## Metoda index calculus

$GF(23)^*$ z generatorem 5.
Izberi bazo 'majhnih' faktorjev: $B = \{-1, 2, 3\}$
in sestavi tabelo njihovih logaritmov:

| elt | -1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| log | 11 | 2 | 16 |

Iščemo logaritem elementa $\beta$ (Las Vegas).
Poišči 'gladko' potenco elementa $\beta$,
tj. $\beta^x$, ki se da razstaviti na faktorje iz $B$.





**Izračunaj log(13):** $13^2 = 169 = 2^3 \iff$
$\log 13^2 = \log 2^3 \iff 2 \log 13 \equiv 3 \log 2 \iff$
$2 \log 13 \equiv 6 \pmod{22}$

Sledi $\log 13 \equiv 3$ ali $14 \pmod{22}$.
Preverimo $\log 13 = 14$.

**Izračunaj log(14):**
$14^3 = 2^3 7^3 = 2^3 \cdot 21 = 2^3 \cdot (-2) = -2^4$.
$3 \log 14 = \log(-2^4) = \log(-1) + \log 2^4 = 11 + 4 \cdot 2 = 19$,
$\log 14 = \frac{19}{3} = 19 \cdot (-7) = (-3)(-7) = 21$.





**Izračunaj log(15):**
$15^3 = 3^3 \cdot 5^3 = 3^3 \cdot 2 \cdot 5 = (-1) \cdot 2 \cdot 3$,
$3 \log 15 = \log(-1) + \log 2 + \log 3 = 11 + 2 + 16 = 29 = 7$,
$\log 15 = \frac{7}{3} = 7(-7) = -49 = -5 = 17$.

**Izračunaj log(7):**
$7^3 = 49 \cdot 7 = 3 \cdot 7 = 21 = (-1) \cdot 2$,
$3 \log 7 = \log(-1) + \log 2 = 11 + 2 = 13$,
$\log 7 = \frac{13}{3} = 13 \cdot (-7) = 63 = -3 = 19$.





**Še en primer:** $GF(89)^*$ z gen. 3.

tabela logaritmov:

| elt | -1 | 2 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| log | 44 | 16 | 1 | 70 |

**Izračunaj log(7):**
$7^3 = 76 = 2^2 \cdot 19$, $7^5 = 3 \cdot 5^2$,
$5 \log 7 = \log 3 + 2 \log 5 = 1 + 2 \cdot 70 = 141 = 5$
$\log 7 = \frac{53}{5} = 53 \cdot (-35) = 81$.

**Izračunaj log(53):**
$53^3 = 3 \cdot 23$, $53^5 = 2^2 \cdot 17$, $53^7 = 2 \cdot 3^2$,
$7 \log 53 = \log 2 + 2 \log 3 = 16 + 2 = 8$,
$\log 53 = \frac{18}{7} = 18 \cdot (-25) = 78$.





## Metoda index calculus (splošno)

1. Izberi bazo faktorjev $\mathcal{B} = \{p_1, \ldots, p_t\}$, tako da se da dovolj veliko število elementov grupe $G$ dovolj hitro razstaviti v $\mathcal{B}$.

2. Poišči $t + 10$ lineranih zvez z logaritmi elementov iz $\mathcal{B}$:

izberi število $k < n$, izračunaj $\alpha^k$ in ga poskusi zapisati kot

$$\alpha^k = \Pi_{i=1}^t p_i^{c_i} \iff k \equiv \sum_{i=1}^t c_i \log p_i \bmod p - 1.$$





3. Sestavi tabelo logaritmov elementov iz $\mathcal{B}$.

4. Izberi naključno število $k \in \{1, \ldots, n\}$,
izračunaj $\beta\alpha^k$ in ga poskusi zapisati kot

$$\beta\alpha^k = \Pi_{i=1}^t p_i^{d_i}.$$

Končno dobimo

$$\log_\alpha \beta = (\sum_{i=1}^t d_i \log_\alpha p_i - k) \mod n.$$





Obstajajo različni slučajni algoritmi za metodo Index calculus. Ob sprejemljivih predpostavkah je njihova časovna zahtevnost za pripravljalno fazo

$$\mathcal{O}\left(e^{1+o(1))\sqrt{\log p \log\log p}}\right),$$

za izračun vsakega posameznega logaritma pa

$$\mathcal{O}\left(e^{1/2+o(1))\sqrt{\log p \log\log p}}\right).$$





## Varnost bitov pri diskretnem l

**Podatki:** $(p, \alpha, \beta, i)$,
kjer je $p$ praštevilo, $\alpha$ primitiven element gr
in $i$ poljubno naravno število, ki je manjše al
$\log_2(p-1)$.

**Cilj:** izračunaj $i$-ti bit (oznaka: $L_i(\beta)$) log
$\log_\alpha \beta$ za fiksna $\alpha$ in $p$ (začnemo šteti z desne)

$L_1(\beta)$ lahko najdemo s pomočjo Eulerjevega kriterija za kvadratne ostanke po modulu $p$:

Ker je $w^2 \equiv x^2 \pmod p \iff p|(w-x)(w+x)$ oziroma $w \equiv \pm x \pmod p$, velja

$$\{x^2 \bmod p \mid x \in \mathbb{Z}_p^*\} = \left\{\alpha^{2i} \bmod p \;\middle|\; 0 \le i \le \frac{p-3}{2}\right\}.$$

Od tod pa sledi

$$\beta \text{ kvadratni ostanek} \iff 2|\log_\alpha \beta \text{ tj. } L_1(\beta) = 0,$$

element $\beta$ pa je kvadratni ostanek če in samo če je

$$\beta^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod p.$$





Sedaj pa si oglejmo še primer, ko je $i > 1$.

Naj bo $p - 1 = 2^s t$, kjer je $t$ liho število.
Potem za $i \le s$ ni težko izračunati $L_i(\beta)$,
verjetno pa je težko izračunati $L_{s+1}(\beta)$,
kajti v nasprotnem primeru bi bilo možno uporabiti hipotetični podprogram za rešitev DLP v $\mathbb{Z}_p$.

Zgornjo trditev bomo dokazali za $s = 1$ oziroma $p \equiv 3 \pmod 4$. Tedaj sta kvadratna korena iz $\beta$ po modulu $p$ števili $\pm\beta^{(p+1)/4} \bmod p$.





Za $\beta \neq 0$ velja $L_1(\beta) \neq L_1(p-\beta)$, saj iz

$$\alpha^a \equiv \beta \pmod p \implies \alpha^{a+(p-1)/2} \equiv -\beta \pmod p,$$

ker je $(p-1)/2$ liho število.

Če je $\beta = \alpha^a$ za neko sodo potenco $a$, potem je

$$\alpha^{a/2} \equiv \beta^{(p+1)/4} \text{ ali } -\beta^{(p+1)/4} \pmod p.$$

Katera izmed teh dveh možnosti je pravilna lahko ugotovimo iz $L_2(\beta)$, saj velja

$$L_2(\beta) = L_1(\alpha^{a/2}).$$





**Algoritem za računanje diskretnega logaritma v $\mathbb{Z}_p$ za $p \equiv 3 \pmod 4$:**

1. $x_0 = L_1(\beta)$, $\beta = \beta/\alpha^{x_0} \bmod p$, $i := 1$
2. **while** $\beta \neq 1$ **do**
3. $\quad x_i = L_2(\beta)$
4. $\quad \gamma = \beta^{(p+1)/4} \bmod p$
5. $\quad$ **if** $L_1(\gamma) = x_i$ **then** $\beta = \gamma$
6. $\quad$ **else** $\beta = p - \gamma$
7. $\quad \beta = \beta/\alpha^{x_i} \bmod p$, $i := i + 1$





Dokaz pravilnosti zgornjega algoritma:

Naj bo

$$x = \log_\alpha \beta = \sum_{i \ge 0} x_i 2^i$$

in definirajmo za $i \ge 0$:

$$Y_i = \left\lfloor \frac{x}{2^{i+1}} \right\rfloor$$

in naj bo $\beta_0$ vrednost $\beta$ v koraku 1.
Za $i \ge 1$, pa naj bo $\beta_i$ vrednost $\beta$ v zadnjem koraku pri $i$-ti iteraciji **while** zanke.





Z indukcijo pokažemo za vsak $i \ge 0$:

$$\beta_i \equiv \alpha^{2Y_i} \pmod p.$$

Iz $2Y_i = Y_{i-1} - x_i$ sledi $x_{i+1} = L_2(\beta_i)$ za $i \ge 0$
ter končno še $x_0 = L_1(\beta)$. ■





## Končni obsegi

**Primer končnega obsega:** GF($2^4$)

Izberimo $f(x) = 1 + x + x^4 \in \mathrm{GF}(2)[x]$.
Naj bo $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = (a_0, a_1, a_2, a_3)$.
Elementi obsega GF($2^4$) so:

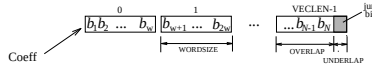
| | | | |
|---|---|---|---|
| (1000) | (1100) | (1010) | (1111) |
| (0100) | (0110) | (0101) | (1011) |
| (0010) | (0011) | (1110) | (1001) |
| (0001) | (1101) | (0111) | (0000) |





Element končnega obsega $v$ predstavimo kot v
V hardwaru ponavadi delamo v GF(2), torej je
01-vektor, ki ga hranimo v registru dolžine $n$,
in je vsota vektorjev enaka XOR po koordinat

V softwaru pa hranimo binarni vektor $v$ v
(npr. long integers)




V splošnem obstaja veliko število različnih
GF($q^m$) nad GF($q$).

Definirajmo operaciji '+' in '×' v GF($p^n$):

$$(a_0, \ldots, a_{n-1}) + (b_0, \ldots, b_{n-1}) = (c_0, \ldots, c_{n-1}),$$

kjer je $c_i = a_i + b_i \pmod p$.

$$(a_0, \ldots, a_{n-1}) \times (b_0, \ldots, b_{n-1}) = (r_0, \ldots, r_{n-1}),$$

kjer je $(r_0, \ldots, r_{n-1})$ ostanek produkta $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \times (b_0, \ldots, b_{n-1})$ pri deljenju z nerazcepnim polinomom $f(x)$ stopnje $n$.





**Primer:** $(1011) + (1001) = (0010)$

$(1011) \times (1001)$
$= (1 + x^2 + x^3)(1 + x^3) = 1 + x + x^5 + x^6$
$= (x^4 + x + 1)(x^2 + x) + (1 + x + x^2 + x^3)$
$= (1111)$





**Končni obseg** GF$(2^4)^*$: izberemo $f(x) = 1+x+x^4$. GF$(2^4)^*$ je generiran z elementom $\alpha = x$.

| | |
|---|---|
| $\alpha_0 = (1000)$ | $\alpha_8 = (1010)$ |
| $\alpha_1 = (0100)$ | $\alpha_9 = (0101)$ |
| $\alpha_2 = (0010)$ | $\alpha_{10} = (1110)$ |
| $\alpha_3 = (0001)$ | $\alpha_{11} = (0111)$ |
| $\alpha_4 = (1100)$ | $\alpha_{12} = (1111)$ |
| $\alpha_5 = (0110)$ | $\alpha_{13} = (1011)$ |
| $\alpha_6 = (0011)$ | $\alpha_{14} = (1001)$ |
| $\alpha_7 = (1101)$ | $\alpha_{15} = \alpha^0 = 1$ |





Log tabela

| log | elt | | log | elt |
|---|---|---|---|---|
| 0 | (1000) | | 8 | (1010) |
| 1 | (0100) | | 9 | (0101) |
| 2 | (0010) | | 10 | (1110) |
| 3 | (0001) | | 11 | (0111) |
| 4 | (1100) | | 12 | (1111) |
| 5 | (0110) | | 13 | (1011) |
| 6 | (0011) | | 14 | (1001) |
| 7 | (1101) | | | |





Zech log tabela

| $1 + \alpha^i = \alpha^{z(i)}$ | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $i$ | $z(i)$ | | $i$ | $z(i)$ |
| $\infty$ | 0 | | 7 | 9 |
| 0 | $\infty$ | | 8 | 2 |
| 1 | 4 | | 9 | 7 |
| 2 | 8 | | 10 | 5 |
| 3 | 14 | | 11 | 12 |
| 4 | 1 | | 12 | 11 |
| 5 | 10 | | 13 | 6 |
| 6 | 13 | | 14 | 3 |





Računanje v **polinomski bazi** je odvisno od izbire polinoma $f(x)$.

Da bi pospešili redukcijo (po množenju ali kvadriranju), si ponavadi izberemo za $f(x)$ nerazcepni **trinom** (to je $x^n + x^m + 1$).

Na žalost nerazcepni trinomi ne obstajajo za poljubno velikost končnega obsega. V tem primeru uporabljamo *pentonome* ali *helptonome*.





Znano je, da ima vsak končni obseg GF$(p^n)$ bazo nad podobsegom GF$(p)$ naslednje oblike:

$$B = \{\beta, \beta^p, \cdots, \beta^{p^{n-1}}\}.$$

V praksi so takšne baze, ki jih imenujemo **normalne**, zelo praktične za hardwersko implementacijo množenja v obsegu GF$(p^n)$, še posebej, kadar je $p = 2$.





## Implementacija

Potenciranje opravimo z algoritmom kvadr množi:

$$\alpha^{21} = (\alpha)(\alpha^4)(\alpha^{16})$$

Najprej izračunamo faktorje $\alpha$, $\alpha^2$, $\alpha^4$, $\alpha^8$, $\alpha^{16}$ nato zmnožimo.

Namesto 20 množenj smo jih potrebovali le 6.

**Ali je lahko kvadriranje hitrejše od (splošnega) množenja?**

**NE!**

$$ab = \frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2}.$$

Če je kvadriranje 'lahko', potem tudi splošno množenje ni dosti težje od seštevanja.





**DA!**

V normalni bazi končnega obsega GF($2^n$)
je kvadriranje ciklični zamik,
množenje pa ostane težko v splošnem.

V praksi so normalne baze zelo praktične za hardwarsko implementacijo množenja v obsegu GF($p^n$), še posebej, kadar je $p = 2$. in je kvadriranje *cikličen zamik*.





S tem namenom so Mullin, Onyszchuk, Vanstone in Wilson [MOVW88] definirali **optimalne normalne baze** (ONB) kot tiste baze, katerih število koeficientov v reprezentaciji elementov $\beta^{p^i+1}$, $i = 0, \cdots, n-1$ glede na bazo $B$ je natanko $2n-1$. Z drugimi besedami $n \times n$-razsežna matrika $T = (t_{mk})$, definirana z $\beta\beta^{p^m} = \sum_{k=0}^{n-1} \beta^{p^k} t_{mk}$, vsebuje natanko $2n-1$ neničelnih elementov.

Ni težko preveriti, da je število $2n-1$ absolutna spodnja meja (DN).





**Izrek (Mullin et al. [MOVW]):**
*Obseg* GF($p^n$) *vsebuje optimalno normalno bazo natanko v naslednjih primerih*

*(i)* $n+1$ *je praštevilo in* $p$ *primitiven element obsega* GF($n+1$),

*(ii)* $p = 2$, $2n+1$ *je praštevilo in bodisi*
*2 je primitiven element obsega* GF($2n+1$)
*ali*
$n$ *je lih in 2 generira kvadratne ostanke v* GF($2n+1$).





Mullin et al. [MOVW] so postavili hipotezo, da za $p = 2$ obstajajo optimalne normalne baze natanko tedaj kadar velja en izmed pogojev (i) in (ii).

Hipotezo sta leta 1992 dokazala Gao in Lenstra.