

# Kazalo

|          |                                                |          |
|----------|------------------------------------------------|----------|
| <b>1</b> | <b>Optimizacija</b>                            | <b>3</b> |
| 1.1      | Minimum, maksimum in sedlo . . . . .           | 3        |
| 1.2      | Taylorjeva formula za skalarna polja . . . . . | 4        |
| 1.3      | Tip stacionarne točke . . . . .                | 5        |
| 1.4      | Vezani ekstremi . . . . .                      | 5        |
| 1.5      | Diskretna verižnica . . . . .                  | 6        |
| 1.6      | Newtonova metoda . . . . .                     | 10       |
| 1.7      | Metoda zveznega nadaljevanja . . . . .         | 13       |
| 1.8      | Ravnotežje paličja . . . . .                   | 14       |



# 1. Poglavje

## Optimizacija

### 1.1 Minimum, maksimum in sedlo

Zelo pogosta naloga matematičnega modeliranja je iskanje ekstremov funkcij več spremenljivk ali, kot tudi pravimo, iskanje ekstremov *skalarnih polj*.

Skalarno polje, katerega ekstrem iščemo, naj bo definirano na neki množici  $S \subset \mathbb{R}^n$ .

**Definicija 1.1** Za skalarno polje  $f$  pravimo, da ima absolutni minimum v točki  $\mathbf{a} \in S$ , če velja

$$f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{x}) \quad (1.1)$$

za vse  $\mathbf{x} \in S$ . Skalarno polje ima lokalni minimum, če velja ocena (1.1) za vsak  $\mathbf{x}$  v neki krogli  $B(\mathbf{a}) \subset S$ .

Z drugimi besedami, lokalni minimum v točki  $\mathbf{a}$  je absolutni minimum v neki okolici točke  $\mathbf{a}$ . Pojma *absolutni maksimum* in *lokalni maksimum* sta definirana analogno.

**Definicija 1.2** Število, ki je bodisi lokalni minimum bodisi lokalni maksimum polja  $f$ , se imenuje *lokalni ekstrem polja*  $f$ .

Če ima polje  $f$  lokalni ekstrem v notranji točki  $\mathbf{a}$  in je polje  $f$  v točki  $\mathbf{a}$  zvezno odvedljivo, potem so v točki  $\mathbf{a}$  vsi parcialni odvodi  $D_i f := \frac{\partial f}{\partial x_i}$  enaki nič; z drugimi besedami, velja  $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$ , kjer je

$$\nabla f = \begin{bmatrix} D_1 f & D_2 f & \dots & D_n f \end{bmatrix}$$

vektor-vrstica parcialnih odvodov. Po drugi strani zlahka najdemo primere, kjer pogoj  $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$  ne pomeni, da ima polje  $f$  v točki  $\mathbf{a}$  ekstrem. Točkam, kjer se to zgodi, pravimo *sedla* in jih bomo v nadaljevanju še definirali.

**Definicija 1.3** Naj bo polje  $f$  zvezno odvedljivo v točki  $\mathbf{a}$ . Če je  $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$ , se točka  $\mathbf{a}$  imenuje *stacionarna točka*, včasih tudi *kritična točka*. *Stacionarna točka*

je sedlo, če vsaka krogla  $B(\mathbf{a}) \subset S$  vsebuje točke, za katere velja  $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{a})$ , in točke, za katere velja  $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{a})$ .

Situacija je precej podobna enodimenzionalnemu primeru, kjer stacionarne točke funkcije klasificiramo kot minimume, maksimume in prevoje. Sedlo je analogija prevoja v eni dimenziji.

## 1.2 Taylorjeva formula za skalarna polja

Če ima zvezno odvedljivo skalarno polje  $f$  stacionarno točko pri  $\mathbf{a}$ , o naravi te stacionarne točke odloča predznak razlike  $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})$  za  $\mathbf{x}$  blizu točke  $\mathbf{a}$ . Če je  $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{h}$ , velja *Taylorjeva formula 1. reda*

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a})\mathbf{h} + \|\mathbf{h}\|E_1(\mathbf{a}, \mathbf{h}), \quad \text{kjer je } E_1(\mathbf{a}, \mathbf{h}) \xrightarrow{\mathbf{h} \rightarrow 0} 0.$$

V stacionarni točki  $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$  Taylorjeva formula postane

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \|\mathbf{h}\|E_1(\mathbf{a}, \mathbf{h}).$$

Da bi lahko zapisali predznak izraza  $f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a})$ , potrebujemo dodatno informacijo o ostanku  $\|\mathbf{h}\|E_1(\mathbf{a}, \mathbf{h})$ . Naslednji izrek trdi: Če je polje  $f$  dvakrat zvezno odvedljivo v točki  $\mathbf{a}$ , potem se ostanek izraža s kvadratno formo

$$\|\mathbf{h}\|E_1(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{ij}f(\mathbf{a})h_jh_i + o(\|\mathbf{h}\|^2). \quad (1.2)$$

Koeficienti kvadratne forme so drugi parcialni odvodi  $D_{ij}f = D_i(D_jf)$ , izračunani v točki  $\mathbf{a}$ . Matrika drugih odvodov  $D_{ij}f(\mathbf{x})$  reda  $n$ -krat- $n$  se imenuje *Hessian* in ga označujemo s  $H(\mathbf{x})$ . Tako velja

$$H(\mathbf{x}) = [D_{ij}f(\mathbf{x})]_{i,j=1}^n,$$

kadarkoli odvodi obstajajo. Kvadratno formo, ki nastopa v formuli (1.2), lahko napišemo preprosteje z matričnimi oznakami kot

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{ij}f(\mathbf{a})h_jh_i = \mathbf{h}^T H(\mathbf{a})\mathbf{h}.$$

Taylorjeva formula, ki nam daje kvadratično aproksimacijo za  $f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a})$ , sedaj dobi naslednjo obliko.

**Izrek 1.4 (Taylorjeva formula 2. reda)** *Naj bo v notranjosti krogle  $B(\mathbf{a})$  skalarno polje dvakrat zvezno odvedljivo. Potem za vse  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ , za katere je  $\mathbf{a} + \mathbf{h} \in B(\mathbf{a})$ , velja*

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a})\mathbf{h} + \frac{1}{2!}\mathbf{h}^T H(\mathbf{a} + \vartheta\mathbf{h})\mathbf{h}, \quad \text{kjer je } 0 < \vartheta < 1.$$

Ta izraz lahko pišemo tudi kot

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a})\mathbf{h} + \frac{1}{2!}\mathbf{h}^T H(\mathbf{a})\mathbf{h} + \|\mathbf{h}\|^2 E_2(\mathbf{a}, \mathbf{h}), \quad (1.3)$$

kjer je

$$E_2(\mathbf{a}, \mathbf{h}) \xrightarrow{\mathbf{h} \rightarrow 0} 0.$$

### 1.3 Tip stacionarne točke

Taylorjeva formula (1.3) nam omogoča, da povemo, kakšna točka bo stacionarna točka  $\mathbf{a}$ . Odgovor sloni na *inerciji* Hessiana.

**Izrek 1.5** Naj bo  $f$  skalarno polje v  $S$ , ki je v krogli  $B(\mathbf{a}) \subset S$  dvakrat zvezno odvedljivo in naj bo  $H(\mathbf{a})$  Hessian v stacionarni točki  $\mathbf{a}$ . Potem velja:

1. Če so vse lastne vrednosti matrike  $H(\mathbf{a})$  pozitivne, potem ima polje  $f$  v točki  $\mathbf{a}$  lokalni minimum.
2. Če so vse lastne vrednosti matrike  $H(\mathbf{a})$  negativne, potem ima polje  $f$  v točki  $\mathbf{a}$  lokalni maksimum.
3. Če ima matrika  $H(\mathbf{a})$  tako pozitivne kot negativne lastne vrednosti, potem ima polje  $f$  v točki  $\mathbf{a}$  sedlo.
4. Če je kašna lastna vrednost matrike  $H(\mathbf{a})$  enaka nič, potem na osnovi drugih odvodov ne moremo odgovoriti na vprašanje, kakšna je stacionarna točka  $\mathbf{a}$ .

Omeniti velja, da za izračun inercije, to je števila pozitivnih, ničelnih in negativnih lastnih vrednosti, ni treba lastnih vrednosti res izračunati, ker nam *Sylvestrov izrek* o inerciji pove, da se inercija ohranja že pri kongruentnih transformacijah: matriki  $A$  in  $B = X^{-1}AX$ , kjer je  $X$  nesingularna matrika, imata isto inercijo.

### 1.4 Vezani ekstremi

Pogosto moramo poiskati stacionarne točke skalarnega polja  $f$ , definirane na  $S \subset \mathbb{R}^n$ , pri pogojih, da točka  $\mathbf{x}$  zadošča pogojem

$$\begin{aligned} g_1(x_1, \dots, x_n) &= 0, \\ &\vdots \\ g_m(x_1, \dots, x_n) &= 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

kjer število pogojev  $m$  zadošča zahtevi  $m < n$ . Ti pogoji morajo biti kajpada (funkcijsko) neodvisni, funkcije  $g_j$  pa naj bodo zvezno odvedljive.

**Izrek 1.6** Če ima polje  $f$  v točki  $\mathbf{a}$  lokalni ekstrem pri pogojih (1.4) in so vektorji  $\nabla g_1, \dots, \nabla g_m$  v točki  $\mathbf{a}$  linearno neodvisni, potem obstajajo skalarji (Lagrangeevi parametri)  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , da je

$$\nabla f + \sum_{j=1}^m \lambda_j \nabla g_j = 0.$$

## 1.5 Diskretna verižnica

Obliko prosto obešene gibke vrvi imenujemo *verižnica*.

Isto nalogo, le da je vrv sestavljena iz gibko vpetih togih členkov, palic, imenujemo *diskretna verižnica*.

Naj bo diskretna verižnica sestavljena iz  $n + 1$  členkov dolžin

$$L_i, \quad i = 1, 2, \dots, n + 1$$

in mas

$$M_i, \quad i = 1, 2, \dots, n + 1.$$

Nalogo bomo rešili, če bomo izračunali koordinate krajišč

$$(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, \dots, n + 1,$$

kjer sta obešišči, to je točki  $(x_0, y_0)$  in  $(x_{n+1}, y_{n+1})$ , kajpada predpisani vnaprej.

Ravnotežni pogoj dobimo, če zahtevamo, da je *težišče* kar se da nizko ali, kar je isto, da je potencialna energija minimalna.

Minimizirati torej želimo

$$\min_{x,y} F(x, y) = \min_{x,y} \sum_{i=1}^{n+1} M_i \frac{y_{i-1} + y_i}{2}, \quad (1.5)$$

saj sila teže prijemlje v težišču vsake palice.

Iskane koordinate  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , morajo pri tem zadoščati pogojem

$$(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2 = L_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, n + 1. \quad (1.6)$$

Vezani ekstrem (1.5)–(1.6) prevedemo na nevezanega z uvedbo Lagrangeevih multiplikatorjev. Tedaj iščemo *nevezani* ekstrem funkcije

$$G(x, y, \lambda) = \sum_{j=1}^{n+1} \left( M_j \frac{y_{j-1} + y_j}{2} + \lambda_j \left( (x_j - x_{j-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2 - L_j^2 \right) \right). \quad (1.7)$$

Ravnotežne enačbe dobimo kot enačbe

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial x_i} &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial y_i} &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ \frac{\partial G}{\partial \lambda_i} &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, n + 1, \end{aligned}$$

ali

$$\begin{aligned}\lambda_i (x_i - x_{i-1}) - \lambda_{i+1} (x_{i+1} - x_i) &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ \lambda_i (y_i - y_{i-1}) - \lambda_{i+1} (y_{i+1} - y_i) &= -\frac{M_i + M_{i+1}}{4}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ (x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2 &= L_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, n+1.\end{aligned}$$

To je sistem  $3n+1$  enačb za  $3n+1$  neznank.

Za lažje računanje uvedemo relativne koordinate

$$\begin{aligned}\xi_i &= x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n+1, \\ \eta_i &= y_i - y_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n+1,\end{aligned}$$

od koder sledi

$$x_i = x_0 + \sum_{j=1}^i \xi_j, \quad i = 1, 2, \dots, n+1, \quad (1.8)$$

$$y_i = y_0 + \sum_{j=1}^i \eta_j, \quad i = 1, 2, \dots, n+1, \quad (1.9)$$

in zgornji sistem enačb preide v ekvivalentni sistem

$$\lambda_i \xi_i - \lambda_{i+1} \xi_{i+1} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.10)$$

$$\lambda_i \eta_i - \lambda_{i+1} \eta_{i+1} = -\frac{1}{2} \mu_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.11)$$

$$\xi_i^2 + \eta_i^2 = L_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, n+1, \quad (1.12)$$

kjer je

$$\mu_i = \frac{M_i + M_{i+1}}{2}. \quad (1.13)$$

Ta sistem  $3n+1$  enačb za neznanke  $\xi_i$ ,  $\eta_i$  in  $\lambda_i$  bomo rešili tako, da bomo vse neznanke izrazili z dvema novima neznankama  $u$  in  $v$ .

Iz enačbe (1.10) sledi

$$\lambda_i \xi_i = -\frac{1}{2u}, \quad i = 1, 2, \dots, n+1, \quad (1.14)$$

kjer je  $u$  neznanka, ki jo bomo še določili. Iz enačb (1.14) potem sledi

$$\lambda_i = -\frac{1}{2u\xi_i} \quad (1.15)$$

in iz enačb (1.11) dobimo

$$-\frac{1}{2u} \frac{\eta_i}{\xi_i} + \frac{1}{2u} \frac{\eta_{i+1}}{\xi_{i+1}} = -\frac{1}{2} \mu_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

ali

$$\frac{\eta_{i+1}}{\xi_{i+1}} = \frac{\eta_i}{\xi_i} - u\mu_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

in končno

$$\frac{\eta_i}{\xi_i} = v - u \sum_{j=1}^{i-1} \mu_j, \quad i = 1, 2, \dots, n+1, \quad (1.16)$$

kjer bomo neznanko

$$v := \frac{\eta_1}{\xi_1} \quad (1.17)$$

še določili.

Enačbi (1.12) in (1.16) nam sedaj povesta

$$1 + \left( v - u \sum_{j=1}^{i-1} \mu_j \right)^2 = \frac{L_i^2}{\xi_i^2},$$

od koder sledi

$$\xi_i = \frac{L_i}{\sqrt{1 + \left( v - u \sum_{j=1}^{i-1} \mu_j \right)^2}}, \quad i = 1, 2, \dots, n+1, \quad (1.18)$$

vrednosti  $\eta_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n+1$ , pa sedaj izračunamo iz enačbe (1.16)

$$\eta_i = \xi_i \left( v - u \sum_{j=1}^{i-1} \mu_j \right), \quad i = 1, \dots, n+1. \quad (1.19)$$

(Neznanke  $\lambda_i$  lahko, če želimo, izrazimo z  $u$  in  $v$  po enačbi (1.15).)

Za neznanki  $u$  in  $v$  sedaj iz enačb (1.8) in (1.9) dobimo enačbi

$$U(u, v) = 0, \quad (1.20)$$

$$V(u, v) = 0, \quad (1.21)$$

kjer je

$$U(u, v) = \sum_{i=1}^{n+1} \xi_i - (x_{n+1} - x_0), \quad (1.22)$$

$$V(u, v) = \sum_{i=1}^{n+1} \eta_i - (y_{n+1} - y_0), \quad (1.23)$$

kjer se  $\xi_i$  in  $\eta_i$  izražajo z  $u$  in  $v$  po enačbah (1.18) in (1.19).

## Naloge

**1.1** Analiziraj (in reši) simetrično diskretno verižnico s sodim številom  $n + 1 = 2p$ ,  $p \in \mathbb{N}$  palic:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_0, \\ L_i &= L_{n+2-i}, \quad i = 1, 2, \dots, p, \\ M_i &= M_{n+2-i}, \quad i = 1, 2, \dots, p. \end{aligned}$$

Z upoštevanjem simetrije lahko prevedemo nalogo na eno samo enačbo za neznanko  $w = \lambda_i \xi_i$ , kar je po enačbi (1.10) neodvisno od indeksa  $i$ .

**1.2** Analiziraj (in reši) simetrično diskretno verižnico z lihim številom  $n + 1 = 2p + 1$ ,  $p \in \mathbb{N}$  palic:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_0, \\ L_i &= L_{n+2-i}, \quad i = 1, 2, \dots, p, \\ M_i &= M_{n+2-i}, \quad i = 1, 2, \dots, p. \end{aligned}$$

Z upoštevanjem simetrije lahko prevedemo nalogo na eno samo enačbo za neznanko  $w = \lambda_i \xi_i$ , kar je po enačbi (1.10) neodvisno od indeksa  $i$ .

**1.3** Dokaži, da je diskretna verižnica rešljiva natanko takrat, ko noben členek, vključno s fiktivnim členkom, ki direktno povezuje obe obesišči, ni daljši od vsote preostalih členkov ("poligonska" neenakost).

**1.4** Analiziraj diskretno verižnico, ki je na levem krajišču normalno pritrjena, na desnem krajišču pa je privezana na neraztegljivo nitko, ki je speljana čez škripec, na drugem koncu nitke pa je obešena utež z maso  $m$ .

**1.5** V študentskih letih nam je prof. I. Kuščer zastavil naslednjo nalogo: Kocko z robovi iz žice za hip potopimo v milnico. Ko kocko izvlečemo iz milnice, dobimo sliko, kot jo prikazuje slika 1.1.

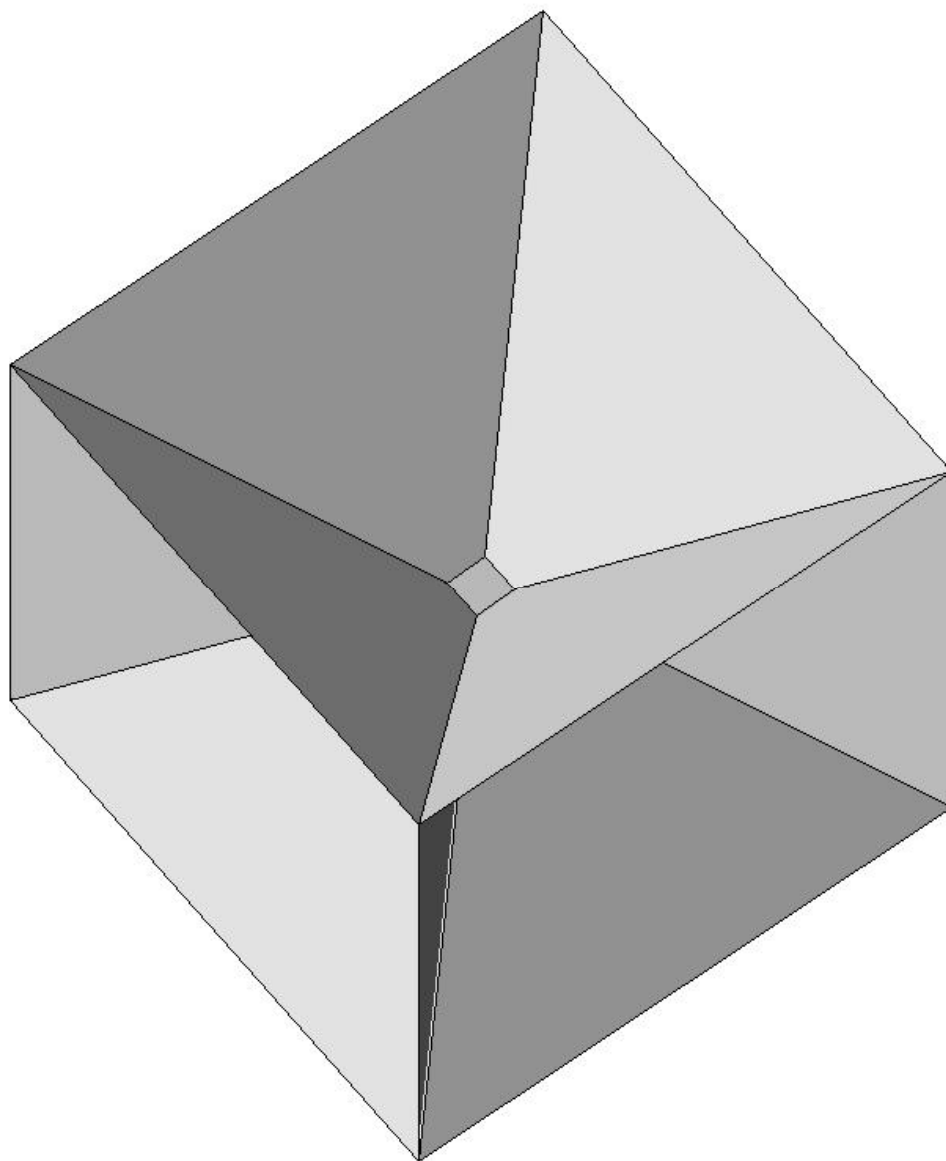
Vprašanje je bilo, kolikšen je rob malega kvadrata na sredini.

Vsi, s profesorjem vred, smo menili, da mora biti površina minimalna. Mnogo let kasneje je neka bistra glava trdila, da morajo biti sile v ravnotežju, zato se morajo vse ploskve stikati pod kotom  $120^\circ$ . Rezultat je drugačen in dolgo je med študenti krožilo vprašanje, kateri rezultat je pravilen.

Končno je prof. Kodre rekel, da sta oba rezultata napačna: kvadrat na sredini ni kvadrat, ker nima ravnih stranic. Trapezi, ki so nanj prilepljeni, niso ravninski liki, ker je vse skupaj malo upognjeno.

Naloga ima sedaj tri dele, kjer je tretji del precej težji.

1. Izračunaj stranico malega kvadrata iz zahteve, da je površina minimalna. Izračunaj, kakšna je minimalna površina in pod kakšnimi koti se stikajo ploskve.



Slika 1.1: Milnica na skeletu kocke

2. Izračunaj stranico malega kvadrata iz zahteve, da se stranice stikajo pod kotom  $120^\circ$ . Izračunaj, kakšna je sedaj površina.
3. Izračunaj stranico malega "kvadrata" iz zahteve, da je površina minimalna, dopuščaj pa neravne robove in neravninske like. Naloga je formalno zelo komplicirana, ker bi bilo treba reševati nelinearne parcialne diferencialne enačbe.

Za približno rešitev pa je dovolj triangulirati rešitev, ki jo dobimo v 1. delu, koordinate vozlišč v notranjosti vzeti za spremenljivke, izraziti površino z njimi ter poiskati minimalno vrednost. Začetne vrednosti so točke, ki jih dobimo z napačno teorijo v 1. delu. Kolika je sedaj površina in pod kakšnim kotom se stikajo ploskve?

## 1.6 Newtonova metoda

Enačbi (1.20–1.21) bomo rešili z Newtonovo metodo. Naj bo  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  rešitev sistema (1.20–1.21). Po Taylorjevi formuli velja

$$\begin{aligned} U(\tilde{u}, \tilde{v}) &= U(u, v) + \frac{\partial U(u, v)}{\partial u} (\tilde{u} - u) + \frac{\partial U(u, v)}{\partial v} (\tilde{v} - v) + \dots = 0, \\ V(\tilde{u}, \tilde{v}) &= V(u, v) + \frac{\partial V(u, v)}{\partial u} (\tilde{u} - u) + \frac{\partial V(u, v)}{\partial v} (\tilde{v} - v) + \dots = 0. \end{aligned}$$

Če označimo

$$\begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

in zanemarimo člene s  $\dots$ , izračunani vektor

$$\begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix}$$

ne bo točna rešitev ampak, upajmo, boljši približek. Ta boljši približek dobimo po formuli (1.24), kjer je

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial u} & \frac{\partial U}{\partial v} \\ \frac{\partial V}{\partial u} & \frac{\partial V}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}.$$

Formuli (1.18) in (1.19) bomo poenostavili z uvedbo pomožnih spremenljivk

$$w_i = v - u\nu_i, \quad i = 1, 2, \dots, n+1, \quad (1.25)$$

kjer so

$$\nu_i = \sum_{j=1}^{i-1} \mu_j, \quad i = 1, 2, \dots, n+1 \quad (1.26)$$

znane konstante. Potem lahko pišemo

$$\begin{aligned} \xi_i &= L_i (1 + w_i^2)^{-1/2}, \\ \eta_i &= L_i w_i (1 + w_i^2)^{-1/2}, \end{aligned}$$

od koder sledi

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_i}{dw_i} &= -L_i w_i (1 + w_i^2)^{-3/2}, \\ \frac{d\eta_i}{dw_i} &= L_i (1 + w_i^2)^{-3/2} \end{aligned}$$

in

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_i}{\partial u} & \frac{\partial \xi_i}{\partial v} \end{bmatrix} = L_i (1 + w_i^2)^{-3/2} \begin{bmatrix} w_i \nu_i & -w_i \\ -\nu_i & 1 \end{bmatrix}.$$

Za Jacobijan potem dobimo

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial u} & \frac{\partial U}{\partial v} \end{bmatrix} &= \sum_{i=1}^{n+1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_i}{\partial u} & \frac{\partial \xi_i}{\partial v} \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} L_i (1 + w_i^2)^{-3/2} \begin{bmatrix} w_i \nu_i & -w_i \\ -\nu_i & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (1.27)$$

medtem ko je

$$\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n+1} L_i (1 + w_i^2)^{-1/2} \begin{bmatrix} 1 \\ w_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}, \quad (1.28)$$

kjer je

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{n+1} - x_0 \\ y_{n+1} - y_0 \end{bmatrix}. \quad (1.29)$$

Na sliki 1.2 vidimo diskretno verižnico s podatki

$$L = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

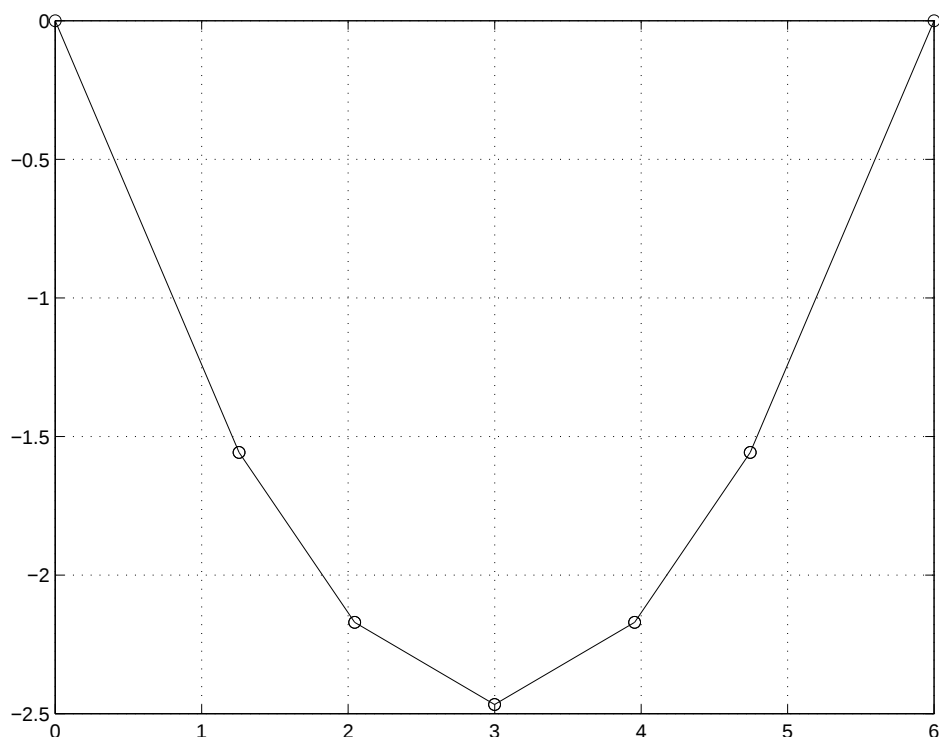
in

$$M = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 1 \\ 1 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

## Naloge

**1.6** Izračunaj in nariši diskretno verižnico z 10 členi dolžin 1 in mas 1. Verižnica je pritrjena nesimetrično v točkah  $(0, 0)$  in  $(6, 3)$ . Nalogo reši tako, da direktno, z uporabo Matlaba, minimiziraš funkcijo (1.5) pri pogojih (1.6).

**1.7** Nalogo 1.6 reši tako, da direktno, z uporabo Matlaba, rešiš sistem enačb (1.10), (1.11), (1.12).



Slika 1.2: Diskretna verižnica iz 6 členov

**1.8** Nalogo 1.6 reši tako, da po Newtonovi metodi rešiš sistem (1.20), (1.21).

**1.9** Izračunaj ravnotežni položaj dveh masnih točk z masama  $m_1, m_2 > 0$  ter nabojema  $e_1, e_2 > 0$ . Točki se lahko premikata po vertikalni premici nad izhodiščem  $x = 0$ , kjer je pritrjen točkast naboj  $e_0$ , slika 1.3.

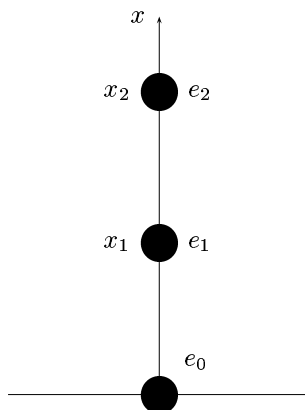
**1.10** Izračunaj ravnotežni položaj sistema  $n$  masnih točk z masami  $m_i > 0$  in naboji  $e_i > 0$ . Točke se lahko premikajo po vertikalni premici nad izhodiščem  $x = 0$ , kjer je pritrjen točkast naboj  $e_0$ , primerjaj s sliko 1.3. Kot poseben primer obravnavaj situacijo, kjer so vse mase enake  $m_i = m$  in vsi naboji prav tako  $e_0 = e_i = e$ .

## 1.7 Metoda zveznega nadaljevanja

Še vedno imamo težavo z izbiro začetnega približka  $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ . Za njegovo izbiro lahko uporabimo metodo zveznega nadaljevanja: sistem (1.20–1.21) potopimo v sistem

$$\tilde{U}(u, v, t) = 0, \quad (1.30)$$

$$\tilde{V}(u, v, t) = 0, \quad (1.31)$$



Slika 1.3: Naboji

kjer za funkciji  $\tilde{U}$  in  $\tilde{V}$  izberemo homotopijo, to je preslikavo, ki ima lastnost, da je sistem

$$\begin{aligned}\tilde{U}(u, v, 0) &= 0, \\ \tilde{V}(u, v, 0) &= 0\end{aligned}$$

preprosto rešljiv, sistem

$$\begin{aligned}\tilde{U}(u, v, 1) &= 0, \\ \tilde{V}(u, v, 1) &= 0\end{aligned}$$

pa je ravno sistem (1.20–1.21)

Za homotopijo lahko izberemo kakšno *naravno* homotopijo, ki se včasih sama ponuja, v pomanjkanju naravne homotopije pa si vedno lahko pomagamo z uni-verzalno homotopijo

$$\begin{aligned}\tilde{U}(u, v, t) &= tU(u, v) + (1 - t)U_0(u, v), \\ \tilde{V}(u, v, t) &= tV(u, v) + (1 - t)V_0(u, v),\end{aligned}$$

kjer je

$$\begin{aligned}U_0(u, v) &= 0, \\ V_0(u, v) &= 0\end{aligned}$$

preprosto rešljiv sistem.

Za nadaljevanje je najpreprostejši način postopno povečevanje parametra  $t$  od 0 do 1. Pri vsaki vrednosti parametra  $t$  izberemo izračunane vrednosti  $u$  in  $v$  pri

prejšnji vrednosti parametra za začetni približek pri novi vrednosti parametra. Z Newtonovo metodo izračunamo vrednosti  $u$  in  $v$  za novo vrednost parametra. Če povečujemo parameter  $t$  dovolj počasi, bodo začetni približki dovolj dobri, da bo Newtonova metoda (kvadratično) konvergirala.

V realističnem primeru se zgodi, da moramo za  $t$  izbrati smešno majhen korak (recimo)  $\Delta t = 0.01$ , da Newtonova metoda res konvergira. Zato se lotimo računanja drugače.

Sistem (1.30–1.31) lahko tolmačimo kot implicitno definicijo funkcij

$$t \mapsto u(t), \quad (1.32)$$

$$t \mapsto v(t). \quad (1.33)$$

Ampak če je to tako, potem lahko sestavimo sistem diferencialnih enačb, ki ima trajektorijo (1.32–1.33) za rešitev:

$$\begin{bmatrix} \tilde{U}_u & \tilde{U}_v \\ \tilde{V}_u & \tilde{V}_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{U}_t \\ \tilde{V}_t \end{bmatrix} = 0$$

ali

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \tilde{U}_u & \tilde{U}_v \\ \tilde{V}_u & \tilde{V}_v \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{U}_t \\ \tilde{V}_t \end{bmatrix}.$$

Za takšne sisteme diferencialnih enačb pa imamo na voljo vrsto odličnih numeričnih metod, ki si dinamično prilagajajo korak, kot na primer Fehlbergova [?] metoda in njeni sorodniki [?].

## 1.8 Ravnotežje paličja

Paličje (angl. *truss*) je mehanska struktura, zgrajena iz elastičnih palic, ki so vrtljivo povezane med seboj. To pomeni, da se v stikih prenašajo samo osne sile ne pa navori, in ker so palice obremenjene samo z osnimi silami, se ne upogibajo.

Paličje naj bo položeno v  $d$  (2 ali 3)-dimenzionalni evklidski prostor  $\mathbb{R}^d$  in naj ima  $n$  vozlišč. V neobremenjenem stanju naj bodo

$$z_l, \quad l = 1, 2, \dots, N, \quad N = n * d,$$

vse koordinate vozlišč. Posamezno vozlišče  $T_i$  naj bo podano s koordinatami

$$\begin{bmatrix} z_{v_{i,1}} \\ \vdots \\ z_{v_{i,d}} \end{bmatrix},$$

kjer je  $v_{i,k}$  številka  $k$ -te ( $k = 1, \dots, d$ ) koordinate točke  $T_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Pod (majhno) obremenitvijo se vozlišče  $T_i$  premakne v točko

$$\begin{bmatrix} z_{v_i,1} \\ \vdots \\ z_{v_i,d} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{v_i,1} \\ \vdots \\ x_{v_i,d} \end{bmatrix},$$

torej so  $x_l$ ,  $l = 1, 2, \dots, N$ , (majhne) spremembe koordinat  $z_l$ ,  $l = 1, 2, \dots, N$ .

Palica številka  $j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , naj sega od točke  $T_{p_j}$  do točke  $T_{q_j}$ , to je od

točke  $\begin{bmatrix} z_{v_{p_j},1} \\ \vdots \\ z_{v_{p_j},d} \end{bmatrix}$  do točke  $\begin{bmatrix} z_{v_{q_j},1} \\ \vdots \\ z_{v_{q_j},d} \end{bmatrix}$ .

Naj bo  $L_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , dolžina palice številka  $j$ , torej

$$L_j = \sqrt{\sum_{k=1}^d (z_{v_{q_j},k} - z_{v_{p_j},k})^2}.$$

Dolžina deformirane palice je potem

$$\begin{aligned} L_j + \delta L_j &:= \left( \sum_{k=1}^d \left( (z_{v_{q_j},k} + x_{v_{q_j},k}) - (z_{v_{p_j},k} + x_{v_{p_j},k}) \right)^2 \right)^{1/2} \\ &= \left( \sum_{k=1}^d \left( (z_{v_{q_j},k} - z_{v_{p_j},k}) + (x_{v_{q_j},k} - x_{v_{p_j},k}) \right)^2 \right)^{1/2} \\ &= \left( \sum_{k=1}^d (z_{v_{q_j},k} - z_{v_{p_j},k})^2 + 2 \sum_{k=1}^d (z_{v_{q_j},k} - z_{v_{p_j},k}) (x_{v_{q_j},k} - x_{v_{p_j},k}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^d (x_{v_{q_j},k} - x_{v_{p_j},k})^2 \right)^{1/2} \\ &= \left( L_j^2 + 2 \sum_{k=1}^d (z_{v_{q_j},k} - z_{v_{p_j},k}) (x_{v_{q_j},k} - x_{v_{p_j},k}) + \mathcal{O}(\|x\|^2) \right)^{1/2} \\ &= L_j \left( 1 + 2 \sum_{k=1}^d \frac{z_{v_{q_j},k} - z_{v_{p_j},k}}{L_j^2} (x_{v_{q_j},k} - x_{v_{p_j},k}) + \mathcal{O}(\|x\|^2) \right)^{1/2} \\ &= L_j \left( 1 + \sum_{k=1}^d \frac{z_{v_{q_j},k} - z_{v_{p_j},k}}{L_j^2} (x_{v_{q_j},k} - x_{v_{p_j},k}) + \mathcal{O}(\|x\|^2) \right) \\ &= L_j + \sum_{k=1}^d \frac{z_{v_{q_j},k} - z_{v_{p_j},k}}{L_j} (x_{v_{q_j},k} - x_{v_{p_j},k}) + \mathcal{O}(\|x\|^2) \\ &= L_j + \sum_{k=1}^d \cos \alpha_{j,k} (x_{v_{q_j},k} - x_{v_{p_j},k}) + \mathcal{O}(\|x\|^2), \end{aligned}$$

kjer je

$$\cos \alpha_{j,k} := \frac{z_{v_{q_j,k}} - z_{v_{p_j,k}}}{L_j}$$

$k$ -ti smerni kosinus  $j$ -te palice. Če člen  $\mathcal{O}(\|x\|^2)$  zanemarimo, velja za raztezek  $j$ -te palice  $\delta L_j$ :

$$\begin{aligned} \delta L_j &:= \sum_{k=1}^d \cos \alpha_{j,k} (x_{v_{q_j,k}} - x_{v_{p_j,k}}) \\ &= \sum_{k=1}^d \cos \alpha_{j,k} (e_{v_{q_j,k}}^T x - e_{v_{p_j,k}}^T x) \\ &= \left( \sum_{k=1}^d \cos \alpha_{j,k} (e_{v_{q_j,k}} - e_{v_{p_j,k}})^T \right) x, \end{aligned}$$

kjer so  $e_l$ ,  $l = 1, 2, \dots, N$ , standardni bazni vektorji v  $\mathbb{R}^N$ .

Naj bo sedaj  $A \in \mathbb{R}^{m \times N}$  *incidenčna matrika* paličja:

$$A := \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^d \cos \alpha_{1,k} (e_{v_{q_{1,k}}} - e_{v_{p_{1,k}}})^T \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^d \cos \alpha_{m,k} (e_{v_{q_{m,k}}} - e_{v_{p_{m,k}}})^T \end{bmatrix}.$$

Če je  $\delta L$  vektor *vseh* raztezakov

$$\delta L := \begin{bmatrix} \delta L_1 \\ \delta L_2 \\ \vdots \\ \delta L_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m,$$

velja

$$Ax = \delta L,$$

kjer je  $x \in \mathbb{R}^N$  vektor vseh pomikov vozlišč.

Ker je po Hookovem zakonu [?] za elastično palico

$$\frac{\delta L}{L} = \frac{1}{E} \frac{F}{S},$$

kjer je  $\delta L$  raztezek,  $L$  dolžina,  $E$  Youngov modul,  $F$  osna sila in  $S$  ploščina preseka palice, za elastično palico številka  $j$  velja

$$\frac{\delta L_j}{L_j} = \frac{1}{E_j} \frac{F_j}{S_j},$$

kjer je  $E_j$  Youngov modul elastičnosti in  $S_j$  ploščina preseka palice številka  $j$ , lahko za osno silo  $F_j$  pišemo

$$F_j = k_j \delta L_j,$$

kjer je

$$k_j = \frac{E_j S_j}{L_j}$$

“konstanta vzmeti”  $j$ -te palice. Potencialna (elastična) energija takšne palice je  $\frac{1}{2} k_j (\delta L_j)^2$ .

Potencialna energija  $U$  celotnega paličja je potem enaka

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m k_j (\delta L_j)^2.$$

Naj bo

$$D^2 = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{R}^{m \times m}.$$

Sledi

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \langle D^2 \delta L, \delta L \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle D \delta L, D \delta L \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle D A x, D A x \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle (D A)^T (D A) x, x \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle K x, x \rangle, \end{aligned}$$

kjer je

$$K = (D A)^T (D A) \in \mathbb{R}^{N \times N} \quad (1.34)$$

*togostna matrika* paličja.

Dalje, naj bodo

$$f_l, \quad l = 1, 2, \dots, N, \quad N = n d,$$

vse komponente vseh sil, s katerimi je paličje obremenjeno. Posamezna sila v vozlišču  $T_i$  ima koordinate

$$\begin{bmatrix} f_{v_{i,1}} \\ \vdots \\ f_{v_{i,d}} \end{bmatrix},$$

kjer je  $v_{i,k}$  številka  $k$ -te koordinate ( $k = 1, \dots, d$ ) točke  $T_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Sile  $f$  so tiste, ki povzročajo pomike  $x$  in pri tem opravijo delo

$$W = \langle f, x \rangle.$$

Eden od principov mehanike pravi, da mora biti razlika  $U - W$  minimalna, to je, vrednost izraza

$$F(x) = \frac{1}{2} \langle Kx, x \rangle - \langle f, x \rangle \quad (1.35)$$

mora biti minimalna, zato mora biti  $x$  stacionarna (ali kritična) točka funkcije  $F$ , od koder sledi ravnotežne enačbe

$$Kx = f. \quad (1.36)$$

V vsej zgodbi moramo še upoštevati, da mora biti paličje nekako pritrjeno: če bi postavili takšno paličje nepritrjeno v vesolje, v breztežni prostor, in ga obremenili s silami, ki niso v statičnem ravnotežju, bi se to paličje pospešeno pomikalo skozi vesolje.

Paličje pritrdimo s *podporami*. To pomeni, da moramo, na primer,  $p$  izbranih komponent pomikov pritrditi, postaviti na nič. Recimo, da je  $R : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N-p}$  *reduktor* (identiteta, ki ji manjkajo pritrjene vrstice), ki iz vektorja  $x$  izbere samo nepritrjene komponente  $x_0 := Rx$ . Če je  $S : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^p$  še reduktor, ki iz vektorja  $x$  izbere samo pritrjene komponente, sta matriki  $R^T R$  in  $S^T S$  komplementarna ortogonalna projektorja: projektorja, ker je  $(R^T R)^2 = R^T R R^T R = R^T R$ , ker je  $RR^T = I$  in podobno  $(S^T S)^2 = S^T S S^T S = S^T S$ ; komplementarna, ker je  $R^T R + S^T S = I$ ; in ortogonalna, ker sta simetrični matriki.

Tako je  $S^T Sx$  vektor, v katerem so vse nepritrjene komponente že nič, od nič različne komponente so kvečjemu pritrjene komponente. Ker morajo biti pritrjene komponente tudi nič, mora zato veljati

$$S^T Sx = 0. \quad (1.37)$$

Namesto da bi zahtevali, da mora funkcija (1.35) doseči minimalno vrednost med vsemi mogočimi vektorji  $x$ , zahtevamo, da mora doseči minimalno vrednost samo med vektorji, ki zadoščajo pogoju (1.37). Ta vezani ekstrem lahko uženemo brez Lagrangeevih parametrov. Pišemo  $x = R^T Rx + S^T Sx$  in upoštevamo pogoj (1.37), da ugotovimo, da velja

$$x = R^T Rx,$$

in zato iščemo ekstrem funkcije

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2} \langle (DA)^T (DA) R^T Rx, R^T Rx \rangle - \langle f, R^T Rx \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle R (DA)^T (DA) R^T Rx, Rx \rangle - \langle Rf, Rx \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle (DAR^T)^T (DAR^T) Rx, Rx \rangle - \langle Rf, Rx \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle (DA_0)^T (DA_0) x_0, x_0 \rangle - \langle f_0, x_0 \rangle, \end{aligned}$$

kjer je

$$\begin{aligned} A_0 &= AR^T, \\ f_0 &= Rf \end{aligned}$$

in

$$x_0 = Rx.$$

Od tod slede ravnotežne enačbe

$$K_0 x_0 = f_0, \quad (1.38)$$

kjer je

$$K_0 = (DA_0)^T (DA_0). \quad (1.39)$$

Reducirano incidenčno matriko  $A_0 = AR^T$  in reducirani obtežni vektor  $f_0 = Rf$  dobimo tako, da v incidenčni matriki  $A$  prečrtamo stolpce, v obtežnem vektorju  $f$  pa vrstice, ki ustrezajo neznanim reakcijam podpor, vektor  $x$  pa rekonstruiramo po enačbi

$$x = R^T x_0,$$

od koder lahko po enačbi (1.36) izračunamo vse sile, dane sile  $f_0$  (za kontrolo) in neznane reakcije podpor  $g = Sf$ .

Reducirane togostne matrike  $K_0 = A_0^T D^2 A_0$  *nikoli* ne smemo eksplicitno izračunati. Kot vidimo, je sestavljena iz dvoje vrst faktorjev: reducirane incidenčne matrike  $A_0$  in fizikalne matrike  $D^2$ .

Reducirana incidenčna matrika je praviloma dobro pogojena, v smislu, da so njeni stolpci dobro linearno neodvisni; če niso, je bil arhitekt cepec. Glavni razlog za slabo pogojenost matrike  $K_0$ , če je res slabo pogojena, je fizikalni diagonalni faktor  $D^2$ , ki je lahko poljubno divji. Ko ga množimo (dvakrat) z matriko  $A_0$ , se njegova divjost razleze po vsej matriki  $K_0$ , ki zato postane slabo pogojena.

Reducirana incidenčna matrika  $K_0$  je formalno simetrična pozitivno definitna matrika, ki jo lahko razcepimo po Choleskem v dva trikotna faktorja. Ampak, preden smo jo zmnožili v matriko  $K_0$ , je že bila zapisana kot produkt dveh, sicer ne trikotnih, faktorjev, glej (1.39). Zato matriko  $DA_0$  raje razcepimo v produkt matrike  $Q$  z ortonormiranimi stolpci in zgornjetrikotne matrike  $U$ ,  $DA_0 = QU$ , in ravnotežne enačbe (1.38) preidejo v

$$U^T U x_0 = f_0,$$

kar je ekvivalentno sistemu, ki bi ga dobili z razcepom Choleskega matrike  $K_0$ , pri tem pa plačamo samo kvadratni koren pogojenostnega števila matrike  $K_0$ .

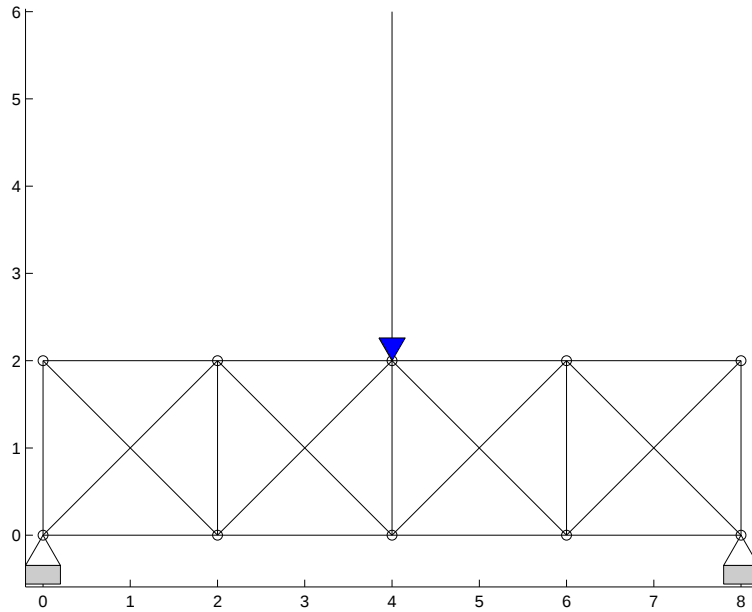
V *statično določenem* primeru je reducirana incidenčna matrika  $A_0$  kvadratna in v normalnih okoliščinah (modulo bedast arhitekt) nesingularna in dobro pogojena. Statično določeni primer pomeni, da lahko reakcije podpor,  $g$ , izračunamo statično,

brez Hookovega zakona, torej brez matrike  $D^2$ . Poglejmo, ali res:

$$\begin{aligned}
 g &= Sf \\
 &= SKx \\
 &= SKR^T x_0 \\
 &= SKR^T K_0^{-1} f_0 \\
 &= SA^T D^2 AR^T (A_0^T D^2 A_0)^{-1} f_0 \\
 &= SA^T D^2 A_0 A_0^{-1} D^{-2} A_0^{-T} f_0 \\
 &= SA^T A_0^{-T} f_0.
 \end{aligned}$$

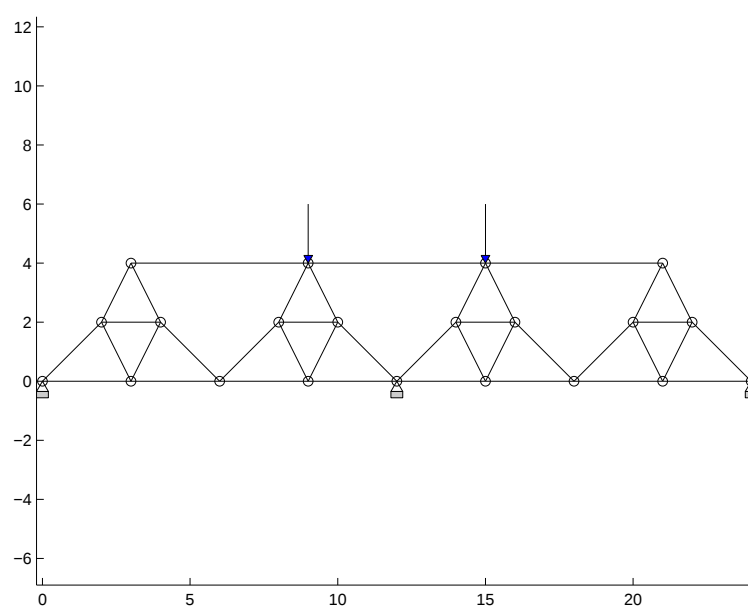
### Naloge

**1.11** Izračunaj pomike za paličje, prikazano na sliki 1.4. Geometrijske podatke in obtežbo lahko razbereš s slike, vse palice pa so enako toge in enako debele s podatki  $E_j = S_j = 1$ .



Slika 1.4: Paličje

**1.12** Izračunaj pomike za paličje, prikazano na sliki 1.5. Geometrijske podatke in obtežbo lahko razbereš s slike, vse palice pa so enako toge in enako debele s podatki  $E_j = S_j = 1$ .



Slika 1.5: Paličje