5. poglavje

Drugi javni kriptosistemi

- ElGamalovi kriptosistemi in Massey-Omura shema
- Problem diskretnega logaritma in napadi nanj
- Metoda velikega in malega koraka
- Pohlig-Hellmanov algoritem
- Index calculus
- Varnost bitov pri diskretnem logaritmu
- Končni obsegi in eliptične krivulje
- Eliptični kriptosistemi
- Merkle-Hellmanov sistem z nahrbtnikom
- Sistem McEliece

Javna kriptografija

L. 1976 sta Whit **Diffie** in Martin **Hellman** predstavila koncept kriptografije z javnimi ključi.

Le-ta za razliko od simetričnega sistema uporablja dva različna ključa, **zasebnega** in **javnega**.
V prejšnjem poglavju smo spoznali RSA (1978).

Taher ElGamal (1985): enkripcije z javnimi ključi in sheme digitalnih podpisov.

Varianta: algoritem za digitalni podpis
(**Digital Signature Algorithm – DSA**),
ki ga je prispevala vlada ZDA.

V razvoju javne kriptografije je bilo razbitih veliko predlaganih sistemov.

Le tri vrste so se ohranile in jih danes lahko smatramo za varne in učinkovite.

Glede na matematični problem, na katerem temeljijo, so razdeljene v tri skupine:

- **Sistemi faktorizacije celih števil**
  (Integer Factorization Systems)
  z RSA (Rivest-Adleman-Shamir)
  kot najbolj znanim predstavnikom,
- **Sistemi diskretnega logaritma**
  (Discrete Logarithem Systems),
  kot na primer DSA,
- **Kriptosistemi z eliptičnimi krivuljami**
  (Elliptic Curve Cryptosystems).

Problem diskretnega logaritma v grupi G

za dana $\alpha, \beta \in G$, kjer je red elementa α enak n, najdi $x \in \{0, \ldots, n-1\}$, tako da je $\alpha^x = \beta$.

Število x se imenuje **diskretni logaritem** osnove α elementa β.

Medtem ko je diskretni logaritem (verjetno) težko izračunati (v splošnem), lahko potenco izračunamo hitro (primer enosmerne funkcije).

Problem diskretnega logaritma v grupi $\mathbb{Z}_p$

Trenutno ne poznamo nobenega polinomskega algoritma za DLP.

Praštevilo p mora imeti vsaj 150 mest (500 bitov), $p-1$ pa mora imeti vsaj en "velik" prafaktor.

ElGamalovi protokoli

Delimo jih v tri razrede:

1. protokoli za izmenjavo ključev,
2. sistemi z javnimi ključi,
3. digitalni podpisi.

Te protokole lahko uporabimo s poljubno končno grupo G.

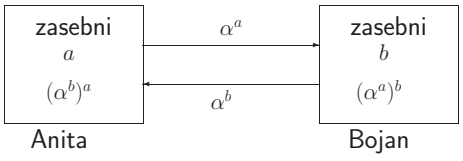
Osnovna razloga za uporabo različnih grup:

- operacije v nekaterih grupah so izvedene enostavneje
  v programih (software) in
  programski opremi (hardware)
  kot v drugih grupah,
- problem diskretnega logaritma je lahko v določeni grupi zahtevnejši kot v drugi.

Naj bo $\alpha \in G$ in naravno število n red tega elementa (t.j., $\alpha^n = 1$ in $\alpha^k \neq 1$ za vsak $k < n$).

1. Izmenjava ključev

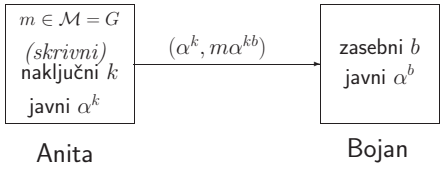
(Diffie-Hellman)



Anita in Bojan si delita skupni element grupe: $(\alpha^a)^b = (\alpha^b)^a = \alpha^{ab}$.

2. ElGamalov kriptosistem javnih ključev

(dva ključa, asimetrični sistem)



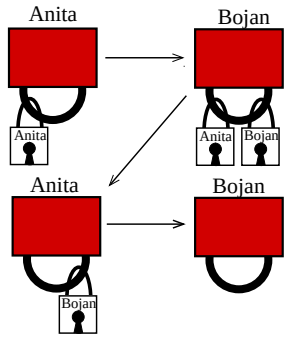
Če je $(y_1, y_2) = e_K(m, k) = (\alpha^k, m\alpha^{kb})$, potem je odšifriranje definirano z $d_K(y_1, y_2) = y_2(y_1^b)^{-1}$.

Sporočilo m lahko prebere le Bojan (s svojim b), ni pa nikjer rečeno, da mu ga je res poslala Anita (saj ni uporabila svojega zasebnega ključa).

V javni kriptografiji smatramo, da nam javni del (npr. α^k, α^b) v ničemer ne pomaga pri iskanju skrivnega/zasebnega dela (npr. k, b).

(Digitalni podpis bo obravnavan v 6. poglavju.)

Massey-Omura shema



Zgled:
za G si izberemo grupo $GF(23)^*$.

Elementi obsega $GF(23)$ so: $0, 1, \ldots, 22$.

Definirajmo:
$a + b = r_1$, kjer je r_1 vsota $a + b$ mod 23.
$ab = r_2$, kjer je r_2 produkt ab mod 23.

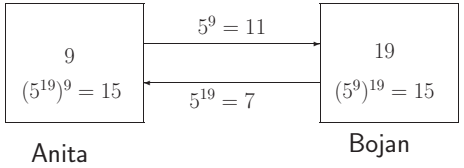
Primer: $12 + 20 = 32 = 9$, $8 \cdot 9 = 72 = 3$.

Multiplikativna grupa $GF(23)^*$

Elementi $GF(23)^*$ so elementi $GF(23)\backslash\{0\}$ in jih lahko generiramo z enim elementom:

$5^0 = 1$	$5^8 = 16$	$5^{16} = 3$
$5^1 = 5$	$5^9 = 11$	$5^{17} = 15$
$5^2 = 2$	$5^{10} = 9$	$5^{18} = 6$
$5^3 = 10$	$5^{11} = 22$	$5^{19} = 7$
$5^4 = 4$	$5^{12} = 18$	$5^{20} = 12$
$5^5 = 20$	$5^{13} = 21$	$5^{21} = 14$
$5^6 = 8$	$5^{14} = 13$	$5^{22} = 1$
$5^7 = 17$	$5^{15} = 19$	

Diffie–Hellmanov protokol v $GF(23)^*$



Anita in Bojan si sedaj delita skupen element $5^{9 \cdot 19} = 15$.

Log tabela

log	elt	log	elt	log	elt
0	1	8	16	16	3
1	5	9	11	17	15
2	2	10	9	18	6
3	10	11	22	19	7
4	4	12	18	20	12
5	20	13	21	21	14
6	8	14	13		
7	17	15	19		

Grupo G in generator α si izberemo tako, da je red elementa α velik (s tem pa je velika tudi log tabela).

Antilog tabela

elt	log	elt	log	elt	log
1	0	9	10	17	7
2	2	10	3	18	12
3	16	11	9	19	15
4	4	12	20	20	5
5	1	13	14	21	13
6	18	14	21	22	11
7	19	15	17		
8	6	16	8		

Algoritmi za računanje diskretnega logaritma

- Shankov algoritem (veliki korak – mali korak),
- Pollardov ρ-algoritem,
- Pohlig-Hellmanov algoritem,
- metoda "index calculus".

Danes si bomo ogledali samo prvega in zadnja dva.

Metoda veliki korak – mali korak:

$GF(23)^*$ z gen. 5: sestavi tabelo elementov $5^0, 5^5, 5^{10}, 5^{15}, 5^{20}$ in njihovih logaritmov.

element	1	20	9	19	12
logaritem	0	5	10	15	20

Izračunaj log(18): računaj $5 \times 18, 5^2 \times 18, \cdots$, vse dokler ne dobiš elementa iz tabele.
$5 \times 18 = 21, \quad 5^2 \times 18 = 13, \quad 5^3 \times 18 = 19.$
Iz tabele dobimo $\log(5^3 \times 18) = \log 19 = 15$.
Sledi $3 + \log 18 = 15$ oziroma $\log 18 = 12$.

$GF(89)^*$ z generatorjem 3: sestavi tabelo elementov $3^0, 3^{10}, 3^{20}, \cdots, 3^{80}$ in njihovih algoritmov.

elt	1	42	73	40	78	72	87	5	32
log	0	10	20	30	40	50	60	70	80

Izračunaj log(36): računaj $3 \times 36, 3^2 \times 36, \cdots$, vse dokler ne dobiš elementa iz tabele.
$3 \times 36 = 19$, $3^3 \times 36 = 82$, $3^5 \times 36 = 26$, $3^2 \times 36 = 57$, $3^4 \times 36 = 68$, $3^6 \times 36 = 78$.
Iz tabele preberemo $\log(3^6 \times 36) = \log 78$. Sledi $6 + \log 36 = 40$ oziroma $\log 36 = 34$.

Čim daljša je tabela, ki jo sestavimo, tem dlje časa jo je treba računati (enkratni strošek), po drugi strani pa hitreje naletimo na element v krajši tabeli.

Običajno sestavimo tabelo velikosti $m = \lfloor \sqrt{|G|} \rfloor$ in za iskanje potrebujemo $O(m)$ časa.

Pollardov ρ algoritem (s Floydovim algoritmom za iskanje ciklov)

Ima isto časovno zahtevnost kot metoda veliki korak – mali korak, porabi pa le malo spomina.

Pohlig-Hellmanov algoritem

$$p - 1 = \Pi_{i=1}^{k} p_i^{c_i}$$

za različna praštevila p_i. Vrednost $a = \log_\alpha \beta$ je natanko določena po modulu $p - 1$.

Najprej izračunamo $a \bmod p_i^{c_i}$ za vsak $i = 1, \ldots, k$ in nato izračunamo $a \bmod (p-1)$ po kitajskem izreku o ostankih.

Predpostavimo, da je q praštevilo in c največje naravno število, za katero velja

$$p - 1 \equiv 0 \pmod{q^c}.$$

Kako izračunamo

$$x = a \bmod q^c, \quad \text{kjer je } 0 \le x \le q^c - 1?$$

Zapišimo x v številskem zapisu z osnovo q:

$$x = \sum_{i=0}^{c-1} a_i q^i, \quad \text{kjer je } 0 \le a_i \le q - 1.$$

Od tod dobimo

$$a = a_0 + a_1 q + \cdots + a_{c-1} q^{c-1} + s q^c,$$

kjer je s neko naravno število in $a = a_0 + Kq$.
a_0 izračunamo iz naslednje identitete

$$\beta^{(p-1)/q} \equiv \alpha^{a_0 (p-1)/q} \bmod p.$$

Dokažimo slednjo kongruenco:

$$\begin{aligned}\beta^{(p-1)/q} &\equiv (\alpha^a)^{(p-1)/q} \bmod p \\ &\equiv (\alpha^{a_0+Kq})^{(p-1)/q} \mod p \\ &\equiv \alpha^{a_0(p-1)/q}\,\alpha^{(p-1)K} \mod p \\ &\equiv \alpha^{a_0(p-1)/q} \mod p.\end{aligned}$$

Najprej torej izračunamo

$$\beta^{(p-1)/q} \mod p.$$

Če je $\beta^{(p-1)/q} \equiv 1 \mod p$, je $a_0 = 0$, sicer pa zaporedoma računamo

$$\gamma = \alpha^{(p-1)/q} \mod p, \quad \gamma^2 \mod p, \quad \ldots,$$

vse dokler ne dobimo

$$\gamma^i \mod p = \beta^{(p-1)/q} \mod p$$

in je $a_0 = i$.

Sedaj moramo določiti $a_1, \ldots, a_{c-1}$ (če je $c > 1$). Naj bo

$$\beta_j = \beta\alpha^{a_0+a_1q+\cdots+a_{j-1}q^{j-1}} \mod p,$$

za $0 \le j \le c-1$. Tokrat velja splošnejša identiteta

$$(\beta_j)^{(p-1)/q^{j+1}} \equiv \alpha^{a_j(p-1)/q} \mod p,$$

ki jo dokažemo na enak način kot prejšnjo.

Za dani β_j ni težko izračunati a_j, omenimo pa še rekurzijo

$$\beta_{j+1} = \beta_j\alpha^{-a_jq^j} \mod p.$$

Za dano faktorizacijo števila n je časovna zahtevnost Pohlig-Hellmanovega algoritma $O(\sum_{i=0}^{k} c_i(\log n + \sqrt{p_i}))$ grupnih multiplikacij.

Primer: naj bo $p = 251$, potem je

$$n = p - 1 = 250 = 2{\cdot}5^3.$$

Naj bo $\alpha = 71$ in $\beta = 210$, torej želimo izračunati $a = \log_{71} 210$.

Modul 2: $\gamma_0 = 1$,

$$\gamma_1 \equiv \alpha^{250/2} \equiv 250 \mod p$$

in

$$\beta^{250/2} \equiv 250 \mod p,$$

torej $a_0 = 1$ in $\log_{71} 210 \equiv 1 \pmod 2$.

Modul 5: $\gamma_0 = 1$,

$$\gamma_1 \equiv \alpha^{250/5} \equiv 20 \bmod p$$

in

$$\beta^{250/5} \equiv 149 \mod p,$$

torej $a_0 = 2$. ...
$a_1 = 4 = \log_{20} 113$ in $a_2 = 2 = \log_{20} 149$,

$\log_{71} 210 \equiv 2 + 4{\cdot}5 + 2{\cdot}5^2 \equiv 72 \pmod{125}$.

Končno nam CRT da $\log_{71} 210 = 197$.