Kazalo

1. Poglavje

Variacijski račun

Variacijski račun v ožjem pomenu besede je posplošitev odvajanja, le da ne odvajamo funkcij po spremenljivkah, ampak odvajamo operatorje (v posebnem primeru funkcionale) po funkcijah.

Naj bo $\mathcal{J} = [a, b] \subset \mathbb{R}$ neki interval. Odvod funkcionala $\phi : \mathcal{C}^1(\mathcal{J}) \longrightarrow \mathbb{R}$ je *linearni funkcional* $\phi'(u) : \mathcal{C}^1(\mathcal{J}) \longrightarrow \mathbb{R}$, za katerega velja Taylorjeva formula 1. reda

$$\phi(u + \delta u) \;=\; \phi(u) + \phi'(u)(\delta u) + o(\|\delta u\|).$$

Namesto odvoda $\phi'(u)$ pogosto uporabljamo *variacijo* $\delta\phi(u) := \phi'(u)(\delta u)$.

1.1 Standardna variacijska naloga

Standardna variacijska naloga sprašuje po funkciji u, ki daje med vsemi dopustnimi funkcijami funkcionalu ϕ,

$$\phi(u) \;=\; \int_a^b L\left(x, u, u'\right)\, dx, \tag{1.1}$$

minimalno vrednost. Pri tem so dopustne funkcije tiste funkcije, ki zadoščajo *geometrijskim* (tudi *kinematičnim*) pogojem, kot je na primer $u(a) = A$, L pa je dana *Lagrangeeva funkcija.*

Iz variacijskega računa [?] poznamo naslednji izrek:

Izrek 1.1 *Če daje funkcija u odvedljivemu funkcionalu ϕ lokalni ekstrem na dopustnih funkcijah, potem mora biti*

$$\delta\phi(u) = \phi'(u)(\delta u) = 0$$

za vsako dopustno variacijo δu, variacija δu pa je dopustna, če je hkrati s funkcijo u tudi funkcija $u + \delta u$ dopustna.

Za funkcional (1.1) je

$$\delta\phi(u) \quad = \quad \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial u}\delta u + \frac{\partial L}{\partial u'}\delta u' \right) dx = 0. \tag{1.2}$$

Razmadzejev izrek [?], ali pa kar preprosto integriranje po delih, če verjamemo, da so funkcije, ki jih moramo odvajati, res odvedljive, nas pripelje do pogoja

$$\left[\frac{\partial L}{\partial u'}\delta u \right]_a^b + \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial u'} \right) \delta u \, dx \quad = \quad 0$$

za vsako dopustno variacijo δu. Od tod sledi slavna *Euler-Lagrangeeva enačba*

$$\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial u'} \quad = \quad 0 \tag{1.3}$$

in *dinamični robni pogoj*

$$\left[\frac{\partial L}{\partial u'}\delta u \right]_a^b = 0, \tag{1.4}$$

ki mora biti spet izpolnjen za vsako dopustno variacijo δu.

Euler-Lagrangeeva enačba, če jo razpišemo, je diferencialna enačba v splošnem drugega reda. V posebnem primeru, ko je Lagrangeeva funkcija neodvisna od x,

$$L(x, u, u') = M(u, u'),$$

lahko Euler-Lagrangeevo enačbo enkrat integriramo [?] v

$$M - u'\frac{\partial M}{\partial u'} \quad = \quad C_1.$$

Ta enačba ne vsebuje spremenljivke x, zato je elementarno rešljiva.

Naloge

1.1 Analiziraj, reši in nariši brahistohrono, ki povezuje točki (a, A) in (b, B), kjer je $0 < a < b$, $0 < A < B$ in kjer je os y obrnjena navzdol, glej [?, primer 4.17]. Sam izberi razumne numerične podatke.

1.2 Analiziraj, reši in nariši krivuljo, ki nam da minimalno rotacijsko ploskev, glej [?, primer 4.18]. Sam izberi nekaj primerov numeričnih podatkov.

1.2 Izoperimetrični problem

Izoperimetrični problem je drugo ime za variacijsko nalogo, ki ustreza vezanemu ekstremu.

Če iščemo ekstrem (odvedljivega) funkcionala ϕ pri *linearnih* pogojih, recimo $\ell(u) = \alpha$, kjer je ℓ linearen funkcional, tedaj velja isti razmislek kot za standardno variacijsko nalogo, le da morajo dopustne variacije zadoščati pogoju $\ell(\delta u) = 0$.

Za splošni primer velja naslednji izrek:

Izrek 1.2 (Ljusternikova lema) *Naj da vektor u odvedljivemu funkcionalu ϕ lokalni ekstrem, pri tem pa mora vektor u zadoščati pogojem*

$$\psi_k(u) = \alpha_k, \ k = 1, 2, \ldots, n,$$

*kjer so ψ_k spet odvedljivi funkcionali. Če so funkcionali ψ'_k linearno neodvisni, tedaj obstajajo konstante λ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, (*Lagrangeevi parametri*), da za* vsako *variacijo δu velja*

$$\delta\Phi(u) = \Phi'(u)(\delta u) = 0,$$

kjer je

$$\Phi(u) = \phi(u) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \psi_k(u).$$

Ljusternikovo lemo lahko formuliramo tudi drugače. V novi formulaciji ni treba zahtevati linearne neodvisnosti funkcionalov ψ'_k.

Izrek 1.3 *Naj bodo ϕ in ψ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ odvedljivi funkcionali. Če daje vektor u funkcionalu ϕ lokalni ekstrem pri pogojih $\psi_k(u) = \alpha_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, tedaj obstajajo konstante λ_0, λ_1, $\ldots$, λ_n, ne vse enake nič, da za vsako variacijo δu velja*

$$\delta\Phi(u) = \Phi'(u)(\delta u) = 0,$$

kjer je

$$\Phi(u) = \lambda_0\phi(u) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \psi_k(u).$$

Denimo, da je eden od funkcionalov ψ_k, recimo zadnji, *linearen*

$$\psi_n(u) = \ell(u).$$

Pogoj $\delta\Phi(u) = 0$ se glasi: za vsako variacijo δu je

$$\lambda_0 \delta\phi(u) + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \delta\psi_k(u) + \lambda_n \ell(\delta u) = 0.$$

Sedaj se omejimo na variacije, ki zadoščajo pogoju $\ell(\delta u) = 0$ (*dopustne variacije*). Zanje potem velja

$$\lambda_0 \delta\phi(u) + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \delta\psi_k(u) = 0.$$

Linearne pogoje torej lahko obravnavamo brez Lagrangeevih parametrov tako, da omejimo dopustne variacije. To običajno počnemo z (linearnimi) robnimi pogoji.

Naloge

1.3 Izračunaj in nariši *zvezno* verižnico dolžine $l = 10$. Verižnica je pritrjena nesimetrično v točkah $(a, A) = (0, 0)$ in $(b, B) = (6, 3)$.

1.4 Sestavi model visečega mostu, kakršen je na primer most čez Zlata vrata (Golden Gate) v San Franciscu, ZDA. To je 1280 metrov dolg viseči most, ki se pne čez ožino, ki povezuje Tihi ocean z zalivom v San Franciscu.

Nosilna vrv, v resnici sta dve, vendar za model zadošča, da obravnavaš samo eno, je pritrjena na dveh kakšnih 227 metrov visokih nosilnih stebrih, od katerih stoji eden v San Franciscu, drugi pa v Sausalitu, majhnem ribiškem (turističnem) mestecu na severu Zlatih vrat. S te nosilne vrvi so v določenih presledkih, kakih 20 metrov, obešene vrvi, ki nosijo most.

Najprej se je treba odločiti, kje na nosilni vrvi bodo obešene vrvi, ki nosijo most. Med gradnjo moramo že vedeti, kje pritrditi te vrvi, zato se zdi, da je smiselno reči, da so ti vozli na znan način, recimo enakomerno, porazdeljeni vzdolž nosilne vrvi. Ampak posledica bo, da bodo segmenti cestišča, ki visijo na nosilni vrvi, neenakomerno dolgi: tam, kjer je nosilna vrv bolj navpična, to je na začetku in na koncu mostu, bodo razmiki na cestišču brez potrebe manjši.

Zato bomo vozle postavili na nosilno vrv tako, da bodo segmenti cestišča enakomerno dolgi, zato pa vozli na nosilni vrvi ne bodo enakomerno porazdeljeni.

1.5 Analiziraj model žičnice na Krvavcu. V modelu obravnavaj samo tisti del nosilne vrvi med dvema nosilnima stebroma, na katerem visi gondola. Gondola je pritrjena na znani razdalji od spodnjega nosilnega stebra, merjeno vzdolž nosilne vrvi.

1.6 Analiziraj model žičnice na Krvavcu. V modelu obravnavaj samo tisti del nosilne vrvi med dvema nosilnima stebroma, na katerem visi $n = 4$ gondol. Gondole so pritrjene na znanih razdaljah od spodnjega nosilnega stebra, merjeno vzdolž nosilne vrvi.

1.7 Poišči optimalni način vožnje (takšno hitrost $v(t)$) skozi semaforizirano križišče. Pod optimalnim načinom razumemo kar se da gladek način vožnje, z minimalnimi pospeški, seveda pa moramo pripeljati do križišča v zahtevanem času.

1.3 Nihanje paličja

Obravnavali bomo dinamiko paličja, katerega ravnotežje smo si ogledali v razdelku **??**.

Naj bo, glej razdelek **??**, ρ_j gostota palice številka j, $j = 1, 2, \ldots, m$, in naj bodo

$$\zeta_{j,k} \quad = \quad z_{v_{p_j,k}} + \frac{s}{L_j}\left(z_{v_{q_j,k}} - z_{v_{p_j,k}}\right), \quad 0 \leq s \leq L_j,$$

lokalne koordinate na nedeformirani palici številka j,

$$\xi_{j,k} = x_{v_{p_j},k} + \frac{s}{L_j}\left(x_{v_{q_j},k} - x_{v_{p_j},k}\right), \quad 0 \le s \le L_j,$$

pa lokalne koordinate deformacije palice številka j, tako da je kinetična energija palice številka j enaka

$$\begin{aligned}
T_j &= \frac{1}{2}\int_0^{\mu_j}\sum_{k=1}^{d}\dot{\xi}_{j,k}^2\,d\mu \qquad (\mu = \rho_j S_j s)\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{L_j}\sum_{k=1}^{d}\left(\dot{x}_{v_{p_j},k} + \frac{s}{L_j}\left(\dot{x}_{v_{q_j},k} - \dot{x}_{v_{p_j},k}\right)\right)^2 \rho_j S_j\,ds \qquad (s = L_j\sigma)\\
&= \frac{1}{2}\rho_j S_j L_j \int_0^1 \sum_{k=1}^{d}\left(\dot{x}_{v_{p_j},k} + \sigma\left(\dot{x}_{v_{q_j},k} - \dot{x}_{v_{p_j},k}\right)\right)^2 d\sigma \qquad (\mu_j = \rho_j S_j L_j)\\
&= \frac{1}{2}\mu_j \sum_{k=1}^{d}\int_0^1\left(\dot{x}_{v_{p_j},k}^2 + 2\sigma\dot{x}_{v_{p_j},k}\left(\dot{x}_{v_{q_j},k} - \dot{x}_{v_{p_j},k}\right) + \sigma^2\left(\dot{x}_{v_{q_j},k} - \dot{x}_{v_{p_j},k}\right)^2\right) d\sigma\\
&= \frac{1}{2}\mu_j \sum_{k=1}^{d}\left(\dot{x}_{v_{p_j},k}^2 + \dot{x}_{v_{p_j},k}\left(\dot{x}_{v_{q_j},k} - \dot{x}_{v_{p_j},k}\right) + \frac{1}{3}\left(\dot{x}_{v_{q_j},k} - \dot{x}_{v_{p_j},k}\right)^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\mu_j \sum_{k=1}^{d}\left(\frac{1}{3}\dot{x}_{v_{p_j},k}^2 + \frac{1}{3}\dot{x}_{v_{p_j},k}\dot{x}_{v_{q_j},k} + \frac{1}{3}\dot{x}_{v_{q_j},k}^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d}\begin{bmatrix}\dot{x}_{v_{p_j},k}\\ \dot{x}_{v_{q_j},k}\end{bmatrix}^T \frac{\mu_j}{6}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}_{v_{p_j},k}\\ \dot{x}_{v_{q_j},k}\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{2}\dot{x}^T\sum_{k=1}^{d}\begin{bmatrix}e_{v_{p_j},k}^T\\ e_{v_{q_j},k}^T\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}^T\frac{\mu_j}{6}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_{v_{p_j},k}^T\\ e_{v_{q_j},k}^T\end{bmatrix}\dot{x}\\
&= \frac{1}{2}\dot{x}^T\sum_{k=1}^{d}\begin{bmatrix}e_{v_{p_j},k}^T\\ e_{v_{p_j},k}^T + e_{v_{q_j},k}^T\\ e_{v_{q_j},k}^T\end{bmatrix}^T\frac{\mu_j}{6}\begin{bmatrix}e_{v_{p_j},k}^T\\ e_{v_{p_j},k}^T + e_{v_{q_j},k}^T\\ e_{v_{q_j},k}^T\end{bmatrix}\dot{x}\\
&= \frac{1}{2}\dot{x}^T M_j\dot{x},
\end{aligned}$$

kjer je

$$M_j = B_j^T B_j,$$

$$B_j = \sqrt{\frac{\mu_j}{6}} \begin{bmatrix} e_{v_{p_j,1}}^T \\ e_{v_{p_j,1}}^T + e_{v_{q_j,1}}^T \\ e_{v_{q_j,1}}^T \\ \vdots \\ e_{v_{p_j,d}}^T \\ e_{v_{p_j,d}}^T + e_{v_{q_j,d}}^T \\ e_{v_{q_j,d}}^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3d \times N}.$$

Celotna kinetična energija je tako

$$T = \sum_{j=1}^{m} T_j = \frac{1}{2}\dot{x}^T M \dot{x},$$

kjer je

$$M = B^T B \in \mathbb{R}^{N \times N}, \tag{1.5}$$

in

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3dm \times N}.$$

Lagrangeeva funkcija je sedaj, kot vedno v mehaniki,

$$L(x, \dot{x}) = T - U = \frac{1}{2}\dot{x}^T M \dot{x} - \frac{1}{2}x^T K x,$$

kjer sta matriki M in K definirani s (1.5) in (**??**). Euler-Lagrangeeve enačbe nihanja so

$$L_x - \frac{d}{dt}L_{\dot{x}} = 0,$$

ali

$$M\ddot{x} + Kx = 0.$$

Če upoštevamo, kako sta zgrajeni matriki M in K, sledi

$$B^T B \ddot{x} + (DA)^T (DA) x = 0. \tag{1.6}$$

Z množenjem $B^T B$ in $(DA)^T(DA)$ je bolje, da ne hitimo, saj se bo najbrž kaj pokrajšalo.

Ker sta matriki zapisani v razstavljeni obliki, se nam ponuja *generalizirani singularni razcep*

$$\begin{aligned} B &= UCX^T, \\ DA &= VSX^T, \end{aligned}$$

kjer imata matriki U in V ortonormirane stolpce, kjer sta $C = \operatorname{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_N)$ in $S = \operatorname{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_N)$ diagonalni matriki,

$$C^2 + S^2 = I$$

ter $X \in \mathbb{R}^{N \times N}$ nesingularna matrika. Te razcepe vstavimo v diferencialno enačbo (1.6) in dobimo

$$XCU^TUCX^T\ddot{x} + XSV^TVSX^Tx = 0,$$

ali

$$C^2\ddot{y} + S^2 y = 0,$$

kjer je $y = X^Tx$. Ta sistem diferencialnih enačb za $y = \begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \ldots & \eta_N \end{bmatrix}^T$ razpade v N skalarnih diferencialnih enačb

$$\gamma_l^2\ddot{\eta}_l + \sigma_l^2\eta_l = 0, \quad l = 1, 2, \ldots, N$$

z rešitvami

$$\eta_l(t) = a_l \cos\frac{\sigma_l}{\gamma_l}t + b_l \sin\frac{\sigma_l}{\gamma_l}t, \; l = 1, 2, \ldots, N,$$

kjer so a_l in b_l konstante, ki jih je treba določiti iz začetnih pogojev.

Lastna nihanja s kotno frekvenco $\omega_l = \frac{\sigma_l}{\gamma_l}$ so podana z

$$y_l(t) = (a_l \cos\omega_l t + b_l \sin\omega_l t)\, e_l,$$

kjer so a_l in b_l poljubne konstante, s katerimi so določene amplitude in faze lastnih nihanj. Za spremenljivke x potem dobimo

$$\begin{aligned} x_l(t) &= (a_l \cos\omega_l t + b_l \sin\omega_l t)\, X^{-T}e_l \\ &= (a_l \cos\omega_l t + b_l \sin\omega_l t)\, u_l, \end{aligned}$$

kjer je $u_l = X^{-T}e_l$ l-ti stolpec matrike X^{-T}.

Tako kot je rešitev zapisana, bo nekaj lastnih frekvenc ω_l enakih nič, ker ima matrika A in z njo matrika DA rang $r = m < N$.

Paličje smo pozabili pritrditi. Spet vpeljemo podpore tako, da pritrdimo p koordinat. Kot v razdelku **??** vpeljemo reduktor $R : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^{N-p}$. Vse matrike reduciramo:

$$\begin{aligned} A_0 &= AR^T, \\ B_0 &= BR^T, \\ x_0 &= Rx \end{aligned}$$

ter rešujemo sistem diferencialnih enačb

$$B_0^T B_0 \ddot{x}_0 + (DA_0)^T (DA_0)\, x_0 = 0,$$

torej moramo napraviti generalizirani singularni razcep

$$\begin{aligned} B_0 &= U_0 C_0 X_0^T, \\ DA_0 &= V_0 S_0 X_0^T, \end{aligned}$$

kjer imata matriki U_0 in V_0 ortonormirane stolpce, kjer sta C_0 in S_0 diagonalni matriki in $X_0 \in \mathbb{R}^{(N-p)\times(N-p)}$ nesingularna matrika. Nadaljevanje je isto kot prej, le da dobimo za l-to lastno frekvenco ω_l lastno funkcijo

$$\begin{aligned} x_l(t) &= (a_l \cos \omega_l t + b_l \sin \omega_l t)\, R^T X_0^{-T} e_l \\ &= (a_l \cos \omega_l t + b_l \sin \omega_l t)\, u_l, \end{aligned}$$

kjer je $u_l = R^T X_0^{-T} e_l$ l-ta vrstica matrike $X_0^{-1} R$.

Naloge

1.8 Izračunaj lastne frekvence paličja, prikazanega na sliki **??**. Geometrijske podatke lahko razbereš s slike, vse palice pa imajo isto gostoto, so enako toge in enako debele s podatki $\rho_j = E_j = S_j = 1$.

1.9 Izračunaj lastne frekvence paličja, prikazanega na sliki **??**. Geometrijske podatke lahko razbereš s slike, vse palice pa imajo isto gostoto, so enako toge in enako debele s podatki $\rho_j = E_j = S_j = 1$.

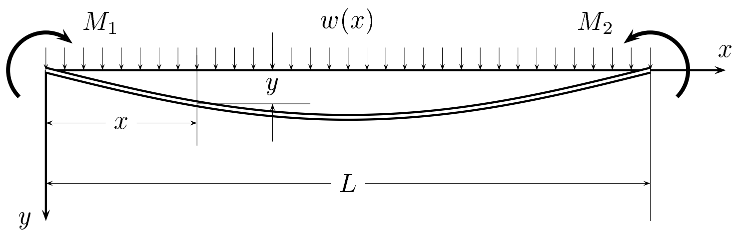
1.4 Rotirajoča os

V tem razdelku bomo modelirali "poskakovanje" rotirajoče osi zaradi *vztrajnikov*, ki so nataknjeni na os. Vsi vemo, da takšna os začne pri določeni *kritični* (kotni) hitrosti neprijetno poskakovati. Če hitrost nekoliko povečamo, to poskakovanje izgine, dokler se pri še večji hitrosti spet ne pojavi. Zdi se, da takšne osi enostavno ne smemo vrteti s kritično hitrostjo.

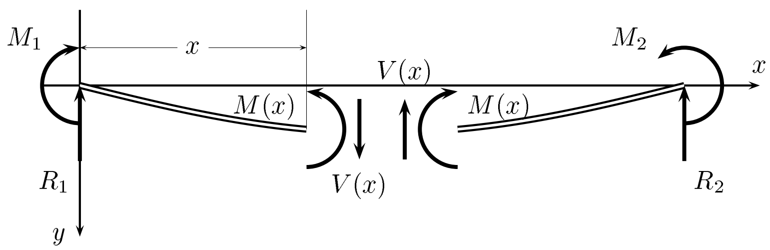
Pri načrtovanju takšne osi je pametno vnaprej izračunati kritične hitrosti in planirati os skupaj z obremenitvami tako, da v bližini delovne hitrosti ne bo nobene kritične hitrosti.

1.4.1 Upogib enostavnega nosilca

Kot preprostejšo nalogo si najprej oglejmo upogib *enostavnega homogenega nosilca*. Koordinato x, glej sliko 1.1, merimo od levega konca nosilca, odmik y je pozitiven navzdol. Nosilec je obtežen s silo $w(x)$ na enoto dolžine, na koncéh lahko še uporabimo navora M_1 in M_2. Pozitivna obtežba ali pozitivni navor upogneta nosilec tako, da je konkavna stran obrnjena navzgor, slika 1.1. Če si mislimo nosilec prerezan v poljubni točki x, tedaj so potrebne strižne sile in navori, ki držijo nosilec v ravnotežju, prikazani na sliki 1.2, kjer so vse narisane strižne sile in momenti pozitivni.



Slika 1.1: Koordinatni sistem enostavnega nosilca



Slika 1.2: Strižne sile in navori nosilca

Pri čistem upogibu se zgornja vlakna nosilca stisnejo, spodnja pa nategnejo. Os skozi nosilec, kjer ni nobenih deformacij, se imenuje *nevtralna os*. Vzemimo presek v ravnini, vzporedni z ravnino yz, kjer tvorijo xyz desni koordinatni sistem z izhodiščem v težišču preseka. Če sta osi y in z tudi simetrijski osi, tako da sta produktna vztrajnostna momenta enaka nič, in če je nosilec obremenjen v ravnini xy, tedaj se nevtralna os ujema z osjo x.

Enačba za upogib nosilca (pri majhnih upogibih) je, glej [**?**],

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -M, \tag{1.7}$$

kjer je M navor nosilca, I vztrajnostni moment preseka okrog osi z in E Youngov modul. Drugi dve koristni enačbi sta

$$\frac{dM}{dx} = V, \tag{1.8}$$

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -w, \tag{1.9}$$

kjer je w vertikalna obtežba na enoto dolžine nosilca. Tako dobimo enačbi

$$\frac{d}{dx}\left(EI\frac{d^2y}{dx^2}\right) = -V \tag{1.10}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2y}{dx^2}\right) = w. \tag{1.11}$$

Če se nosilec (os) vrti s kotno hitrostjo ω, je obtežba w gostota centrifugalne sile (težo zanemarimo) in dobimo enačbo

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2y}{dx^2}\right) = S\rho\omega^2 y, \tag{1.12}$$

kjer je ρ gostota, S ploščina preseka in ω iskana kritična kotna hitrost. Enačba za upogib rotirajočega enostavnega nosilca (osi) je tako 1.12. K enačbi spadajo še štirje robni pogoji, po dva na vsaki strani osi. Predpišemo lahko na primer:

- $y = 0$: os se ne more odmakniti,
- $\frac{dy}{dx} = 0$: os se ne more nagniti,
- $EI\frac{d^2y}{dx^2} = 0$: navor je nič,
- $\frac{d}{dx}\left(EI\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$: strižna sila je nič.

Te robne pogoje navadno predpisujemo v parih, na primer:

- togo vpeta os: $y = \frac{dy}{dx} = 0$,
- vrtljivo vpeta (podprta) os: $y = EI\frac{d^2y}{dx^2} = 0$,
- prosta os: $EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(EI\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$.

1.4.2 Enačba gibanja polnega modela

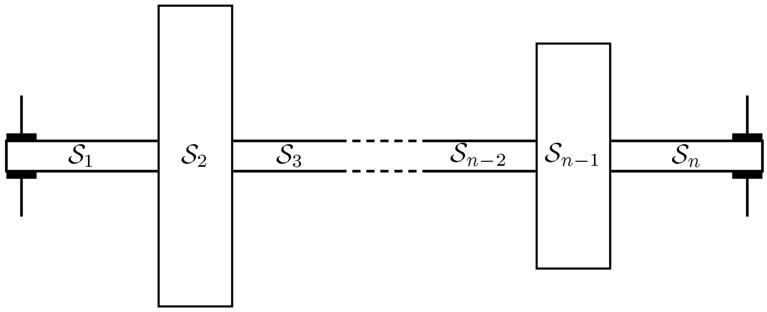
Resnejši primer je os, ki jo tolmačimo, kot da je sestavljena iz enostavnih segmentov $\mathcal{S}_k,\ k = 1, 2, \ldots, n$, slika 1.3.

Os naj se razteza od $x = x_0$ do $x = x_n$, kjer je $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. Na vsakem segmentu $\mathcal{S}_k$, ki sega od x_{k-1} do x_k in ima dolžino

$$L_k := x_k - x_{k-1}, \tag{1.13}$$

velja enačba (1.12)

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(E_kI_k\frac{d^2y}{dx^2}\right) = S_k\rho_k\omega^2 y, \quad x_{k-1} < x < x_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.14}$$



Slika 1.3: Splošna os

kjer so E_k, I_k, S_k in ρ_k (konstantni) Youngov modul, vztrajnostni moment, ploščina preseka in gostota segmenta $\mathcal{S}_k$. Enačbe (1.14) lahko poenostavimo v

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \alpha_k^4 \beta^4 y, \quad x_{k-1} < x < x_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.15}$$

kjer je

$$\alpha_k = \sqrt[4]{\frac{S_k \rho_k}{E_k I_k}}, \tag{1.16}$$

$$\beta = \sqrt{\omega}. \tag{1.17}$$

Enačbe (1.15) na vsakem segmentu $\mathcal{S}_k$ poenostavimo še naprej z novo *neodvisno* spremenljivko ξ

$$x = x_{k-1} + \frac{\xi}{\alpha_k \beta}, \quad x_{k-1} < x < x_k, \tag{1.18}$$

$$y(x) = v_k(\xi), \quad x_{k-1} < x < x_k \tag{1.19}$$

in dobimo sistem diferencialnih enačb

$$\frac{d^4 v_k(\xi)}{d\xi^4} = v_k(\xi), \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

ki ima splošno rešitev

$$\begin{aligned} v_k(\xi) &= C_{1k}\frac{\cosh\xi + \cos\xi}{2} + C_{2k}\frac{\sinh\xi + \sin\xi}{2} \\ &+ C_{3k}\frac{\cosh\xi - \cos\xi}{2} + C_{4k}\frac{\sinh\xi - \sin\xi}{2}, \\ &\quad 0 < \xi < \alpha_k \beta L_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \end{aligned}$$

kjer so C_{1k}, C_{2k}, C_{3k} in C_{4k} poljubne konstante, ali

$$\boldsymbol{u}_k(\xi) = \boldsymbol{U}(\xi)\boldsymbol{C}_k, \tag{1.20}$$

kjer je

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{C}_k &= \begin{bmatrix} C_{1k} \\ C_{2k} \\ C_{3k} \\ C_{4k} \end{bmatrix}, \\
\boldsymbol{u}_k(\xi) &= \begin{bmatrix} v_k(\xi) \\ \dot{v}_k(\xi) \\ \ddot{v}_k(\xi) \\ \dddot{v}_k(\xi) \end{bmatrix}, \qquad \text{kjer pika označuje odvajanje na } \xi \text{ in je} \\
\boldsymbol{U}(\xi) &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \cosh\xi+\cos\xi & \sinh\xi+\sin\xi & \cosh\xi-\cos\xi & \sinh\xi-\sin\xi \\ \sinh\xi-\sin\xi & \cosh\xi+\cos\xi & \sinh\xi+\sin\xi & \cosh\xi-\cos\xi \\ \cosh\xi-\cos\xi & \sinh\xi-\sin\xi & \cosh\xi+\cos\xi & \sinh\xi+\sin\xi \\ \sinh\xi+\sin\xi & \cosh\xi-\cos\xi & \sinh\xi-\sin\xi & \cosh\xi+\cos\xi \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Ker so odmik y, naklon y', navor $-EIy''$ in strižna sila $-EIy'''$ zvezne funkcije, mora za vrednosti $k = 1, 2, \ldots, n-1$ veljati

$$\begin{aligned}
y\,(x_k - 0) &= y\,(x_k + 0)\,, \\
y'\,(x_k - 0) &= y'\,(x_k + 0)\,, \\
-E_k I_k y''\,(x_k - 0) &= -E_{k+1} I_{k+1} y''\,(x_k + 0)\,, \\
-E_k I_k y'''\,(x_k - 0) &= -E_{k+1} I_{k+1} y'''\,(x_k + 0)\,,
\end{aligned}$$

ali izraženo s funkcijami v_k

$$\begin{aligned}
v_k\,(\alpha_k \beta L_k) &= v_{k+1}(0), \\
\alpha_k \beta \dot{v}_k\,(\alpha_k \beta L_k) &= \alpha_{k+1} \beta \dot{v}_{k+1}(0), \\
-E_k I_k \alpha_k^2 \beta^2 \ddot{v}_k\,(\alpha_k \beta L_k) &= -E_{k+1} I_{k+1} \alpha_{k+1}^2 \beta^2 \ddot{v}_{k+1}(0), \\
-E_k I_k \alpha_k^3 \beta^3 \dddot{v}_k\,(\alpha_k \beta L_k) &= -E_{k+1} I_{k+1} \alpha_{k+1}^3 \beta^3 \dddot{v}_{k+1}(0).
\end{aligned}$$

Če označimo

$$\boldsymbol{D}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_k \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E_k I_k \alpha_k^2 \beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_k I_k \alpha_k^3 \beta^3 \end{bmatrix},$$

dobimo pogoje zveznosti v matrični obliki

$$\boldsymbol{D}_k \boldsymbol{u}_k\,(\alpha_k \beta L_k) = \boldsymbol{D}_{k+1} \boldsymbol{u}_{k+1}(0)$$

in iz (1.20) še

$$\boldsymbol{D}_k \boldsymbol{U}\,(\alpha_k \beta L_k)\,\boldsymbol{C}_k = \boldsymbol{D}_{k+1} \boldsymbol{U}(0) \boldsymbol{C}_{k+1}.$$

Ker je $\boldsymbol{U}(0) = \boldsymbol{I}$, sledi

$$\boldsymbol{C}_{k+1} = \boldsymbol{D}_{k+1}^{-1} \boldsymbol{D}_k \boldsymbol{U}\,(\alpha_k \beta L_k)\,\boldsymbol{C}_k.$$

Sedaj velja

$$\boldsymbol{C}_n = \boldsymbol{D}_n^{-1}\boldsymbol{D}_{n-1}\boldsymbol{U}\left(\alpha_{n-1}\beta L_{n-1}\right)\cdots\boldsymbol{D}_2^{-1}\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{U}\left(\alpha_1\beta L_1\right)\boldsymbol{C}_1.$$

Iz enačbe (1.20) sedaj dobimo še

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{u}_n\left(\alpha_n\beta L_n\right) \qquad (1.21)\\ &= \boldsymbol{U}\left(\alpha_n\beta L_n\right)\boldsymbol{D}_n^{-1}\boldsymbol{D}_{n-1}\boldsymbol{U}\left(\alpha_{n-1}\beta L_{n-1}\right)\cdots\boldsymbol{D}_2^{-1}\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{U}\left(\alpha_1\beta L_1\right)\boldsymbol{u}_1(0).\end{aligned}$$

K rotirajoči osi spadajo še štirje homogeni linearni robni pogoji. Le-ti naj imajo obliko

$$\begin{aligned}&g_{j,1}y\left(x_0\right)+g_{j,2}y'\left(x_0\right)+g_{j,3}M\left(x_0\right)+g_{j,4}V\left(x_0\right)\\ +\;&g_{j,5}y\left(x_n\right)+g_{j,6}y'\left(x_n\right)+g_{j,7}M\left(x_n\right)+g_{j,8}V\left(x_n\right)\\ =\;&0,\quad j=1,2,3,4,\end{aligned}$$

kjer so $g_{j,i}$ dane konstante, ki jih zložimo v matriko $\boldsymbol{G}\in\mathbb{R}^{4\times 8}$, $M(x)$ navor (1.7) v točki x in $V(x)$ strižna sila (1.8) v točki x. Substitucija (1.18–1.19) nam da

$$\begin{aligned}&g_{j,1}v_1(0)+g_{j,2}\alpha_1\beta\dot{v}_1(0)-g_{j,3}E_1I_1\alpha_1^2\beta^2\ddot{v}_1(0)-g_{j,4}E_1I_1\alpha_1^3\beta^3\dddot{v}_1(0)\\ +\;&g_{j,5}v_n\left(\alpha_n\beta L_n\right)+g_{j,6}\alpha_n\beta\dot{v}_n\left(\alpha_n\beta L_n\right)\\ -\;&g_{j,7}E_nI_n\alpha_n^2\beta^2\ddot{v}_n\left(\alpha_n\beta L_n\right)-g_{j,8}E_nI_n\alpha_n^3\beta^3\dddot{v}_n\left(\alpha_n\beta L_n\right)\\ =\;&0,\quad j=1,2,3,4,\end{aligned}$$

ali

$$\boldsymbol{G}\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{u}_1(0)\\ \boldsymbol{D}_n\boldsymbol{u}_n\left(\alpha_n\beta L_n\right)\end{bmatrix} = \boldsymbol{0},$$

ali po enačbi (1.21)

$$\boldsymbol{G}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{W}\end{bmatrix}\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{u}_1(0) = \boldsymbol{0},$$

kjer je

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{D}_n\boldsymbol{U}\left(\alpha_n\beta L_n\right)\boldsymbol{D}_n^{-1}\;\boldsymbol{D}_{n-1}\boldsymbol{U}\left(\alpha_{n-1}\beta L_{n-1}\right)\boldsymbol{D}_{n-1}^{-1}\cdots\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{U}\left(\alpha_1\beta L_1\right)\boldsymbol{D}_1^{-1}.$$

Če pišemo $\boldsymbol{D}_k=\boldsymbol{B}\boldsymbol{\Delta}_k$, kjer je

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Delta}_k &= \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&\alpha_k&0&0\\0&0&-E_kI_k\alpha_k^2&0\\0&0&0&-E_kI_k\alpha_k^3\end{bmatrix},\\ \boldsymbol{B} &= \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&\beta&0&0\\0&0&\beta^2&0\\0&0&0&\beta^3\end{bmatrix}\end{aligned}$$

in

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{B}^{-1},$$

kjer je

$$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{\Delta}_n \boldsymbol{U}(\alpha_n \beta L_n)\, \boldsymbol{\Delta}_n^{-1}\ \boldsymbol{\Delta}_{n-1} \boldsymbol{U}(\alpha_{n-1}\beta L_{n-1})\, \boldsymbol{\Delta}_{n-1}^{-1} \cdots \boldsymbol{\Delta}_1 \boldsymbol{U}(\alpha_1 \beta L_1)\, \boldsymbol{\Delta}_1^{-1},$$

dobimo pogoj

$$\boldsymbol{G}\begin{bmatrix} \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{Z} \end{bmatrix} \boldsymbol{\Delta}_1 \boldsymbol{u}_1(0) = 0.$$

To je homogen sistem štirih linearnih enačb za štiri neznanke $\boldsymbol{\Delta}_1 \boldsymbol{u}_1(0)$, ki mora imeti netrivialno rešitev, torej mora biti

$$\det\left(\boldsymbol{G}\begin{bmatrix} \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{Z} \end{bmatrix}\right) = 0.$$

To je algebraična enačba za β, od koder izračunamo potem še $\omega = \beta^2$.

Naloge

1.10 Izračunaj kritične rotacijske hitrosti osi, ki je na obeh straneh vrtljivo vpeta.

1.11 Napiši `Matlab` program, ki bo izračunal kritične frekvence rotirajoče osi. Ali lahko rotirajoča os vsebuje toge vztrajnike?

1.5 Oblika rotirajoče vrvi

Mlahava vrv[1] dolžine L je pritrjena v dveh točkah, razmaknjenih za H, na navpično os, ki se vrti s kotno hitrostjo ω.

Oglejmo si najprej mnogo enostavnejši problem ravnotežne oblike rotirajoče mase, obešene na tanki nitki, glej sliko 1.4. Potencialna energija je sestavljena iz dveh členov

$$W = W_{rot} + W_{grav}.$$

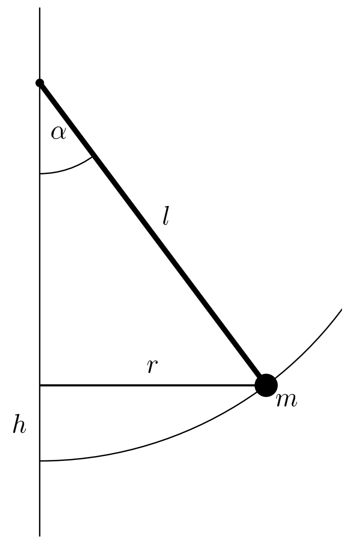
V tem primeru je rotacijska energija enaka

$$W_{rot} = -\frac{1}{2} m r^2 \omega^2$$

in gravitacijska energija

$$W_{grav} = mgh.$$

[1]Problem je sposojen pri A. Kodretu.



Slika 1.4: Rotirajoča masa na tanki nitki

Skupna energija, ki jo moramo minimizirati, izražena s kotom α, je

$$W(\alpha) \quad = \quad mgl\,(1-\cos\alpha) - \frac{1}{2}ml^2\omega^2\sin^2\alpha,$$

zato mora biti

$$W'(\alpha) \quad = \quad mgl\sin\alpha - ml^2\omega^2\sin\alpha\cos\alpha \;=\; 0,$$

ali

$$ml^2\omega^2\sin\alpha\left(\frac{g}{l\omega^2} - \cos\alpha\right) \quad = \quad 0.$$

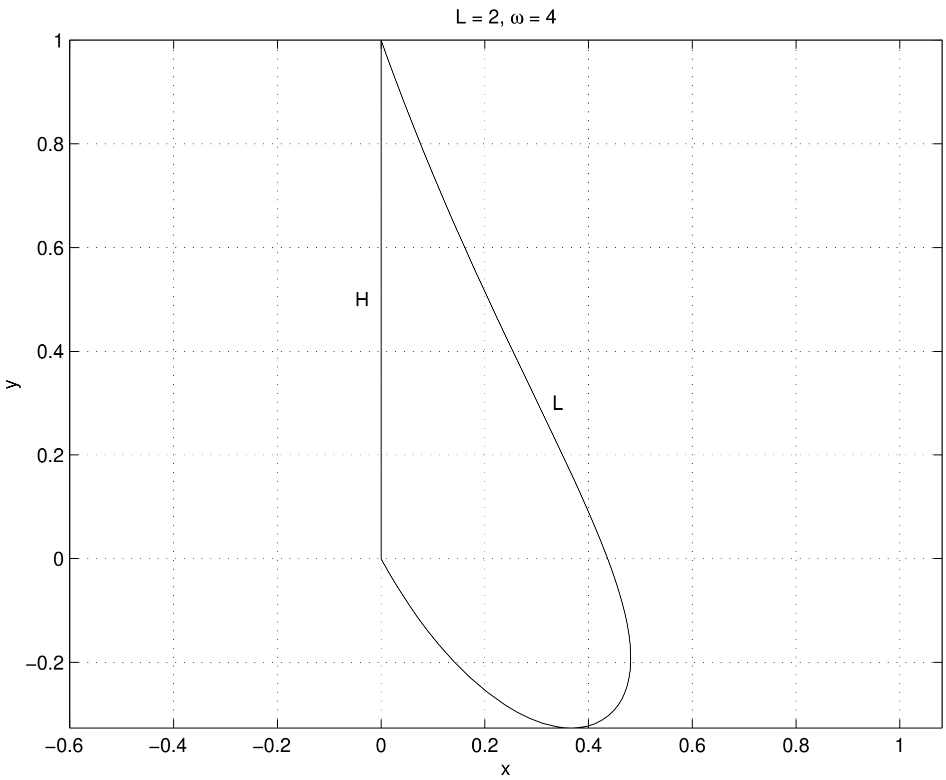
Ta enačba ima vsekakor (nezanimivo) rešitev $\alpha = 0$ ali $\alpha = \pi$, v primeru $\frac{g}{l\omega^2} \leq 1$ pa še tisto, ki nas res zanima: $\alpha = \arccos\frac{g}{l\omega^2}$.

Za pravi problem predpostavimo, da ima vrv linearno gostoto ρ, pospešek prostega pada je g. Izračunati je treba obliko mlahave vrvi (slika 1.5) s podatki

$$\left[\begin{array}{cccc} L & H & \omega & g \end{array}\right].$$

Nalogo postavimo v vrteč koordinatni sistem, ki se vrti s kotno hitrostje ω. V vrtečem koordinatnem sistemu vrv miruje in zavzame takšno obliko, da je potencialna energija minimalna. Tudi v primeru rotirajoče vrvi je potencialna energija sestavljena iz dveh členov

$$W \quad = \quad W_{rot} + W_{grav},$$



Slika 1.5: Oblika rotirajoče vrvi

kjer je sedaj

$$W_{rot} = -\frac{1}{2}\int_0^L \rho\omega^2 x^2(s)\, ds$$

rotacijska energija,

$$W_{grav} = \int_0^L \rho g y(s)\, ds$$

gravitacijska energija in ds diferencial ločne dolžine. Minimizirati je torej treba funkcional

$$\Phi(x,y) = \int_0^L \left(-\frac{1}{2}\rho\omega^2 x^2(s) + \rho g y(s)\right) ds \tag{1.22}$$

pri geometrijskih pogojih

$$
\begin{aligned}
x(0) &= 0, &(1.23)\\
y(0) &= 0, &(1.24)\\
x(L) &= 0, &(1.25)\\
y(L) &= H, &(1.26)
\end{aligned}
$$

in pri pogoju, da je parameter s ločna dolžina

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1. \tag{1.27}$$

Naloga (1.22–1.27) je variacijska naloga, ki nosi ime po Lagrangeu, glej [?, razdelek 4.14]. Tam preberemo napotek, da moramo poiskati nevezan ekstrem novega funkcionala

$$\Psi(x, y, F) = \int_0^L \mathcal{L}\left(x, y, F, x', y'\right) ds$$

pri pogojih (1.23–1.26), kjer je

$$\mathcal{L}\left(x, y, F, x', y'\right) = \frac{1}{2}F(s)\left(\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 - 1\right) - \frac{1}{2}\rho\omega^2 x^2(s) + \rho g y(s).$$

Euler-Lagrangeeve enačbe tega problema so ravnotežne enačbe

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{ds}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'} &= 0,\\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{d}{ds}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} &= 0,\\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F} &= 0,
\end{aligned}
$$

ali

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\left(F\frac{dx}{ds}\right) + \rho\omega^2 x(s) &= 0, &(1.28)\\
\frac{d}{ds}\left(F\frac{dy}{ds}\right) - \rho g &= 0, &(1.29)\\
\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 &= 1. &(1.30)
\end{aligned}
$$

Da bomo lahko uporabljali standardne numerične metode, moramo sistem enačb (1.28–1.30) predelati v sistem diferencialnih enačb prvega reda.

Enačba (1.30) bo izpolnjena, če pišemo

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{ds} &= \cos\alpha, &(1.31)\\
\frac{dy}{ds} &= \sin\alpha. &(1.32)
\end{aligned}
$$

Sedaj nam preostane sistem

$$\frac{d}{ds}(F\cos\alpha) + \rho\omega^2 x = 0, \tag{1.33}$$

$$\frac{d}{ds}(F\sin\alpha) - \rho g = 0. \tag{1.34}$$

Enačbi (1.33–1.34) preuredimo v

$$\begin{aligned} \frac{dF}{ds}\cos\alpha - F\frac{d\alpha}{ds}\sin\alpha + \rho\omega^2 x &= 0, \\ \frac{dF}{ds}\sin\alpha + F\frac{d\alpha}{ds}\cos\alpha - \rho g &= 0, \end{aligned}$$

ali

$$\begin{aligned} \frac{dF}{ds} + \rho\omega^2 x\cos\alpha - \rho g\sin\alpha &= 0, \\ F\frac{d\alpha}{ds} - \rho\omega^2 x\sin\alpha - \rho g\cos\alpha &= 0. \end{aligned}$$

Tako dobimo sistem štirih diferencialnih enačb prvega reda za funkcije F, α, x in y:

$$\frac{dF}{ds} = -\rho\omega^2 x\cos\alpha + \rho g\sin\alpha, \tag{1.35}$$

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\rho\omega^2 x\sin\alpha + \rho g\cos\alpha}{F}, \tag{1.36}$$

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \tag{1.37}$$

$$\frac{dy}{ds} = \sin\alpha \tag{1.38}$$

z robnimi pogoji (1.23–1.26).

Ta sistem diferencialnih enačb bomo še naprej poenostavili z zamenjavami

$$\frac{F}{\rho\omega^2 H^2} =: u_1, \tag{1.39}$$

$$\alpha =: u_2, \tag{1.40}$$

$$\frac{x}{H} =: u_3, \tag{1.41}$$

$$\frac{y}{H} =: u_4, \tag{1.42}$$

$$\frac{s}{H} =: t. \tag{1.43}$$

Če definiramo še

$$\beta := \frac{g}{H\omega^2}, \tag{1.44}$$

sledi sistem

$$\frac{du_1}{dt} = -u_3 \cos u_2 + \beta \sin u_2, \tag{1.45}$$

$$\frac{du_2}{dt} = \frac{u_3 \sin u_2 + \beta \cos u_2}{u_1}, \tag{1.46}$$

$$\frac{du_3}{dt} = \cos u_2, \tag{1.47}$$

$$\frac{du_4}{dt} = \sin u_2 \tag{1.48}$$

z robnimi pogoji

$$u_3(0) = 0, \tag{1.49}$$

$$u_4(0) = 0, \tag{1.50}$$

$$u_3(l) = 0, \tag{1.51}$$

$$u_4(l) = 1, \tag{1.52}$$

kjer je

$$l := \frac{L}{H}. \tag{1.53}$$

Ta robni problem lahko prevedemo na začetnega takole: Izberimo dva manjkajoča začetna pogoja, recimo

$$u_1(0) = \lambda, \tag{1.54}$$

$$u_2(0) = \mu, \tag{1.55}$$

tako da imamo za sistem štiri začetne pogoje

$$u(0) = \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{1.56}$$

Rešitev u je tako postala tudi funkcija spremenljivk λ in μ in lahko zanju zapišemo sistem dveh enačb $G(\lambda, \mu) = 0$, kjer je

$$G(\lambda, \mu) := \begin{bmatrix} u_3(l, \lambda, \mu) \\ u_4(l, \lambda, \mu) - 1 \end{bmatrix}. \tag{1.57}$$

Sistem $G(\lambda, \mu) = 0$ bomo rešili z Newtonovo metodo. V ta namen potrebujemo matriko odvodov

$$J(\lambda, \mu) := \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1(\lambda,\mu)}{\partial \lambda} & \frac{\partial G_1(\lambda,\mu)}{\partial \mu} \\ \frac{\partial G_2(\lambda,\mu)}{\partial \lambda} & \frac{\partial G_2(\lambda,\mu)}{\partial \mu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_3(l,\lambda,\mu)}{\partial \lambda} & \frac{\partial u_3(l,\lambda,\mu)}{\partial \mu} \\ \frac{\partial u_4(l,\lambda,\mu)}{\partial \lambda} & \frac{\partial u_4(l,\lambda,\mu)}{\partial \mu} \end{bmatrix}. \tag{1.58}$$

Označimo

$$u_{k+4} \quad := \quad \frac{\partial u_k}{\partial \lambda}, \quad k = 1, 2, 3, 4 \tag{1.59}$$

in

$$u_{k+8} \quad := \quad \frac{\partial u_k}{\partial \mu}, \quad k = 1, 2, 3, 4 \tag{1.60}$$

in dobimo za Jakobijan

$$J(\lambda, \mu) \quad = \quad \begin{bmatrix} u_7(l) & u_{11}(l) \\ u_8(l) & u_{12}(l) \end{bmatrix}. \tag{1.61}$$

Da bi $J(\lambda, \mu)$ lahko izračunali, moramo razširiti naš sistem na 12 diferencialnih enačb tako, da odvajamo naše štiri enačbe (1.45–1.48) na λ in μ in upoštevamo definicije (1.59–1.60):

$$\begin{aligned}
\frac{du_5(t)}{dt} &= -\left(u_7 \cos u_2 - u_3 u_6 \sin u_2\right) + \beta u_6 \cos u_2, && (1.62)\\
\frac{du_6(t)}{dt} &= \frac{\left(u_7 \sin u_2 + u_3 u_6 \cos u_2\right) - \beta u_6 \sin u_2}{u_1} \\
&- \frac{u_5 \left(u_3 \sin u_2 + \beta \cos u_2\right)}{u_1^2}, && (1.63)\\
\frac{du_7(t)}{dt} &= -u_6 \sin u_2, && (1.64)\\
\frac{du_8(t)}{dt} &= u_6 \cos u_2, && (1.65)\\
\frac{du_9(t)}{dt} &= -\left(u_{11} \cos u_2 - u_3 u_{10} \sin u_2\right) + \beta u_{10} \cos u_2, && (1.66)\\
\frac{du_{10}(t)}{dt} &= \frac{\left(u_{11} \sin u_2 + u_3 u_{10} \cos u_2\right) - \beta u_{10} \sin u_2}{u_1} \\
&- \frac{u_9 \left(u_3 \sin u_2 + \beta \cos u_2\right)}{u_1^2}, && (1.67)\\
\frac{du_{11}(t)}{dt} &= -u_{10} \sin u_2, && (1.68)\\
\frac{du_{12}(t)}{dt} &= u_{10} \cos u_2, && (1.69)
\end{aligned}$$

kjer dobimo dodatne začetne pogoje spet z odvajanjem

$$u(0) = \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{1.70}$$

To nam omogoči, da izračunamo $u(l)$, nato pa razrešimo sistem

$$J(\lambda,\mu)\begin{bmatrix} \delta\lambda \\ \delta\mu \end{bmatrix} = G(\lambda,\mu), \tag{1.71}$$

od koder sledi boljši? približek

$$\begin{bmatrix} \tilde{\lambda} \\ \tilde{\mu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \delta\lambda \\ \delta\mu \end{bmatrix}. \tag{1.72}$$

Netrivialno vprašanje je, kako dobiti dober začetni približek. Zdi se, da je najboljši način *metoda zveznega nadaljevanja.* Problem, ki ga moramo rešiti, vgradimo v enoparametrično družino problemov, recimo s parametrom τ, ki ima lastnost, da je problem pri $\tau = 1$ ravno problem, ki ga želimo rešiti, pri $\tau = 0$ pa je to podoben problem, ki ga znamo rešiti. Če sedaj τ po malem povečujemo, imamo pri novem τ problem, ki je podoben problemu pri starem τ, zato lahko vzamemo rešitev pri starem τ za začetni približek problema pri novem τ.

Sedaj preostane še vprašanje, kako sestaviti takšno enoparametrično družino problemov, pri kateri res poznamo rešitev pri $\tau = 0$.

Izmislimo si, kar se da realistično, vrednosti $\lambda = u_1(0)$ in $\mu = u_2(0)$ in numerično integrirajmo naš sistem do $t = l$. Pri takih začetnih pogojih dobimo pri $t = l$ vrednosti recimo $\xi := u_3(l)$ in $\eta := u_4(l)$.

Sedaj je trivialno res, da znamo rešiti problem, ki smo ga pravkar rešili:

$$u_3(0) = 0, \tag{1.73}$$
$$u_4(0) = 0, \tag{1.74}$$
$$u_3(l) = \xi, \tag{1.75}$$
$$u_4(l) = \eta, \tag{1.76}$$

prav tako pa lahko trivialno napišemo enoparametrično družino problemov, ki ima pri $\tau = 0$ znano rešitev, pri $\tau = 1$ pa je to naš problem. Ta družina problemov je isti sistem diferencialnih enačb, le robni pogoji so odvisni od parametra τ. Za splošen $0 \leq \tau \leq 1$ zahtevamo

$$
\begin{aligned}
u_3(0) &= 0, && (1.77)\\
u_4(0) &= 0, && (1.78)\\
u_3(l) &= (1-\tau)\xi, && (1.79)\\
u_4(l) &= \tau + (1-\tau)\eta. && (1.80)
\end{aligned}
$$

Uspešnost takega reševanja je odvisna od razumne začetne izbire λ in μ. Če imamo nesrečno roko, se kaj lahko zgodi:

- da se vrv zavozla,
- da `Matlab` kakšnega začetnega problema ne zna rešiti,
- da je Jacobijeva matrika (skoraj) singularna.

V vseh takšnih primerih moramo pač izbrati drugačen začetni par λ in μ.

Pri metodi zveznega nadaljevanja sestavimo sistem diferencialnih enačb za trajektorijo

$$
\begin{aligned}
\tau &\longmapsto \lambda,\\
\tau &\longmapsto \mu,
\end{aligned}
$$

ki ga potem rešimo na primer z metodami podrazdelka **??** ali pa s Fehlbergovo [**?**] metodo ali z njenimi sorodniki [**?**].

Naloge

1.12 Napiši Matlab program, ki bo izračunal in narisal obliko mlahave vrvi pri primernih podatkih.

Nasvet. Za reševanje robnega problema (1.45–1.53) uporabi metodo `bvp4c` (glej podrazdelek **??**).

1.13 Nalogo 1.12 reši tako, z Matlabom rešiš sistem enačb $G(\lambda, \mu) = 0$, kjer je funkcija G podana z enačbo (1.57).

1.14 Nalogo 1.12 reši z redukcijo na začetni problem in s (poenostavljeno) metodo zveznega nadaljevanja.

1.15 Nalogo 1.12 reši z redukcijo na začetni problem in z metodo zveznega nadaljevanja.

1.16 Analitično izračunaj obliko rotirajoče vrvi, če težnost lahko zanemariš, in primerjaj rezultate s tistimi, ki jih za takšen primer da rešitev naloge 1.12, 1.13, 1.14 ali 1.15.