Veržnica

Egon Zakrajšek

6. oktober 1999

Kazalo

Zamisel za ta prispevek dolgujem prof. K. Veseliću, ki je bil od nekdaj zaljubljen v veržnico.

Najprej se bomo lotili klasične veržnice in rešili problem njenih parametrov.

V nadaljevanju bomo obravnavali dve posplošitvi, diskretno veržnico in viseči most.

1 Klasična verižnica

Poiščimo obliko verižnice, to je, tanke gibke niti, obešene v točkah $T_1 = (a, A)$ in $T_2 = (b, B)$, če ima nit dolžino ℓ.

Oblika verižnice naj bo opisana s funkcijo

$$y = w(x).$$

Funkcijo w izračunamo iz zahteve, da mora biti potencialna energija minimalna, ali kar je isto, da mora biti težišče kar se da nizko, to je, funkcija w mora dati funkcionalu ϕ,

$$\phi(w) := \int_a^b w(x)\sqrt{1 + w'^2(x)}\, dx$$

minimalno vrednost pri *geometrijskih pogojih*

$$w(a) = A, \tag{1}$$

$$w(b) = B, \tag{2}$$

in pri *izoperimetričnem pogoju*

$$\int_a^b \sqrt{1 + w'^2(x)}\, dx = \ell. \tag{3}$$

Po Ljusternikovem lemi [2, 3] obstaja konstanta λ, da bo

$$\delta \int_a^b L\left[w(x), w'(x)\right] dx = 0$$

pri pogojih (1–3), kjer je

$$L\left(w, w'\right) = (w - \lambda)\sqrt{1 + w'^2}$$

Lagrangeova funkcija variacijske naloge in od koder sledi Euler-Lagrangeova enačba

$$\frac{\partial L\left(w, w'\right)}{\partial w} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L\left(w, w'\right)}{\partial w'} = 0.$$

Ker je Lagrangeova funkcija neodvisna od x, lahko Euler-Lagrangeovo enačbo takoj enkrat integriramo v

$$L(w, w') - w'\frac{\partial L\left(w, w'\right)}{\partial w'} = C.$$

V našem primeru dobimo

$$[w(x) - \lambda]\sqrt{1 + w'^2(x)} - w'(x)[w(x) - \lambda]\frac{w'(x)}{\sqrt{1 + w'^2(x)}} = C,$$

ali

$$w(x) - \lambda = C\sqrt{1 + w'^2(x)}.$$

To enačbo rešimo parametrično z nastavkom

$$w' = \sinh p,$$

od koder sledi

$$\begin{aligned} w &= \lambda + C\cosh p, \\ C\sinh p\,dp &= \sinh p\,dx, \\ x &= Cp + D \end{aligned}$$

in

$$w(x) = \lambda + C\cosh\frac{x-D}{C}. \tag{4}$$

Iz enačbe (4) sledi

$$\begin{aligned} w'(x) &= \sinh\frac{x-D}{C}, \\ \sqrt{1+w'(x)^2} &= \cosh\frac{x-D}{C}, \\ \ell &= \int_a^b \cosh\frac{x-D}{C}\,dx = \\ &= C\sinh\frac{x-D}{C}\bigg|_a^b = \\ &= C\sinh\frac{b-D}{C} - C\sinh\frac{a-D}{C}. \end{aligned}$$

Tako dobimo sistem treh enačb

$$A = \lambda + C\cosh\frac{a-D}{C}, \tag{5}$$

$$B = \lambda + C\cosh\frac{b-D}{C}, \tag{6}$$

$$\ell = C\sinh\frac{b-D}{C} - C\sinh\frac{a-D}{C} \tag{7}$$

za parametre C, D in λ.

Sistem enačb (5–7) najprej poenostavimo z uvedbo novih neznank

$$u = \frac{a-D}{C}, \tag{8}$$

$$v = \frac{b-D}{C}, \tag{9}$$

da dobimo sistem

$$\begin{aligned} \frac{A}{C} &= \frac{\lambda}{C} + \cosh u, \\ \frac{B}{C} &= \frac{\lambda}{C} + \cosh v, \\ \frac{\ell}{C} &= \sinh v - \sinh u, \end{aligned}$$

ali

$$\begin{aligned} \frac{B-A}{b-a} &= \frac{\cosh v - \cosh u}{v-u}, && (10) \\ \frac{\ell}{b-a} &= \frac{\sinh v - \sinh u}{v-u}. && (11) \end{aligned}$$

Ti dve enačbi poenostavimo s pomočjo adicijskih izrekov za hiperbolne funkcije, da dobimo sistem

$$\begin{aligned} \frac{B-A}{b-a} &= \frac{\sinh \frac{v+u}{2} \sinh \frac{v-u}{2}}{\frac{v-u}{2}}, && (12) \\ \frac{\ell}{b-a} &= \frac{\cosh \frac{v+u}{2} \sinh \frac{v-u}{2}}{\frac{v-u}{2}}, && (13) \end{aligned}$$

od koder sledi

$$\frac{B-A}{\ell} = \tanh \frac{v+u}{2},$$

od koder sledi

$$\frac{v+u}{2} = \operatorname{atanh} \frac{B-A}{\ell}. \qquad (14)$$

Iz enačbe (14) sedaj sledi

$$\begin{aligned} \sinh \frac{v+u}{2} &= \frac{\tanh \frac{v+u}{2}}{\sqrt{1-\tanh^2 \frac{v+u}{2}}} = \\ &= \frac{B-A}{\ell} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{B-A}{\ell}\right)^2}}, \end{aligned}$$

iz enačbe (12) pa dobimo enačbo

$$\sinh \frac{v-u}{2} = \rho \frac{v-u}{2}, \qquad (15)$$

kjer je

$$\rho = \frac{\ell}{b-a} \sqrt{1-\left(\frac{B-A}{\ell}\right)^2}. \qquad (16)$$

Enačbo (15) rešimo z Jacobijevo iteracijo

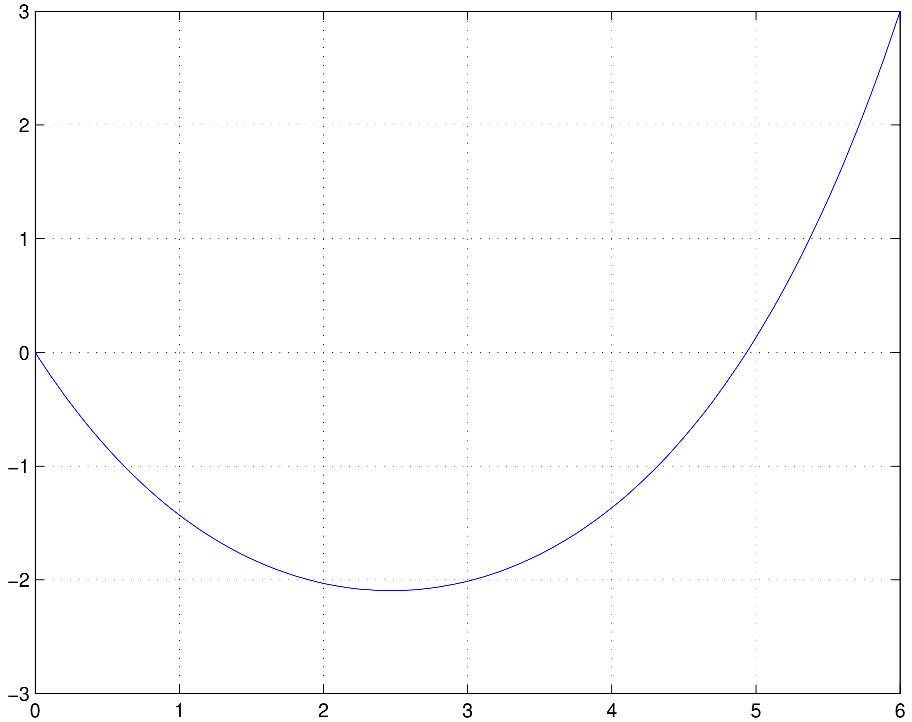
$$\begin{aligned} z_0 &= 1, \\ z_{k+1} &= \operatorname{asinh} \rho z_k. \end{aligned}$$

Ko je $z = \lim_{k\to\infty} z_k$ izračunan, sledi

$$\begin{aligned} v &= \operatorname{atanh} \frac{B-A}{\ell} + z, \\ u &= \operatorname{atanh} \frac{B-A}{\ell} - z, \end{aligned}$$

od koder sledi

$$\begin{aligned} C &= \frac{b-a}{v-u}, \\ D &= \frac{av-bu}{v-u}. \end{aligned}$$



Slika 1: Verižnica dolžine $\ell = 10$

2 Diskretna verižnica

Isto nalogo, le da je vrv sestavljena iz gibko vpetih togih členkov, palic, imenujemo *diskretna verižnica.*

Naj bo diskretna verižnica sestavljena iz $n+1$ členkov dolžin

$$L_i,\ i = 1, 2, \dots, n+1$$

in mas

$$M_i,\ i = 1, 2, \dots, n+1.$$

Nalogo bomo rešili, če bomo izračunali koordinate krajišč

$$(x_i, y_i)\,,\ i = 0, 1, \dots, n+1,$$

kjer sta točki (x_0, y_0) in (x_{n+1}, y_{n+1}), (obesišči), kajpada predpisani vnaprej.

Ravnotežni pogoj dobimo, če zahtevamo, da je *težišče* kar se da nizko, ali kar je isto, da je potencialna energija minimalna.

Minimalizirati torej želimo

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^{n+1} M_i \frac{y_{i-1} + y_i}{2}, \tag{17}$$

saj je težišče posamezne palice na razpolovišču.

Iskane koordinate (x_i, y_i), $i = 1, 2, \dots, n$, morajo pri tem zadoščati pogojem

$$(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2 = L_i^2, \qquad i = 1, 2, \dots, n+1. \tag{18}$$

Vezani ekstrem (17)–(18) prevedemo na nevezanega z uvedbo Lagrangeovih multiplikatorjev. Tedaj iščemo *nevezani* ekstrem funkcije

$$G(x, y, \lambda) = \sum_{i=1}^{n+1} \left\{ M_i \frac{y_{i-1} + y_i}{2} + \lambda_i \left[(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2 - L_i^2 \right] \right\}. \tag{19}$$

Ravnotežne enačbe dobimo kot enačbe

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial x_i} &= 0, \qquad i = 1, 2, \dots, n, \\
\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial y_i} &= 0, \qquad i = 1, 2, \dots, n, \\
\frac{\partial G}{\partial \lambda i} &= 0, \qquad i = 1, 2, \dots, n+1,
\end{aligned}$$

ali

$$\begin{aligned}
\lambda_i (x_i - x_{i-1}) - \lambda_{i+1} (x_{i+1} - x_i) &= 0, \qquad i = 1, 2, \dots, n, \\
\lambda_i (y_i - y_{i-1}) - \lambda_{i+1} (y_{i+1} - y_i) &= -\frac{M_i + M_{i+1}}{4}, \qquad i = 1, 2, \dots, n, \\
(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2 &= L_i^2, \qquad i = 1, 2, \dots, n+1.
\end{aligned}$$

Za lažje računanje uvedemo relativne koordinate

$$\begin{aligned} \xi_i &= x_i - x_{i-1}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n+1, \\ \eta_i &= y_i - y_{i-1}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n+1, \end{aligned}$$

od koder sledi

$$\begin{aligned} x_i &= x_0 + \sum_{j=1}^{i} \xi_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, n+1, \\ y_i &= y_0 + \sum_{j=1}^{i} \eta_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, n+1, \end{aligned}$$

in zgornji sistem enačb preide v ekvivalentni sistem

$$\lambda_i \xi_i - \lambda_{i+1} \xi_{i+1} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots n, \tag{20}$$

$$\lambda_i \eta_i - \lambda_{i+1} \eta_{i+1} = -\frac{1}{2} \mu_i, \qquad i = 1, 2, \ldots n, \tag{21}$$

$$\xi_i^2 + \eta_i^2 = L_i^2, \qquad i = 1, 2, \ldots, n+1, \tag{22}$$

kjer je

$$\mu_i = \frac{M_i + M_{i+1}}{2}. \tag{23}$$

Iz enačbe (20) sedaj sledi

$$\lambda_i \xi_i = -\frac{1}{2u}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{24}$$

kjer je u konstanta, ki jo bomo še določili. Iz enačb (21) in (24) potem sledi

$$\frac{1}{2u} \frac{\eta_i}{\xi_i} - \frac{1}{2u} \frac{\eta_{i+1}}{\xi_{i+1}} = \frac{1}{2} \mu_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

ali

$$\frac{\eta_{i+1}}{\xi_{i+1}} = \frac{\eta_i}{\xi_i} - u \mu_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

ali

$$\frac{\eta_i}{\xi_i} = v - u \sum_{j=1}^{i-1} \mu_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, n+1, \tag{25}$$

kjer bomo konstanto

$$v = \frac{\eta_1}{\xi_1} \tag{26}$$

še določili.

Enačbe (22,25) nam sedaj povedo

$$1 + \left(v - u \sum_{j=1}^{i-1} \mu_j \right)^2 = \frac{L_i^2}{\xi_i^2},$$

od koder sledi

$$\xi_i = \frac{L_i}{\sqrt{1+\left(v-u\sum_{j=1}^{i-1}\mu_j\right)^2}}, \qquad i=1,2,\ldots,n+1, \tag{27}$$

vrednosti $\eta_i,\ i=1,2,\ldots,n+1$ pa sedaj izračunamo iz enačbe (25).

Za vrednosti u in v imamo sedaj enačbi

$$U(u,v) = 0, \tag{28}$$

$$U(u,v) = 0, \tag{29}$$

kjer je

$$U(u,v) = \sum_{i=1}^{n+1}\xi_i - (x_{n+1}-x_0)\,, \tag{30}$$

$$V(u,v) = \sum_{i=1}^{n+1}\eta_i - (y_{n+1}-y_0)\,. \tag{31}$$

Enačbi (28,29) bomo rešili z Newtonovo metodo. Če je $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ stari približek, $\begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix}$ pa novi, velja

$$\begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{bmatrix},$$

kjer je

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial u} & \frac{\partial U}{\partial v} \\ \frac{\partial V}{\partial u} & \frac{\partial V}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}.$$

Formule (27,25) bomo poenostavili z uvedbo pomožnih spremenljivk

$$w_i = v - u\nu_i, \tag{32}$$

kjer je

$$\nu_i = \sum_{j=1}^{i-1}\mu_j. \tag{33}$$

Potem lahko pišemo

$$\xi_i = L_i\left(1+w_i^2\right)^{-1/2},$$

$$\eta_i = L_i w_i\left(1+w_i^2\right)^{-1/2},$$

od koder sledi

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial w_i} = -L_i w_i\left(1+w_i^2\right)^{-3/2},$$

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial w_i} = L_i\left(1+w_i^2\right)^{-3/2}$$

in

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_i}{\partial u} & \frac{\partial \xi_i}{\partial v} \\ \frac{\partial \eta_i}{\partial u} & \frac{\partial \eta_i}{\partial v} \end{bmatrix} = L_i \left(1 + w_i^2\right)^{-3/2} \begin{bmatrix} w_i \nu_i & -w_i \\ -\nu_i & 1 \end{bmatrix}.$$

Za Jacobijan potem dobimo

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial u} & \frac{\partial U}{\partial v} \\ \frac{\partial V}{\partial u} & \frac{\partial V}{\partial v} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n+1} L_i \left(1 + w_i^2\right)^{-3/2} \begin{bmatrix} w_i \nu_i & -w_i \\ -\nu_i & 1 \end{bmatrix}, \tag{34}$$

medtem ko je

$$\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n+1} L_i \left(1 + w_i^2\right)^{-1/2} \begin{bmatrix} w_i \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}, \tag{35}$$

kjer je

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{n+1} - x_0 \\ y_{n+1} - y_0 \end{bmatrix}. \tag{36}$$

Na sliki 2 vidimo diskretno verižnico s podatki

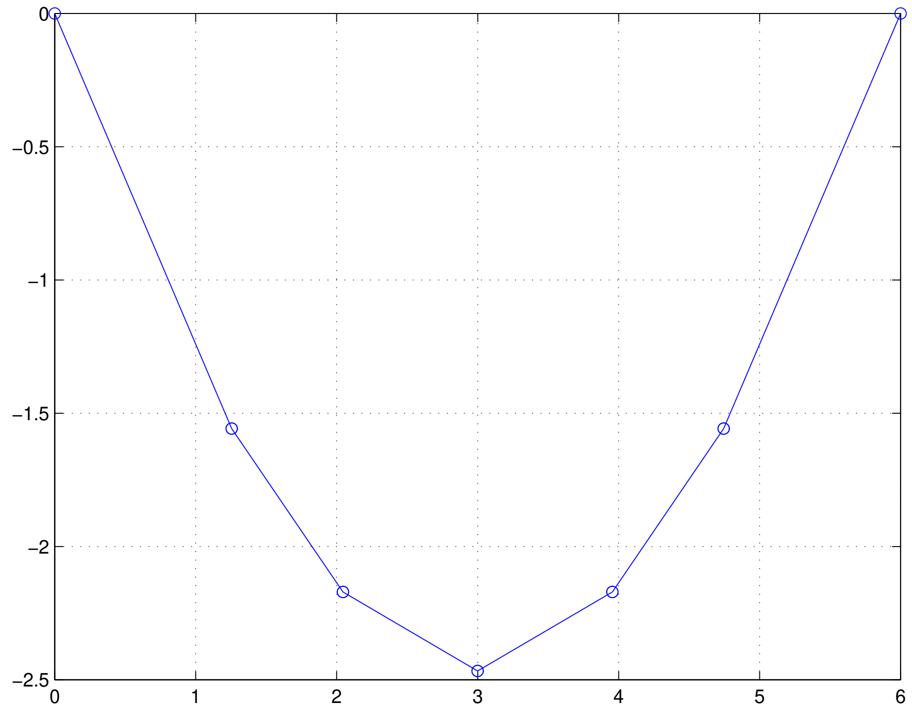
$$L = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

in

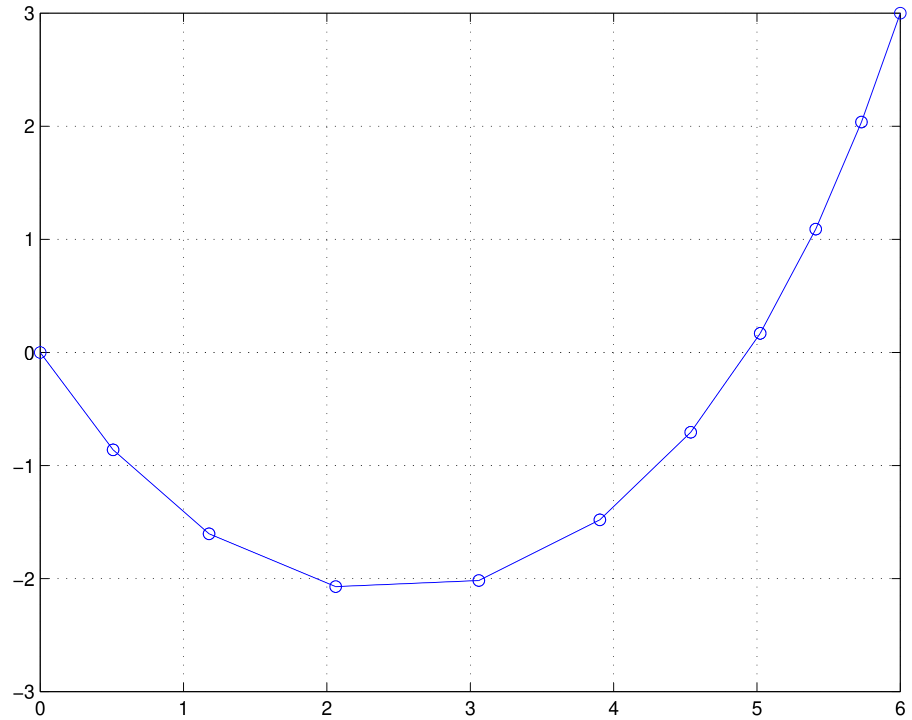
$$M = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 1 \\ 1 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Za drugačen pristop k reševanju te naloge glej [1].

Za primerjavo z zvezno verižnico na sliki 1 navajamo še diskretno verižnico na sliki 3, ki ima isto dolžino, isto začetno točko in isto končno točko, le da je sestavljena iz desetih členkov.



Slika 2: Diskretna verižnica iz 6 členkov



Slika 3: Diskretna verižnica iz 10 členkov

3 Viseči most

Sestavimo model visečega mostu, kakršen je na primer most čez Zlata vrata (Golden Gate) v San Franciscu, USA. To je okrog 8km dolg viseči most, ki se pne čez Zlata vrata, ožino, ki povezuje Tihi ocean z zalivom v San Franciscu.

Nosilna vrv, v resnici sta dve, vendar za model zadošča, da obravnvamo samo eno, je pritrjena na dveh kakih sto metrov visokih nosilnih stebrih, od katerih stoji eden v San Franciscu drugi pa v Sausalitu, majhnem ribiškem (turističnem) mestecu na severu Zlatih vrat. S te nosilne vrvi so v določenih presledkih, kakih 100m, pritrjene vrvi, ki nosijo most.

Najprej se je treba odločiti, kje na nosilni vrvi bodo obešene vrvi, ki nosijo most. Med gradnjo moramo že vedeti, kje pritrditi te vrvi, zato se zdi, da je smiselno reči, da so ti vozli na znan način, recimo enakomerno, porazdeljeni vdolž nosilne vrvi. Ampak posledica bo, da bodo segmenti cestišča, ki visijo na nosilni vrvi, neenakomerno dolgi: tam, kjer je nosilna vrv bolj strma, to je na začetku in na koncu mostu, bodo razmaki na cestišču brez potrebe manjši.

Zato bomo vozle postavili na nosilno vrv tako, da bodo segmenti cestišča enakomerno dolgi, zato pa vozli na nosilni vrvi ne bodo enakomerno porazdeljeni.

Izberimo si koordinatni sistem, kjer teče os x vzdolž cestišča, os y pa navpično vzdolž levega nosilnega stebra. Točke, kjer se obešene vrvi držijo segmentov cestišča, naj bodo x_i, $i = 1, \ldots, n$, tako da so cestni segmenti (x_{i-1}, x_i), $i = 1, 2, \ldots, n+1$, kjer je $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$, in kjer sta točki $T_0 = (x_0, y_0)$ in $T_{n+1} = (x_{n+1}, y_{n+1})$ predpisani obesišči nosilne vrvi. Nosilna vrv naj ima linearno gostoto ρ, vrv, obešena v točki $T_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, pa naj nosi maso m_i.

Obliko nosilne vrvi naj opisuje funkcija w. Nosilna vrv mora imeti tako obliko, da bo potencialna energija

$$W = \sum_{i=1}^{n+1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \rho g w \sqrt{1 + w'^2}\, dx + \sum_{i=1}^{n} m_i g w(x_i) \tag{37}$$

minimalna pri pogojih

$$w(x_i) = y_i,\ i = 0, 1, \ldots, n+1, \tag{38}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \sqrt{1 + w'^2}\, dx = L, \tag{39}$$

kjer je L dolžina nosline vrvi. Enačba (38) sta v resnici dva (robna) pogoja in n definicij y_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Po Ljusternikovi lemi [3] obstaja skalar λ da mora biti

$$\delta \left[\sum_{i=1}^{n+1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \rho g (w - \lambda) \sqrt{1 + w'^2}\, dx + \sum_{i=1}^{n} m_i g w(x_i) \right] = 0,$$

od koder sledi, (enačbo smo delili z ρg),

$$\sum_{i=1}^{n+1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\delta w \sqrt{1 + w'^2} + (w - \lambda) \frac{\delta w'}{\sqrt{1 + w'^2}} \right] dx + \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{\rho} \delta w(x_i) = 0$$

za vsako dopustno zvezno variacijo δw. Z integracijo po delih dobimo

$$\sum_{i=1}^{n+1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left[\sqrt{1+w'^2}-\frac{d}{dx}\frac{w-\lambda}{\sqrt{1+w'^2}}\right]\delta w\,dx+$$
$$+\sum_{i=1}^{n+1}\frac{w-\lambda}{\sqrt{1+w'^2}}\delta w\Big|_{x_{i-1}+0}^{x_i-0}+\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{\rho}\delta w\left(x_i\right)=0.$$

Od tod dobimo, ker je $\delta w\left(x_0\right)=\delta w\left(x_{n+1}\right)=0$,

$$\sqrt{1+w'^2}-\frac{d}{dx}\frac{w-\lambda}{\sqrt{1+w'^2}}=0,\ x_{i-1}<x<x_i,\ i=1,\dots,n+1, \tag{40}$$

$$\left.\frac{w-\lambda}{\sqrt{1+w'^2}}\right|_{x=x_i-0}-\left.\frac{w-\lambda}{\sqrt{1+w'^2}}\right|_{x=x_i+0}+\frac{m_i}{\rho}=0,\ i=1,2,\dots,n. \tag{41}$$

Enačbe (40) lahko enkrat takoj integriramo v

$$(w-\lambda)\sqrt{1+w'^2}-w'\frac{w'(w-\lambda)}{\sqrt{1+w'^2}}=C_i,$$

ali

$$w \quad = \quad \lambda+C_i\sqrt{1+w'^2},\ x_{i-1}<x<x_i,\ i=1,\dots,n+1 \tag{42}$$

pri robnih pogojih

$$w\left(x_{i-1}\right) \quad = \quad y_{i-1}, \tag{43}$$
$$w\left(x_i\right) \quad = \quad y_i. \tag{44}$$

Enačbe (42) rešimo parametrično

$$w' \quad = \quad \sinh p,$$

od koder sledi

$$w \quad = \quad \lambda+C_i\cosh p$$

in

$$\begin{aligned} dw&=w'\,dx && \therefore\\ C_i\sinh p\,dp&=\sinh p\,dx && \therefore\\ dx&=C_i\,dp && \therefore\\ x&=C_ip-D_i+x_{i-1} && \therefore\\ p&=\frac{x-x_{i-1}+D_i}{C_i}, \end{aligned}$$

ali

$$w \quad = \quad \lambda+C_i\cosh\frac{x-x_{i-1}+D_i}{C_i},\ x_{i-1}<x<x_i,\ i=1,\dots,n+1. \tag{45}$$

Ker mora biti funkcija w zvezna, dobimo prvo serijo pogojev

$$y_i = \lambda + C_i \cosh \frac{\xi_i + D_i}{C_i}, \; i = 1, \ldots, n, \tag{46}$$

$$y_i = \lambda + C_{i+1} \cosh \frac{D_{i+1}}{C_{i+1}}, \; i = 1, \ldots, n, \tag{47}$$

kjer so

$$\xi_i = x_i - x_{i-1}, \; i = 1, 2, \ldots, n+1$$

relativne koordinate vozlov.

Iz pogojev (46–47) sedaj sledi

$$C_i \cosh \frac{\xi_i + D_i}{C_i} = C_{i+1} \cosh \frac{D_{i+1}}{C_{i+1}}, \; i = 1, 2 \ldots, n. \tag{48}$$

Iz enačb (41) potem sledi

$$\frac{y_i - \lambda}{\sqrt{1 + w'^2 (x_i + 0)}} - \frac{y_i - \lambda}{\sqrt{1 + w'^2 (x_i - 0)}} = \frac{m_i}{\rho}, \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Upoštevamo enačbo (45), da dobimo

$$w'(x) = \sinh \frac{x - x_{i-1} + D_i}{C_i}$$

in sledi

$$w'(x_i - 0) = \sinh \frac{\xi_i + D_i}{C_i},$$
$$w'(x_i + 0) = \sinh \frac{D_{i+1}}{C_{i+1}}$$

in zato

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2 \frac{D_{i+1}}{C_{i+1}}}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2 \frac{\xi_i + D_i}{C_i}}} = \frac{m_i}{\rho} \frac{1}{y_i - \lambda} = \frac{m_i}{\rho} \frac{1}{C_i \cosh \frac{\xi_i + D_i}{C_i}},$$

ali

$$\frac{1}{\cosh \frac{D_{i+1}}{C_{i+1}}} - \frac{1}{\cosh \frac{\xi_i + D_i}{C_i}} = \frac{m_i}{\rho} \frac{1}{C_i \cosh \frac{\xi_i + D_i}{C_i}},$$

ali

$$\frac{\cosh \frac{\xi_i + D_i}{C_i}}{\cosh \frac{D_{i+1}}{C_{i+1}}} = 1 + \frac{m_i}{\rho C_i}. \tag{49}$$

Iz enačb (48) in (49) dobimo sedaj

$$\frac{C_{i+1}}{C_i} = 1 + \frac{m_i}{\rho C_i},$$

ali

$$C_{i+1} - C_i = \frac{m_i}{\rho}, \; i = 1, 2, \ldots, n. \tag{50}$$

V enačbe (50) sedaj postavimo

$$C_1 = u \tag{51}$$

in sledi

$$C_i = u + \mu_i, \; i = 1, \ldots, n+1, \tag{52}$$

kjer je

$$\mu_i = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{m_j}{\rho}, \; i = 1, 2, \ldots, n+1. \tag{53}$$

Podobno, iz enačb (48) sledi

$$D_{i+1} = C_{i+1} \operatorname{acosh}\left(\frac{C_i}{C_{i+1}} \cosh \frac{\xi_i + D_i}{C_i}\right), \; i = 1, \ldots, n, \tag{54}$$

kjer bomo konstanto

$$D_1 = v \tag{55}$$

še določili.

Neznanki u in v bomo izračunali iz enačb (46) pri $i = n+1$ in (47) pri $i = 0$. Pri tem uvedemo še tretjo neznanko, λ, ki pa jo lahko takoj eliminiramo z odštevanjem, da dobimo enačbo

$$C_{n+1} \cosh \frac{\xi_{n+1} + D_{n+1}}{C_{n+1}} - C_1 \cosh \frac{D_1}{C_1} = y_{n+1} - y_0,$$

ali

$$C_{n+1} \cosh \frac{\xi_{n+1} + D_{n+1}}{C_{n+1}} - u \cosh \frac{v}{u} = y_{n+1} - y_0. \tag{56}$$

Ena enačba nam še manjka. To bo enačba (39), od koder sledi

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \sqrt{1 + w'^2}\, dx &= \sum_{i=1}^{n+1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \sqrt{1 + \sinh^2 \frac{x - x_{i-1} + D_i}{C_i}}\, dx = \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \cosh \frac{x - x_{i-1} + D_i}{C_i}\, dx = \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} C_i \sinh \frac{x - x_{i-1} + D_i}{C_i}\bigg|_{x_{i-1}}^{x_i} = \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} C_i \left(\sinh \frac{\xi_i + D_i}{C_i} - \sinh \frac{D_i}{C_i}\right)
\end{aligned}$$

in

$$\sum_{i=1}^{n+1} C_i \left(\sinh \frac{\xi_i + D_i}{C_i} - \sinh \frac{D_i}{C_i} \right) \quad = \quad L. \tag{57}$$

V enačbi (57) se lahko izognemo odštevanju z uporabo formule

$$\sinh a - \sinh b \quad = \quad 2 \cosh \frac{a+b}{2} \sinh \frac{a-b}{2},$$

kar pripelje do enačbe

$$\sum_{i=1}^{n+1} 2C_i \cosh \frac{\xi_i + 2D_i}{2C_i} \sinh \frac{\xi_i}{2C_i} \quad = \quad L. \tag{58}$$

Da bi bila naloga rešena, moramo rešiti sistem dveh nelinearnih enačb in sicer sistem enačb (56,58), to je

$$\begin{aligned} U(u,v) &= 0, \\ V(u,v) &= 0, \end{aligned}$$

kjer je

$$U(u,v) \quad = \quad C_{n+1} \cosh \frac{\xi_{n+1} + D_{n+1}}{C_{n+1}} - u \cosh \frac{v}{u} - \Delta y, \tag{59}$$

$$V(u,v) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n+1} 2C_i \cosh \frac{\xi_i + 2D_i}{2C_i} \sinh \frac{\xi_i}{2C_i} - L, \tag{60}$$

kjer je

$$\Delta y \quad = \quad y_{n+1} - y_0. \tag{61}$$

Za reševanje sistema bomo uporabili Netonovo metodo, to se pravi, da potrebujemo matriko odvodov

$$\begin{bmatrix} U_u & U_v \\ V_u & V_v \end{bmatrix},$$

kjer je

$$U_u \quad = \quad \frac{\partial U}{\partial C_{n+1}} \frac{\partial C_{n+1}}{\partial u} + \frac{\partial U}{\partial D_{n+1}} \frac{\partial D_{n+1}}{\partial u} - \cosh \frac{v}{u} + \frac{v}{u} \sinh \frac{v}{u}, \tag{62}$$

$$U_v \quad = \quad \frac{\partial U}{\partial C_{n+1}} \frac{\partial C_{n+1}}{\partial v} + \frac{\partial U}{\partial D_{n+1}} \frac{\partial D_{n+1}}{\partial v} - \sinh \frac{v}{u}, \tag{63}$$

$$V_u \quad = \quad \sum_{i=1}^{n+1} \left(\frac{\partial V}{\partial C_i} \frac{\partial C_i}{\partial u} + \frac{\partial V}{\partial D_i} \frac{\partial D_i}{\partial u} \right), \tag{64}$$

$$V_v \quad = \quad \sum_{i=1}^{n+1} \left(\frac{\partial V}{\partial C_i} \frac{\partial C_i}{\partial v} + \frac{\partial V}{\partial D_i} \frac{\partial D_i}{\partial v} \right) \tag{65}$$

in

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial C_{n+1}} &= \cosh\frac{\xi_{n+1}+D_{n+1}}{C_{n+1}} - \frac{\xi_{n+1}+D_{n+1}}{C_{n+1}}\sinh\frac{\xi_{n+1}+D_{n+1}}{C_{n+1}}, && (66)\\
\frac{\partial U}{\partial D_{n+1}} &= \sinh\frac{\xi_{n+1}+D_{n+1}}{C_{n+1}}, && (67)\\
\frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial C_i} &= \left(\cosh\frac{\xi_i+2D_i}{2C_i} - \frac{\xi_i+2D_i}{2C_i}\sinh\frac{\xi_i+2D_i}{2C_i}\right)\sinh\frac{\xi_i}{2C_i} - \\
&- \frac{\xi_i}{2C_i}\cosh\frac{\xi_i}{2C_i}, && (68)\\
\frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial D_i} &= \sinh\frac{\xi_i+2D_i}{2C_i}\sinh\frac{\xi_i}{2C_i}. && (69)
\end{aligned}$$

Ker po enačbi (52) velja

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C_i}{\partial u} &= 1, && (70)\\
\frac{\partial C_i}{\partial v} &= 0 && (71)
\end{aligned}$$

in če označimo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial D_i}{\partial u} &= \Gamma_i, && (72)\\
\frac{\partial D_i}{\partial v} &= \Delta_i, && (73)
\end{aligned}$$

z odvajanjem enačb (48) na u in v z upoštevanjem enačb (70,73) sledi še

$$\begin{aligned}
\cosh\frac{\xi_i+D_i}{C_i} - \frac{\xi_i+D_i}{C_i}\sinh\frac{\xi_i+D_i}{C_i} + \Gamma_i\sinh\frac{\xi_i+D_i}{C_i} &= \\
= \cosh\frac{D_{i+1}}{C_{i+1}} - \frac{D_{i+1}}{C_{i+1}}\sinh\frac{D_{i+1}}{C_{i+1}} + \Gamma_{i+1}\sinh\frac{D_{i+1}}{C_{i+1}},
\end{aligned}$$

$$\Delta_i\sinh\frac{\xi_i+D_i}{C_i} = \Delta_{i+1}\sinh\frac{D_{i+1}}{C_{i+1}}$$

ali

$$\begin{aligned}
\Gamma_{i+1} &= \frac{\cosh\frac{\xi_i+D_i}{C_i} - \frac{\xi_i+D_i}{C_i}\sinh\frac{\xi_i+D_i}{C_i} - \cosh\frac{D_{i+1}}{C_{i+1}} + \Gamma_i\sinh\frac{\xi_i+D_i}{C_i}}{\sinh\frac{D_{i+1}}{C_{i+1}}} + \\
&+ \frac{D_{i+1}}{C_{i+1}} && (74)\\
\Delta_{i+1} &= \Delta_i\frac{\sinh\frac{\xi_i+D_i}{C_i}}{\sinh\frac{D_{i+1}}{C_{i+1}}}, && (75)
\end{aligned}$$

kjer je

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= 0, && (76)\\
\Delta_1 &= 1. && (77)
\end{aligned}$$

Na osnovi enačb (62-73) dobimo sedaj

$$
\begin{aligned}
U_u &= \cosh\frac{\xi_{n+1}+D_{n+1}}{C_{n+1}} + \left(\Gamma_{n+1} - \frac{\xi_{n+1}+D_{n+1}}{C_{n+1}}\right)\sinh\frac{\xi_{n+1}+D_{n+1}}{C_{n+1}} - \\
&- \cosh\frac{v}{u} + \frac{v}{u}\sinh\frac{v}{u}, \qquad (78) \\
U_v &= \Delta_{n+1}\sinh\frac{\xi_{n+1}+D_{n+1}}{C_{n+1}} - \sinh\frac{v}{u}, \qquad (79) \\
V_u &= 2\sum_{i=1}^{n+1}\left\{\left[\cosh\frac{\xi_i+2D_i}{2C_i} + \left(\Gamma_i - \frac{\xi_i+2D_i}{2C_i}\right)\sinh\frac{\xi_i+2D_i}{2C_i}\right]\sinh\frac{\xi_i}{2C_i} - \right. \\
&- \left.\frac{\xi_i}{2C_i}\cosh\frac{\xi_i}{2C_i}\right\}, \qquad (80) \\
V_v &= 2\sum_{i=1}^{n+1}\Delta_i\sinh\frac{\xi_i+2D_i}{2C_i}\sinh\frac{\xi_i}{2C_i}. \qquad (81)
\end{aligned}
$$

Literatura

[1] I. Aganović and K. Veselić. Matematičke metode u inženjerstvu. LaTeX, Ibrahim Aganović, Zagreb and Krešimir Veselić, Hagen, 1999.

[2] F. Križanič. *Navadne diferencialne enačbe in variacijski račun*. Državna založba Slovenije, Ljubljana, 1974.

[3] E. Zakrajšek. Analiza III. In *Matematični rokopisi*. Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Slovenija, 1998.