Velikokrat rešujemo začetni problem za sistem navadnih diferencialnih enačb prvega reda:

$$
\begin{aligned}
y_1'(t) &= f_1(t, y_1, \ldots, y_n) \\
y_2'(t) &= f_2(t, y_1, \ldots, y_n) \\
&\cdots \\
y_n'(t) &= f_n(t, y_1, \ldots, y_n)
\end{aligned}
$$

z začetnim pogojem

$$
\begin{aligned}
y_1(t_0) &= y_1 \\
y_2(t_0) &= y_2 \\
&\cdots \\
y_n(t_0) &= y_n
\end{aligned}
$$

Numerične metode, ki jih uporabimo za reševanje sistemov, so praktično enake kot za eno samo enačbo. Paziti moramo le, da uporabljamo vektorske količine. Poglejmo si, kako Eulerjevo metodo priredimo za sisteme enačb. Na intervalu, na katerem želimo poiskati rešitev, izberemo delilne točke

$$t_0, t_1 = t_0 + h_0, t_2 = t_1 + h_1, \ldots, t_n = t_{n-1} + h_{n-1},$$

ki so ponavadi razporejene enakomerno. Približke za vrednosti rešitve $\mathbf{y}_k = \mathbf{y}(t_k)$ v delilnih točkah izračunamo z zaporedjem

$$
\begin{aligned}
\mathbf{y}(t_0) &= \mathbf{y}_0 \\
\mathbf{y}_{k+1} &= \mathbf{y}_k + h_k * \mathbf{f}(t_k, \mathbf{y}_k),
\end{aligned}
$$

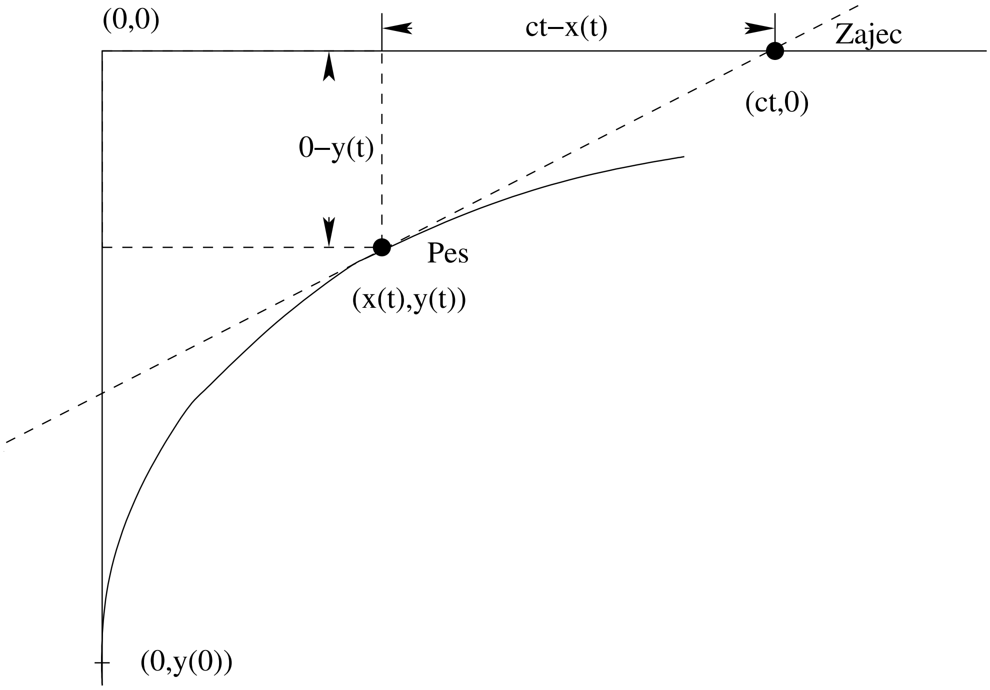
kjer je $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^n$ vektor s komponentami $(y_1(t_k), y_2(t_k), \ldots, y_n(t_k))$, funkcija $\mathbf{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ pa vektorska funkcija sestavljena iz desnih strani enačb

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) = (f_1(t, y_1, \ldots, y_n), \ldots, f_n(t, y_1, \ldots, y_n)).$$

Primer: Naj bo zajec v koordinatnem izhodišču, pes pa v tocki $(0, y_0)$. V trenutku $t_0 = 0$ začne zajec bežati vzdolž x osi. V istem trenutku se pes zažene za njim in mu začne slediti (v vsakem trenutku teče pes v smeri proti zajcu). Poišči krivuljo, po kateri teče pes, če predpostavimo, da sta hitrosti psa in zajca konstantni.

Rešitev: Naj bo $C = \{(x(t), y(t)); \quad t \in \mathbb{R}_+\}$ krivulja, ki jo opiše pes. Ker je hitrost psa konstantna je

$$\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 = d^2.$$



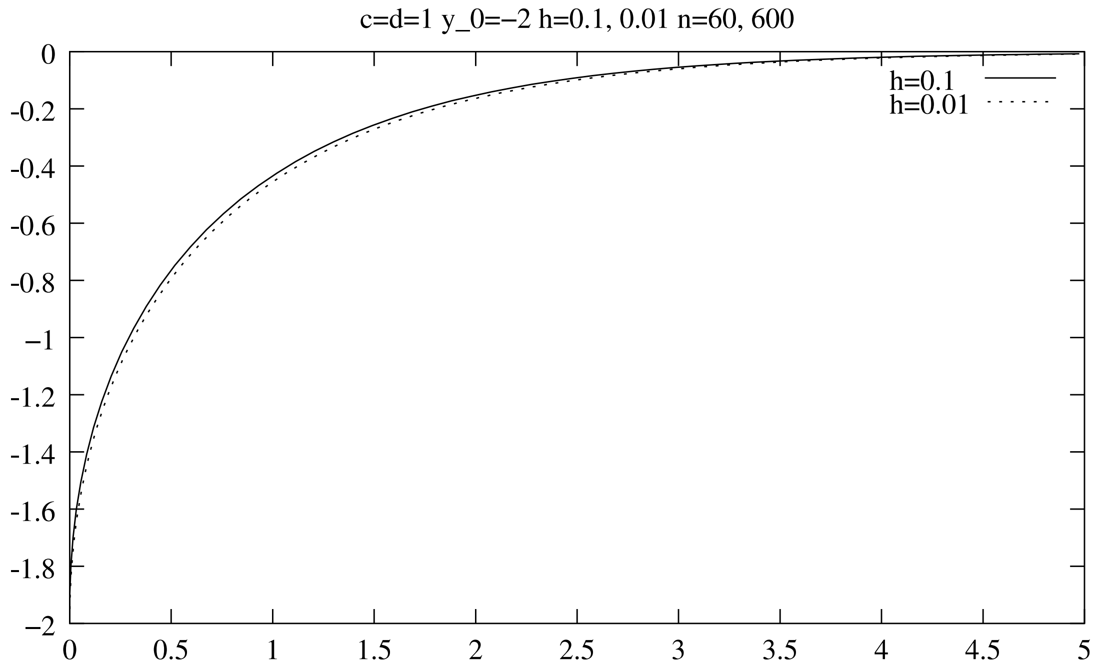
Poleg tega tangenta na C vedno kaže v smeri zveznice med psom $(x(t), y(t))$ in zajcem $(ct, 0)$. To pomeni, da je

$$\frac{\dot{x}(t)}{\dot{y}(t)} = \frac{ct - x(t)}{0 - y(t)}.$$

Če označimo z $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$ in $\mathbf{F}(t, \mathbf{x}(t)) = [ct - x(t), -y(t)]^T$ dobimo enačbo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = d\frac{F(t, \mathbf{x})}{||F(t, \mathbf{x})||_2}.$$

Iskana krivulja bo rešitev začetnega problema za zgornjo enačbo in začetni pogoj $\mathbf{x}(0) = [0, y_0]^T$.



Slika 1: Numerična rešitev začetnega problema za vrednosti $c = d = 1$ ter $y_0 = -2$ na intervalu $t \in [0, 6]$ s konstantnim korakom $h = 0.1$.