Prevajanje toplote po tanki palici

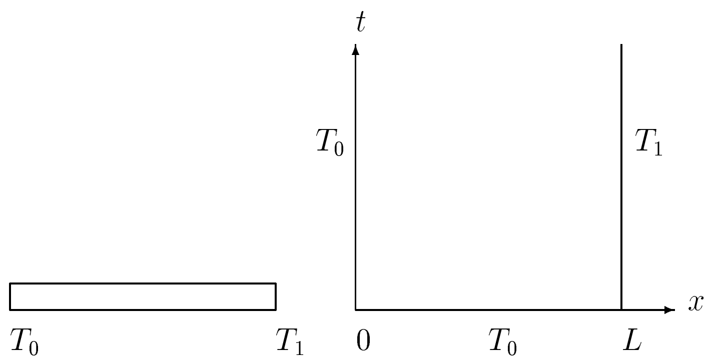
Emil Žagar

11. maj 2004

Povzetek

V sestavku obravnavamo prevajanje toplote v tanki palici, torej enodimenzionalnem objektu dolžine L. Enačbo prevajanja toplote prevedemo v brezdimenzionalno obliko in opišemo nekaj znanih metod za numerično reševanje (eksplicitna, implicitna, Crank-Nicholsonova). Teorijo podkrepimo s praktičnim primerom, v katerem numerično izračunamo porazdelitev toplote v jekleni palici ob izbranem času.

Ogledali si bomo naslednji problem: Tanka palica dolžine L ima po celi dolžini začetno temperaturo T_0. Konca palice vzdržujemo na temperaturah T_0 (levi konec) in T_1 (desni konec). Pri tem privzamemo, da je $T_0 < T_1$ in je palica dovolj tanka, da jo lahko obravnavamo kot enodimenzionalni objekt. Jasno je, da se bo toplota širila od toplejšega konca proti hladnejšemu, zato



Slika 1: Palica in robni ter začetna temperatura.

bo temperatura naraščala v obratni smeri. Lahko pričakujemo, da se bo po določenem času temperatura v palici porazdelila v neko stabilno stanje.

Snov	$\rho\ [kg/m^3]$	$c\ [kJ/kg\,°C]$	$k\ [W/m\,°C]$
aluminij	2707	0.896	204
železo	7897	0.452	73
jeklo	7833	0.465	54
baker	8954	0.383	386
opeka	1600	0.84	0.69
voda	999.8	4.225	0.566

Tabela 1: Tabela konstant za nekatere materiale.

Naj bo $U(x,t)$ temperatura palice na oddaljenosti x od levega roba palice (glejte sliko 1) ob času t. Zaradi krajše pisave bomo včasih pisali tudi $U := U(x,t)$. Za porazdelitev temperature v palici velja enačba

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \kappa\,\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \tag{1}$$

ter robni in začetni pogoji $U(0,t) = T_0$, $U(L,t) = T_1$ in $U(x,0) = T_0$. Konstanta κ se izraža kot $\kappa = k/(\rho\,c)$, kjer je ρ gostota, c specifična toplota in k prevodnost palice. Nekaj vrednosti za te konstante je v tabeli 1. Enačbo (1) lahko skaliramo v

$$U(x,t) = T_0 + (T_1 - T_0)u(\xi,\tau),$$

kjer je $x = L\,\xi$ in $t = (L^2/\kappa)\tau$. Tako dobimo nove enačbe za brezdimenzijsko funkcijo u, in sicer:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}, \tag{2}$$

z robnimi in začetnimi pogoji $u(0,\tau) = 0$, $u(1,\tau) = 1$ ter $u(\xi,0) = 0$. Torej je dovolj, če znamo (numerično) rešiti enačbo (2).

Rešujemo jo z metodo končnih diferenc. Časovni odvod aproksimiramo s prvo premo diferenco s korakom $\Delta\tau$, krajevnega pa z drugo centralno diferenco s korakom $\Delta\xi$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \tau}(\xi,\tau) &\approx \frac{u(\xi,\tau+\Delta\tau) - u(\xi,\tau)}{\Delta\tau},\\ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(\tau,\xi) &\approx \frac{u(\xi+\Delta\xi,\tau) - 2u(\xi,\tau) + u(\xi-\Delta\xi,\tau)}{(\Delta\xi)^2}.\end{aligned}$$

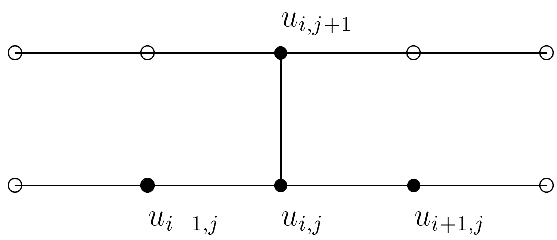
Označimo $\lambda = \frac{\Delta\tau}{(\Delta\xi)^2}$, zanemarimo napako in prejšnja izraza vstavimo v enačbo (2). Vrednosti na novem časovnem nivoju so

$$u(\xi,\tau+\Delta\tau) = \lambda\,u(\xi+\Delta\xi,\tau) + (1-2\lambda)u(\xi,\tau) + \lambda\,u(\xi-\Delta\xi,\tau).$$

Opisani metodi rečemo eksplicitna metoda, saj se vrednosti na novem časovnem nivoju računajo neposredno iz vrednosti na prejšnjem. Metoda je enostavna, vendar ima to pomanjkljivost, da konvergira le za $\lambda < 1/2$ (optimalno $\lambda = 1/6$). To pomeni, da mora biti časovni korak zelo majhen.

Praktično metodo uporabimo takole: Interval $[0, 1]$ ekvidistantno (ali kako drugače) razdelimo s točkami $0 = \xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_n < \xi_{n+1} = 1$. Torej je $\Delta\xi = \frac{1}{n+1}$, $\Delta\tau$ pa izberemo tako, da je $\lambda = \frac{\Delta\tau}{(\Delta\xi)^2} < \frac{1}{2}$. Če je $u_{i,j} = u(\xi_i, \tau_j)$, pri čemer je $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots$ ustrezna časovna razdelitev, potem se eksplicitna metoda zapiše (glejte sliko 2):

$$u_{i,j+1} = \lambda\, u_{i-1,j} + (1 - 2\lambda)u_{i,j} + \lambda\, u_{i+1,j}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$



Slika 2: Shema ekplicitne metode.

Pri $\tau_0 = 0$ je zaradi začetnega pogoja $u_{i,0} = 0$, na robu $\xi_0 = 0$ in $\xi_{n+1} = 1$ pa zaradi robnih pogojev $u_{0,j} = 0$ in $u_{n+1,j} = 1$.
Zelo podobno uporabimo implicitno shemo (glejte sliko 3). Pri tej shemi moramo vrednosti na novem nivoju računati kot rešitev tridiagonalnega sistema enačb

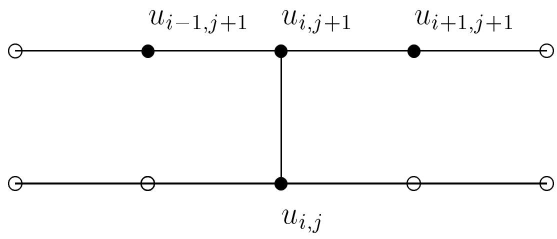
$$-\lambda\, u_{i-1,j+1} + (1 + 2\lambda)\, u_{i,j+1} - \lambda\, u_{i+1,j+1} = u_{i,j}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Njena prednost pa je, da konvergira za vsak λ.

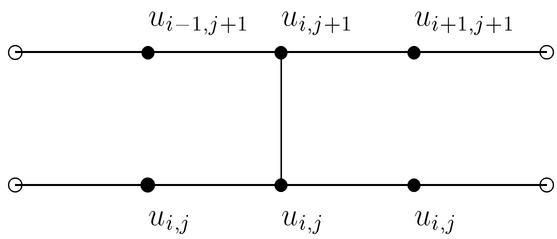
Obstaja še tretja, Crank-Nicholsonova metoda (glejet sliko 4). Gre za kombinacijo eksplicitne in implicitne sheme. Spet moramo vrednosti na novem nivoju računati kot rešitev tridiagonalnega sistema

$$\begin{aligned}-\lambda\, u_{i-1,j+1} + 2(1 + \lambda)\, u_{i,j+1} - \lambda\, u_{i+1,j+1} =& \lambda\, u_{i-1,j} + 2(1 - \lambda)\, u_{i,j} + \lambda\, u_{i+1,j},\\ & i = 1, 2, \ldots, n.\end{aligned}$$

Prednost te metode je, da je napaka reda $\mathcal{O}((\Delta\tau)^2 + (\Delta\xi)^2)$.



Slika 3: Shema implicitne metode.

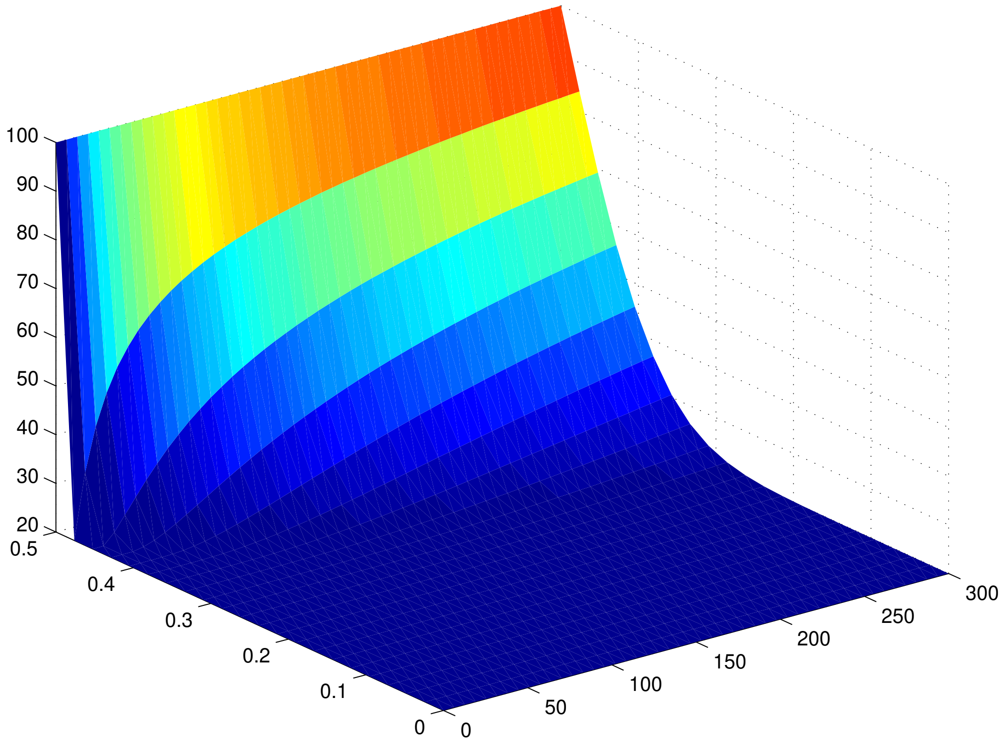


Slika 4: Shema Crank-Nicholsonove metode.

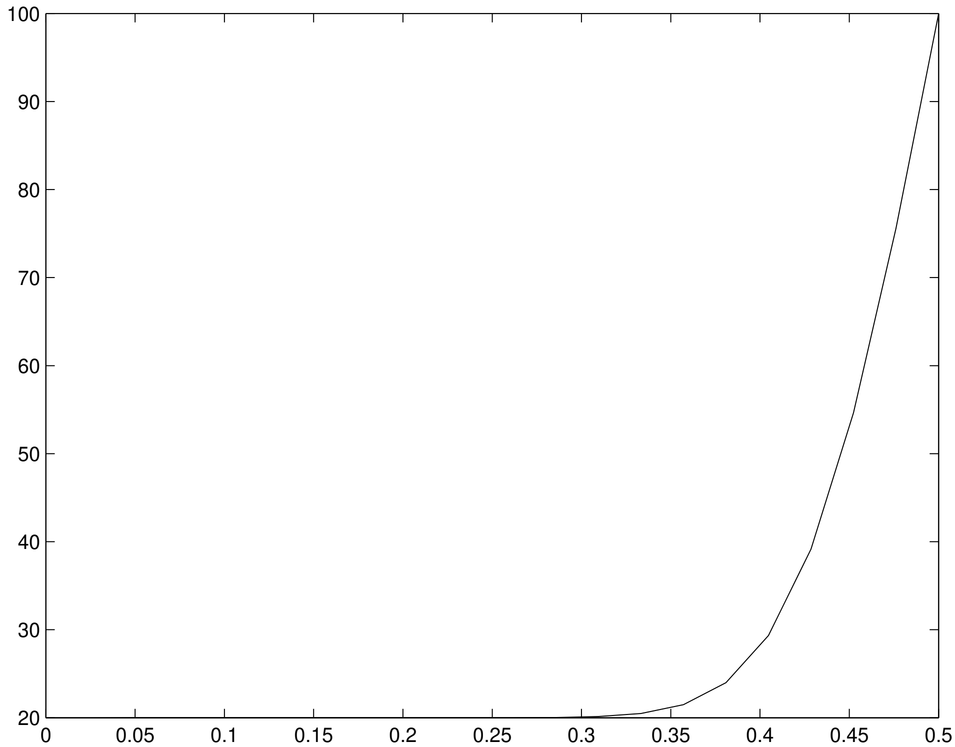
Primer 1 *Izračunati želimo porazdelitev temperature v* 0.5 *metra dolgi jekleni palici, ki ima na levem robu stalno temperaturo* $20°C$*, na desnem pa* $100°C$*. Graf porazdelitve temperature na časovnem intervalu med* 0 *in* 5 *minut prikazuje slika 5. Graf porazdelitve temperature v palici po dveh minutah pa 6.*

Literatura

[1] N. D. Fowkes in J. J. Mahony, *An Introduction to Mathematical Modelling*, John Wiley & Sons, New York, 1996.



Slika 5: Slika porazelitve temperature v jekleni palici.



Slika 6: Slika porazelitve temperature v jekleni palici po dveh dveh minutah.