste dobili še glavnico. Obveznica je denominirana v EUR in se prodaja v apoenih po 100,00 EUR. Privzemite, da je leto dolgo 1 enoto, deleži leta pa se računajo s privzetkom, da ima leto 365 dni.

a. (10) Cena dveh apoenov obveznice na dan 29.04.2004 je bila 208,2 EUR. Bi se 29. 4. 2004 odločili za nakup te obveznice, če predpostavite, da bo letna efektivna obrestna mera v obdobju življenja obveznice konstantno 4% in da boste izplačila kuponov porabili in ne ponovno investirali?

   Rešitev: Izračunati moramo sedanjo vrednost prihodnih izplačil in jo primerjati s ceno obveznice na dan 29. 4. 2004. Po formuli je

$$PV = \sum_{i=1}^{n} e^{-\delta t_i} K_i + G e^{-\delta T} \,,$$

   kjer so $K_1, K_2, \ldots$ *nominalne vrednosti kuponov,* $t_1, t_2, \ldots$ *časi izplačil kuponov,* G *vrednost glavnice in* T *čas vračila glavnice. V našem primeru je do prvega plačila kupona* 261 *dni, kar je merjeno v letih enako* $t_1 = 0.7115$*. Potem bo kupon izplačan še sedemkrat, tako da je* $t_k = k + t_1$ *za* $k = 1, 2, \ldots, 7$*. Velja tudi* $T = t_7$*. Sledi*

$$PV = \sum_{k=0}^{7} v^{t_i} K + v^{t_7} G \,.$$

   Poenostavimo v

$$PV = v^{t_1} \left(\frac{(1 - v^8)K}{1 - v} + v^7 G \right) .$$

   Vstavimo $1 + i = 1,04$ *in dobimo*

$$PV = 110,49 \,.$$

   Cena obveznice je 104,1*, tako da obveznico bi kupili.*

b. (10) Borzni analitiki menijo, da bi bila pravična cena obveznice, na dan 29.04.2004, 107,75 EUR. Ob kolikšni jakosti obresti je izračunana ta cena, ce predpostavite, da bo jakost obresti konstantna v navedenem obdobju. Rešitev te naloge je možna samo numerično. Zapišite le enačbo, ki jo je potrebno rešiti.

Rešitev: Cena mora biti enaka sedanji vrednosti, torej

$$107,75 = v^{t_1}\left(\frac{(1-v^8)K}{1-v} + v^7 G\right).$$

Z numeričnim izračunom dobimo, da mora biti $v = 0,9579$. *Vemo, da je* $v = e^{-\delta}$, *torej je* $\delta = 0,0430$.

Datum	Št. kupona	Kupon	Izplač. glav.	Preostala glav.
15.01.2002	0	5,375	0	100
15.01.2003	1	5,375	0	100
15.01.2004	2	5,375	0	100
15.01.2005	3	5,375	0	100
15.01.2006	4	5,375	0	100
15.01.2007	5	5,375	0	100
15.01.2008	6	5,375	0	100
15.01.2009	7	5,375	0	100
15.01.2010	8	5,375	0	100
15.01.2011	9	5,375	0	100
15.01.2012	10	5,375	100	0

3. (20) Naj bo μ_t jakost smrtnosti za določeno populacijo, s ${}_tp_x$ pa označimo verjetnost, da oseba stara x let preživi vsaj še t let.

a. (5) Kaj je
$$\sum_{k=1}^{\infty} {}_kp_x\,?$$

Rešitev: Vemo, da je za nenegativne celoštevilske slučajne spremenljivke
$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k)\,.$$

Če s T_x označimo preostalo življenjsko dobo osebe stare x let, je
$${}_kp_x = P(T_x \geq k) = P(K_x \geq k)\,.$$

Sledi
$$e_x = E(K_x) = \sum_{k=1}^{\infty} {}_kp_x\,.$$

b. (5) Privzemite, da jakosti smrtnosti znotraj leta $k = 0, 1, 2\ldots$ prištejemo konstanto $c_k > 0$. Privzemite, da je x celo število. Zapišite formulo za $e_x = E(K_x)$.

Rešitev: Vemo, da je
$${}_kp_x = \exp\left(-\int_x^{x+k} \mu_s\,\mathrm{d}s\right)\,.$$

Ko prištejemo konstante $c_k > 0$, dobimo
$${}_kp_x = \exp\left(-\int_x^{x+k} \mu_s\,\mathrm{d}s + \sum_{i=x}^{x+k-1} c_i\right)\,.$$

Pričakovano življenjsko dobo dobimo po formuli iz a.

c. (5) V Makehamovem modelu je

$$_tp_x = \exp\left(-At - mc^x(c^t - 1)\right)$$

za ustrezne konstante A, m in c. Pričakovana vrednost $\overset{\circ}{e}_x = E(T_x)$ je neka funkcija parametrov A, m in c. Označimo $\overset{\circ}{e}_x = f(A, m, c)$. Privzemite, da jakosti smrtnosti prištejemo konstanto α. Zapišite $\overset{\circ}{e}_x$ s pomočjo funkcije f.

Rešitev: Jakost smrtnosti v Makehamovem modelu je

$$\mu_x = A + Bc^x\,.$$

Konstanta B mora biti enaka $B = m\log c$. Ko prištejemo konstanto α, dobimo spet Makehamovo jakost smrtnosti, le A se spremeni v $A + \alpha$. Sledi

$$\overset{\circ}{e}_x = f(A + \alpha, m, c)\,.$$

d. (5) Aktuar se je zmotil in meril čas v polovicah leta namesto v letih. To pomeni, da je bila polovica leta enota časa. Kaj se v tem primeru zgodi s jakostjo smrtnosti?

Rešitev: V enoti časa, ki jo je izbral aktuar, umre manj zavarovancev. Jakost smtrnosti v vsakem trenutku delimo z 2.

4. (20) Moški star 35 let sklene z zavarovalnico mešano zavarovanje za obdobje 15 let. Zavarovalna vsota 30.000 EUR se izplača ob koncu leta, v katerem zavarovanec umre, oziroma ob doživetju. Premije se plačujejo letno postnumerandno, dokler zavarovanec živi, vendar največ 10 let. Sklenitveni stroški znašajo 2% zavarovalne vsote, inkaso stroški 4% bruto premije ter upravni stroški 0,5% zavarovalne vsote za vsako leto zavarovanja.

Za vse izračuna uporabite tablice smrtnosti AM1976-70, ki ste jih dobili na predavanjih.

a. (10) Izračunajte letno bruto premijo za to zavarovanje.

Rešitev: Enačbo za letno bruto premijo zapišemo kot

$$\Pi\ a_{35:\overline{10}|} = 30.000\ A_{35:\overline{15}|} + 2\%\ 30.000 + 4\%\ \Pi\ a_{35:\overline{10}|} + 0,5\%\ 30.000\ a_{35:\overline{15}|}$$

oziroma

$$\Pi = \frac{30.000(A_{35:\overline{15}|} + 2\% + 0,5\%\ a_{35:\overline{15}|})}{(1-4\%)\ a_{35:\overline{10}|}},$$

kjer naloga ne definira načina obračuna upravnih stroškov (prenumerandno, postnumeradno). V rešitvi je privzet postnumerandni način, lahko pa bi uporabili tudi prenumerandni način obračuna upravnih stroškov.

Upoštevamo naslednje enačbe

$$\begin{aligned}
A_{35:\overline{15}|} &= \frac{M_{35} - M_{50} + D_{50}}{D_{35}} = \frac{1949,13 - 1767,5555 + 4597,0607}{8545,006} \\
a_{35:\overline{10}|} &= \frac{N_{36} - N_{46}}{D_{35}} = \frac{162947,77 - 94067,358}{8545,006} \\
a_{35:\overline{15}|} &= \frac{N_{36} - N_{51}}{D_{35}} = \frac{162947,77 - 68970,076}{8545,006}.
\end{aligned}$$

Izračunamo bruto premijo

$$\begin{aligned}
\Pi &= \frac{30.000(0,5592 + 2\% + 0,5\%\ 10,998)}{(1-4\%)\ 8,0609} \\
&= 2.458,59\ EUR
\end{aligned}$$

b. (10 Zapišite bruto matematično rezervo ob koncu k-tega leta!

Rešitev: Ločiti moramo naslednja primera

$k \leq 10$:

$$
\begin{aligned}
{}_kV_{35:\overline{15}|} &= 30.000\ A_{35+k:\overline{15-k}|} + 4\%\ \Pi\ a_{35+k:\overline{10-k}|} + \\
&\qquad + 0,5\%\ 30.000\ a_{35+k:\overline{15-k}|} - \Pi\ a_{35+k:\overline{10-k}|},
\end{aligned}
$$

$k > 10$:

$$
{}_kV_{35:\overline{15}|} = 30.000(A_{35+k:\overline{15-k}|} + 0,5\%\ a_{35+k:\overline{15-k}|}).
$$

5. (20) Naj bo ${}_kV_{x:\,\overline{n}|}$ neto premijska rezerva za mešano zavarovanje za osebo staro x let za dobo n let. Izplačilo v primeru smrti naj bo c, izplačilo ob doživetju pa d. Oseba je premijo plačala ob sklenitvi zavarovanja. Brez računanja (res brez!) zapišite naslednje količine (lahko tudi z uporabo aktuarskih simbolov). Na kratko utemeljite vaš razmislek. Diskontni faktor označite z v.

a. (5) ${}_0V_{x:\,\overline{n}|} =$

Rešitev: Po definiciji je ${}_0V_{x:\,\overline{n}|} = 0$*, saj so na začetku pričakovane obveznosti točno enake pričakovanim plačilom.*

b. (5) ${}_nV_{x:\,\overline{n}|} =$

Rešitev: Premijske rezerve računamo s pogledom "strogo" v prihodnost, kar se tiče izplačil. Trenutek, v katerem računamo rezerve, ne spada v to prihodnost. Ker se z letom n zavarovanje izteče, je ${}_nV_{x:\,\overline{n}|} = 0$.

c. (5) ${}_{n-1}V_{x:\,\overline{n}|} =$

Rešitev: Rezerve računamo le še za živečega zavarovanca. Če je ob koncu $(n-1)$-ega leta zavarovanja še živ, so prihodnje obveznosti lahko ali c, če oseba umre v n-tem letu ali d ob doživetju. Verjetnost prvega dogodka je q_{x+n-1}, verjetnost drugega pa $1 - q_{x+n-1}$. Sledi

$${}_{n-1}V_{x:\,\overline{n}|} = v\left(cq_{x+n-1} + d(1 - q_{x+n-1})\right) .$$

d. (5) ${}_1V_{x:\,\overline{n}|} =$

Rešitev: V tem primeru morajo rezerve znašati točno toliko, kolikor je vrednost tega mešanega zavarovanja za dobo $n-1$ let za osebo staro $x+1$ let, torej

$${}_1V_{x:\,\overline{n}|} = cA^{1}_{x+1:\,\overline{n-1}|} + dA_{x+1:\,\overset{1}{\overline{n-1}|}} .$$

6. (20) S komutacijskimi števili zapišite in izračunajte pri letni efektivni obrestni meri 4% neto enkratno premijo za 15 let trajajošco prenumerandno življenjsko rento za 50 let staro osebo, kjer se renta v višini 1.500 EUR izplačuje vsak mesec. Za izračune uporabite tablice umrljivosti A1967-70 Ultimate, ki ste jih prejeli na vajah iz predmeta Aktuarska matematika 1.

Rešitev: Na vajah smo izpeljali naslednjo povezavo za doživljenjsko prenumerandno rento

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{d\ i}{d^{(m)}\ i^{(m)}}\ \ddot{a}_x - \frac{i - i^{(m)}}{d^{(m)}\ i^{(m)}}.$$

Ob upoštevanju zgornje enačbe lahko enkratno premijo za n-let trajajočo prenumerandno doživljenjsko rento z m-kratnimi izplačili na leto, zapišemo kot

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} &= \ddot{a}_x^{(m)} - {}_{n|}\ddot{a}_x^{(m)} \\
&= \frac{d\ i}{d^{(m)}\ i^{(m)}}\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{i - i^{(m)}}{d^{(m)}\ i^{(m)}}\ (1 - \frac{D_{x+n}}{D_x}) \\
&= \frac{d\ i}{d^{(m)}\ i^{(m)}}\ \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} - \frac{i - i^{(m)}}{d^{(m)}\ i^{(m)}}\ (1 - \frac{D_{x+n}}{D_x})
\end{aligned}$$

Izračunamo še premijo

$$\begin{aligned}
P &= 12 \cdot 1.500\Big(\frac{0,038462 \cdot 0,04}{0,039157 \cdot 0,039285} \cdot \frac{73567,136 - 23021,434}{4597,0607} - \\
&\quad \frac{0,04 - 0,039285}{0,039157 \cdot 0,039285}\ (1 - \frac{2144,1713}{4597,0607})\Big) \\
&= 193.475,21 \text{ EUR},
\end{aligned}$$

kjer upoštevamo, da zavarovanec dobi $12 \cdot 1.500$ EUR *izplačil na leto.*

7. (20) Moški star točno 65 let sklene z zavarovalnico mešano zavarovanje za dobo treh let. Izplačilo, če oseba umre v prvem letu je 10.000 EUR, če umre v drugem letu 15.000 EUR in če umre v tretjem letu 30.000 EUR. Ob doživetju oseba prejme 30.000 EUR. Premije v višini 9.500 EUR so plačljive prenumerandno dokler je zavarovanec živ. Slučajna spremenljivka L je definirana kot

$$L = \text{sedanja vrednost izplačil} - \text{sedanja vrednost premij}\,.$$

Privzemite, da je efektivna letna obrestna mera 3%, vsi izračuni pa naj temeljijo na tablicah AM1967-70, ki ste jih dobili na vajah. Stroškov ne upoštevajte.

a. (10) Katere so možne vrednosti slučajne spremenljivke L? S kolikšno verjetnostjo bo slučajna spremenljivka L zavzela posamezne vrednosti? Kolikšna je verjetnost, da bo zavarovalnica s tem zavarovancem imela izgubo?

Rešitev: Označimo $A = 10.000$, $B = 15.000$ *in* $C = 30.000$ *in* $P = 9.500$ *in* $1 + i = 1,03$. *Kot običajno naj bo* $v = (1 + i)^{-1}$. *Možna vrednosti in verjetnosti za spremenljivko* L *strnemo v tabelo.*

Vrednost	*Verjetnost*
$vA - P$	q_{65}
$v^2B - P(1 + v)$	$p_{65}q_{66}$
$v^3C - P(1 + v + v^2)$	${}_2p_{65}$

S pomočjo tabel in preprostih računov dobimo

Vrednost	Verjetnost
208,74	0,0274
-4.584.36	0,0294
-2.237,12	0,9432

Zavarovalnica bo imela izgubo, če bo $L > 0$. *Iz tabele razberemo, da bo* $P(L > 0) = 0,0274$.

b. (10) Izračunajte $E(L)$ in $\mathrm{var}(L)$. Je zavarovalnica dobro odmerila premije?

Rešitev: Računamo po formulah

$$E(L) = \sum_{l_i} l_i \, P(L = l_i) \quad \textit{in} \quad \mathrm{var}(L) = \sum_{l_i} l_i^2 \, P(L = l_i) - (E(L))^2 \; .$$

Dobimo

$$E(L) = -2.239, 11 \qquad \textit{in} \qquad \mathrm{var}(L) = 325886, 8 \, .$$

Zavarovalnica ni dobro odmerila premije. Brez stroškov bi moralo biti $E(L) = 0$. *Premija je prevelika.*

8. (20) Katarina je rojena 6. 10. 2003. Zavarovalnica ponuja (v nekoliko poenostavljeni obliki) naslednje zavarovanje:

> Sklenitelj zavarovanja je mati, ki bi bila ob sklenitvi zavarovanja stara 33 let, Katarina pa 0 let. Premije bi mati plačevala prenumerandno 6 let v enakih zneskih. Ob dopolnjenem 19 letu starosti bi Katarina prejela izplačilo v višini 10.000 EUR. V vmesnem času bi v primeru smrti matere zavarovalnica Katarini izplačala do tedaj vplačane in obrestovane premije in sicer na koncu leta smrti. V primeru smrti Katarine je upravičenec mati, ki prejme enaka izplačila, kot bi jih Katarina, v primeru smrti obeh pa so upravičenci dediči po zakonu, ki prejmejo enake vsote, kot bi jih Katarina.

Pri vseh izračunih uporabite tablice AM1976-70, ki ste jih dobili na predavanjih.

a. (5) Izračunajte neto premijo za zgornje zavarovanje, če privzamete efektivno letno obrestno mero 4%. Privzemite, da se tudi vplačane premije obrestujejo z efektivno obrestno mero 4%.

Rešitev: Skrbnejše branje besedila pokaže, da gre za zavarovanje, ki je vezano izključno na materino življenje. Označimo s K_x trajanje materinega življenja ($x = 33$). Označimo $A = 10.000$, $v = (1 + i)^{-1}$ in označimo s P iskano premijo. Ideja je, kot vedno, v tem, da izenačimo pričakovani sedanji vrednosti izplačil in premij. Najprej moramo izračunati sedanje vrednosti prihodnjih izplačil, če je $K_x = k$ za $k = 0, 1, \ldots, 4$. V tem primeru je sedanja vrednost izplačil enaka

$$P(1 + v + \cdots + v^k)\,,$$

Verjetnost takega izplačila je $P(K_x = k)$. V primeru $K_x = k$ za $k = 5, 6, \ldots, 19$ bo sednja vrednost izplačil kar enaka sedanji vrednosti vseh vplačanih premij, torej

$$P(1 + v + \cdots + v^5)\,,$$

verjetnost takega izplačila pa je $P(K_x = k)$. Ob doživetju bo sedanja *vrednost izplačila enaka* Av^{19}*. Povzamemo*

$$\begin{aligned} &E(\textit{sedanja vrednost izplačil}) = \\ &= \sum_{k=0}^{4} P(1+v+\cdots+v^k)P(K_x=k) \\ &\quad + \sum_{k=5}^{18} P(1+\cdots+v^5)P(K_x=k) + Av^{19}P(K_x \geq 19)\,. \end{aligned}$$

Izračunajmo sedanjo vrednost premij. Če bo $K_x = k$ *za* $k = 0, 1, \ldots, 4$*, bo sednja vrednost vplačanih premij enaka*

$$P(1+v+\cdots+v^k)\,,$$

verjetnost tega dogodka pa $P(K_x = k)$*. Sedanja vrednost vseh* 6 *premij bo*

$$P(1+v+\cdots+v^5)\,,$$

verjetnost tega dogodka pa je $P(K_x \geq 5)$*. Sledi*

$$\begin{aligned} &E(\textit{sedanja vrednost premij}) = \\ &= \sum_{k=0}^{4} P(1+v+\cdots+v^k)P(K_x=k) \\ &\quad + P(1+v+\cdots+v^5)P(K_x \geq 5)\,. \end{aligned}$$

Ko izenačimo levo in desno stran, se nekaj členov na levi in desni strani uniči, ostane pa

$$Av^{19}P(K_x \geq 19) = P(1+v+\cdots+v^5)P(K_x \geq 19)\,.$$

Ko pokrajšamo sledi, da je premija enaka $P = 870,6$*.*

b. (5) Izračunajte neto premijsko rezervo na začetku 18 leta zavarovanja pod privzetkom, da je mati še živa. Privzemite efektivno obrestno mero v višini 4%.

Rešitev: Pričakovana sedanja vrednost prihodnjih obveznosti je

$$Avp_{51} + \left(P(1+v+\cdots+v^5)\,(1+i)^{19}\right)v\,q_{51}\,.$$

Dobimo ${}_{18}V = 9.628,04$*. Količina v drugem velikem oklepaju je obrestovana vrednost premij na koncu 19 leta zavarovanja.*

c. (5) Izračunajte neto premijsko rezervo na začetku 2 leta zavarovanja (torej po preteku enega leta) pod privzetkom, da je mati še živa. Privzemite efektivno obrestno mero v višini 4%.

Rešitev: Izračunati moramo razliko med pričakovanimi sedanjimi vrednostmi obveznosti in pričakovanimi sedanjimi vrednostmi vplačil premij. Kot v a. se za vsa leta do doživetja sedanje vrednosti pokrajšajo. Ostane le enačba

$$ {}_2V = Av^{18} - P(1 + v + \cdots + v^4)\,. $$

Dobimo ${}_2V = 189,86$.

d. (5) Privzemite, da je dejansko zahtevana neto premija 700 EUR. S kolikšno obrestno mero je računal aktuar pri Grawe? Privzemite, da se plačane premije obrestujejo z enako obrestno mero, kot jo je uporabil aktuar. Napišite le enačbo, ki jo je treba rešiti.

Rešitev: Po a. mora veljati

$$ Av^{19} - P(1 + v + \cdots + v^5) = 0\,. $$

Numerično dobimo $i = 5,37\%$.