Velikokrat rešujemo začetni problem za sistem navadnih diferencialnih enačb prvega reda:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= f_1(t, y_1, \ldots, y_n) \\ y_2'(t) &= f_2(t, y_1, \ldots, y_n) \\ &\ldots \\ y_n'(t) &= f_n(t, y_1, \ldots, y_n) \end{aligned}$$

z začetnim pogojem

$$\begin{aligned} y_1(t_0) &= y_1 \\ y_2(t_0) &= y_2 \\ \ldots \\ y_n(t_0) &= y_n \end{aligned}$$

Numerične metode, ki jih uporabimo za reševanje sistemov, so praktično enake kot za eno samo enačbo. Paziti moramo le, da namesto skalarjev uporabljamo vektorske količine. Poglejmo si, kako metodo Runge-Kutta reda 2 priredimo za sisteme enačb. Na intervalu, na katerem želimo poiskati rešitev, izberemo delilne točke

$$t_0, t_1 = t_0 + h, t_2 = t_1 + h, \ldots, t_n = t_{n-1} + h, \quad h = \frac{t_0 - t_n}{n}$$

ki so razporejene enakomerno. Približke za vrednosti rešitve $\mathbf{y}_k = \mathbf{y}(t_k)$ v delilnih točkah izračunamo z zaporedjem

$$\begin{aligned} \mathbf{k_1} &= h\mathbf{f}(t_k, \mathbf{y}_k) \\ \mathbf{k_2} &= h\mathbf{f}(t_k + h, \mathbf{y}_k + \mathbf{k_1}) \\ \mathbf{y}_{k+1} &= \mathbf{y}_k + (\mathbf{k_1} + \mathbf{k_2})/2 \end{aligned}$$

kjer so $\mathbf{y}_k, \mathbf{k_1}$ in $\mathbf{k_2}$ vektorji v $\mathbb{R}^n$ s komponentami $(y_1(t_k), y_2(t_k), \ldots, y_n(t_k))$, funkcija $\mathbf{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ pa vektorska funkcija sestavljena iz desnih strani enačb

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) = (f_1(t, y_1, \ldots, y_n), \ldots, f_n(t, y_1, \ldots, y_n)).$$

Primer: Internet zadnja leta pestijo različne oblike zlonamerne kode. Poleg spama in poštnih virusov, so bili zadnja leta najbolj uspešni črvi, ki izkoriščajo varnostne luknje v slabo napisanih strežniških programih. Največ jih je izkoriščalo dobro znane luknje v M$ IIS(Internet Information Server). Med njimi je bil tudi **Code Red**, ki je prvič pokazal zobe Julija 2001. Več o tem si lahko ogledate na `http://www.caida.org`. V današnji vaji bomo poskušali modelirati širjenje črva. Uporabili bomo epidemološki model, ki ga uporabiljajo predvsem za preučevanje širjenja nalezljivih bolezni pri človeku in živalih.

V vsakem trenutku t naj bo

- $D(t)$ število dojemljivih računalnikov
- $I(t)$ število inficiranih računalnikov
- $Z(t)$ število "ozdravljenih" računalnikov
- $C(t)$ število "cepljenih" računalnikov (z varnostnimi popravki)

C. C. Zou in sodelavci so predlagali naslednji model za opis dinamike okužbe.

$$\begin{aligned} I'(t) &= \beta(t)D(t)I(t) - \gamma I(t) \\ J'(t) &= \beta S(t)I(t) \\ C'(t) &= \mu S(t)J(t), \end{aligned} \tag{1}$$

kjer je

$$\beta(t) \quad = \beta_0(1 - I(t)/N)^\eta$$

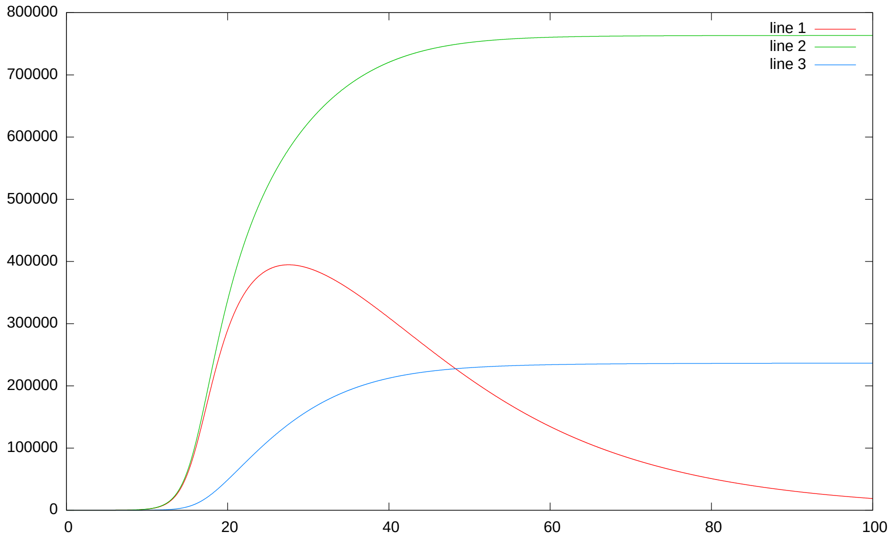
hitrost okužbe. Za lažje računanje smo vpeljali novo spremenljivko $J(t) = I(t)+Z(t)$, ki predstavlja število vseh računalnikov, ki so bili okuženi(vključno z ozdravljenimi) do trenutka t. Če predpostavimo, da se število vseh računalnikov ne spreminja, dobimo še enačbo $N = D(t)+I(t)+Z(t)+C(t)$, kjer je N število vseh računalnikov, ki nastopajo v modelu. Tako lahko iz enačb eliminiramo spremenljivko $S(t) = N - J(t) - C(t)$.

Podrobnejšo razlago modela si lahko preberete članku na naslovu
`http://www-unix.ecs.umass.edu/g̃ong/papers/codered.pdf`.

Enačbe (1) skupaj z začetnimi vrednosti spremenljivk v modelu, določajo začetno nalogo, ki jo bomo reševali z metodo Runge-Kutta reda 2 za sisteme enačb. Spremenljivke, ki nastopajo v enačbi (1) postavimo v stolpec $\mathbf{Y(t)} = [I(t); J(t); C(t)]$. Desne strani pa so podane z vektorsko funkcijo

$$\begin{aligned}(f)(t,(Y)) \quad = [\quad & (\beta(t)D - \gamma)I;\\ & \beta D * I;\\ & \mu D * J],\end{aligned}$$

kjer je $D = N - J - C$. Parametri in začetne vrednosti primerne za modeliranje



Slika 1: Vse 3 komponente rešitve v odvisnosti od časa(v urah)

napada iz leta 2001: $N = 10^6$, $Z(0) = C(0) = 0$, $I(0) = 1$, $\eta = 3$, $\gamma = 0.05$, $\mu = 0.06/N$ in $\beta_0 = 0.8/N$.