PROBLEM MERCEDESOVEGA VOZLA

Aleksandar Jurišić

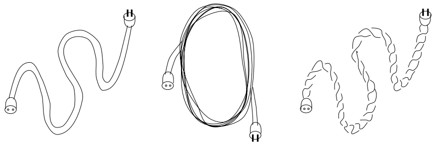
Politehnika Nova Gorica

Moravske toplice, 22. oktober, 1999

Gotovo ste že kdaj navili na ramo dolgo žico (podaljšek), da bi jo lažje spravili.

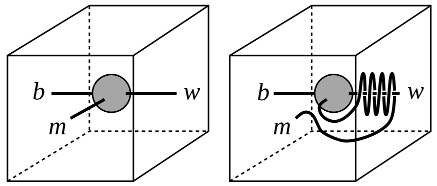
Potem pa ste jo razvili in ugotovili, da je popolnoma zvita.

Ali bi znali pojasniti ta "**čudež**"?



DEMONSTRACIJA!!!

Z izjemo koncev, ki so fiksni, lahko elastične trakove premikamo in jih raztegujemo po mili volji, vendar brez trganja.



Problem Mercedesovega vozla :
Ali lahko premaknemo elastične trakove tako, da postane trak m nekajkrat navit okoli traku w, pri tem pa ne premikamo krogle?

NAČRT

- modeliranje in delna rešitev
- invarijante
  - **(a)** v 3-dim. prostoru
  - **(b)** v votli krogli
- rešitev problema
- uporaba

MODELIRANJE

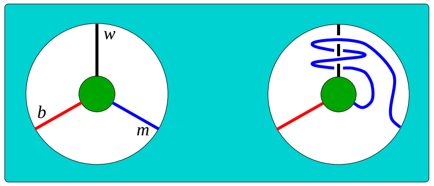
$S_i = \{x \in \mathbb{R}^3 : ||x|| = i\} \quad i = 1, 2$

H = prostor med sferama S_1 in S_2
(tj., votla krogla $S^2 \times [1, 2]$)

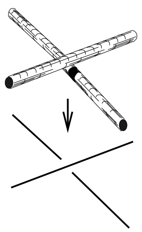
b, m, w naj bodo intervali v katerih H seka pozitivne koordinatne osi x, y, z.

1. VPRAŠANJE (Jože Vrabec, 1985/86).
Ali obstaja ambientna izotopija prostora H, ki fiksira S_1, S_2, in ki navije m dvakrat okoli w?

– ambientna izotopija in med



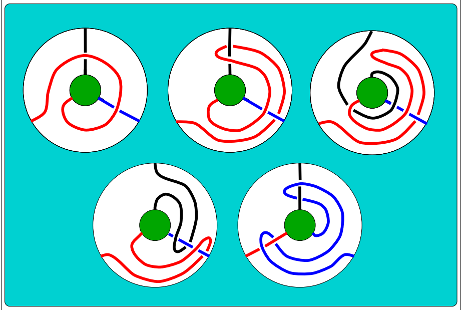
Ta slika pojasni našo izbiro imena za ta problem.



REŠITEV:

Topološki dokaz: **John Milnor** je za konstrukcijo iskane ambientne izotopije uporabil netrivialni element $\pi_1(SO(3))$.

Grafični dokaz:



Kako si lahko pomagamo s tema rešitvama pri naslednjem vprašanju?

2. VPRAŠANJE
Ali obstaja ambientna izotopija prostora H, ki fiksira S_1, S_2, in ki navije m enkrat okoli w?

ZGODOVINA

1. vprašanje:

L. 1925 je švicarski fizik **W. Pauli** pokazal (star komaj 25 let !!!), da

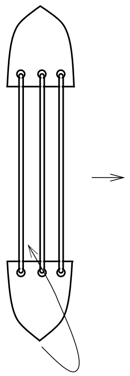
nobena elektrona ne moreta biti na istem mestu in imeti enak spin.

Za modeliranje elektronov je uporabil analizo spinorjev (glej npr. Biedenharn and Louck [BL, Ch. 2]).

Iz tega modela sledi, da se mora elektron zavrteti za <u>4π</u> da bi se vrnil v svojo začetno lego.

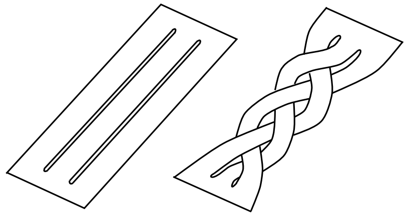
L. 1928 je angleški fizik **P. A. M. Dirac** opisal gibanje elektronov z enačbo, ki je združila <u>*kvantno mehaniko*</u> in <u>*specialno teorijo relativnosti*</u> (Diracovi trakovi).

Tangloidi so igra iz začetka tridesetih let, ki jo je sestavil **Piet Hein** in so jo dolgo igrali na inštitutu Nielsa Bohra.



Še ena uganka [**Berlekamp, Conway in Guy**]:

Brez trganja in lepljenja spletite papir (glej sliko).



Namig: začnite plesti na enem koncu, sproti pa razpletajte na drugem koncu (ta trik je verjetno zelo star in ga poznajo številni usnjarji ter taborniki).

2. vprašanje:

L. 1942 je **M. H. A. Newman** uporabil Artinovo teorijo kit.

L. 1962 je **E. Fadel** uporabil fundamentalne grupe konfiguracijskih prostorov.

Hilbertov citat:

“Umetnost ustvarjanja matematike je v tem, da poiščemo tisti poseben primer, ki vsebuje vse zametke splošnosti.”

Predstavljajmo si otroka, ki sedi za mizo, v upanju, da bo z branjem kakšne debele knjige ustregel svojim staršem.

Otrok kmalu postane utrujen in se prične igrati z modelom letala:

– *letalo mora leteti naprej dlje časa,* (letala ne letijo nazaj, kajne!) *medtem, ko ga otrok drži čvrsto v roki, vendar otrok ne sme premikati nog* (parket namreč škipa in starši bi opazili, da ne bere več),

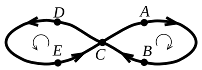
– *letalo tudi ni dobro obrniti na glavo,* saj si je otrok zamislil, da je pilot potniškega letala in tisti potniki, ki ne uporabljajo varnostnih pasov, bi se znali sicer razjeziti.

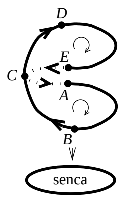
Kar naenkrat otrok ugotovi, da lahko leti po osmici (8). “**Neverjetno!!!**”, pomisli otrok,

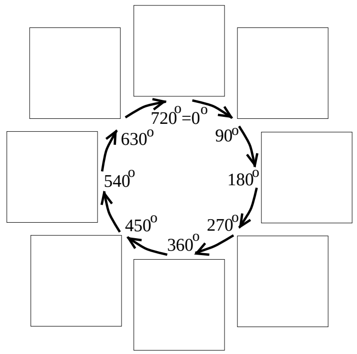
“če bi letel po krožnici, bi se mi roka zavozljala, osmica pa deluje.”

Ali bi lahko uporabili to “genijalno” rešitev pri našem problemu?

Prepognimo to osmico tako, da vidimo od zgoraj samo “krožnico” (matematiki bi rekli, da je takšna osmica krov nad krožnico).







DEMONSTRACIJA!!!

Brez prestanka lahko vrtimo tudi svojo dlan, medtem, ko je ves čas obrnjena navzgor.

INVARIJANTE.

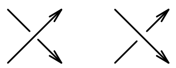
– sledimo zvijanju elastičnih trakov,

– intervale b, m, w nadomestimo z ozkimi trakovi B, M, W.

Najprej opazujemo en sam trak vložen v:

- 3-dim. krogli B^3 (Lema 1),
- votli krogli H (Lema 2).

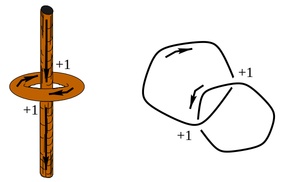
SPLETNO ŠTEVILO



$\epsilon = -1$ $\epsilon = +1$

(pravilo desne roke). Za sklenjeni in orientirani krivulji α in β naj bo **spletno število**

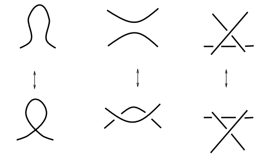
$$\boxed{\mathrm{Sp}(\alpha, \beta) := \frac{1}{2} \sum_{p \in \alpha \cap \beta} \varepsilon(p).}$$



V 19. stoletju, ko je bila teorija vozlov še v povojih, je **F. Gauss** izračunal spletna števila sistema sklenjenih krožnih žic.

Spletno število je invarianta ambientne izotopije 3-dim. prostora.

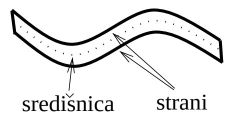
Reidemeisterjevi pomiki:

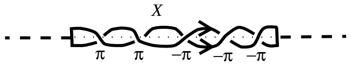


Spletno število ima pomembno vlogo pri merjenju vpliva encimov na krožne RNK (tj. tiste, ki jih lahko predstavimo s sklenjenimi trakovi v $\mathbb{R}^3$, katerih rob ima dve komponenti).

Njihova vložitev v celično jedro je zelo kompleksna. **De Witt Summers** je zapisal:

> *"Če povečamo celično jedro do velikosti košarkaške žoge, potem se pri tem RNK poveča do tankega ribiškega laksa dolgega 200km."*





Zvojno število traku X

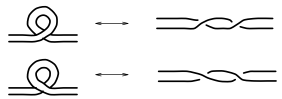
$$\boxed{\mathrm{Zv}(X) := \frac{1}{2}(\#\text{ zvojev za } \pi - \#\text{ zvojev za } -\pi)}$$

Lahko bi se izognili 2-dim. representaciji in podali Whitovo splošnejšo definicijo zvojnega števila s pomočjo integrala, ki sešteva količino zvijanja vzdolž središnice traku glej Sumners [Su2, p. 22], cf. Chinn and Steenrod [CS]. Še vedno pa ne bi bila nujno invarianta ambientne izotopije.

Če se nahajajo naši trakovi v $\mathbb{R}^3$ in so sklenjeni, potem lahko definiramo tudi **navojno število**, $\mathrm{Na}(X)$, tako da orientiramo središčnico, in priredimo, tako kot v primeru spletnega števila, predznak vsakemu presečišču, ter nato seštejemo po vseh prednakih.

Potem J. H. **Whitov konzervacijski zakon** pravi, da je vsota navojnega števila $\mathrm{Na}(X)$ in zvojnega števila $\mathrm{Zv}(X)$ enaka spletnemu številu $\mathrm{Sp}(X)$:

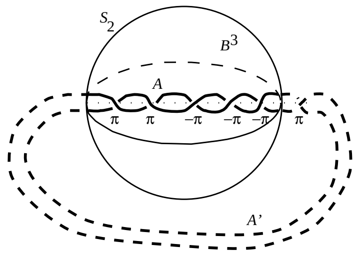
$$\mathrm{Sp}(X) = \mathrm{Na}(X) + \mathrm{Zv}(X)$$



V 3-DIMENZIONALNI KROGLI:

> **LEMA 1.** *$\mathrm{Zv}(X)$ ne moremo spremeniti z ambientno izotopijo prostora B^3.*

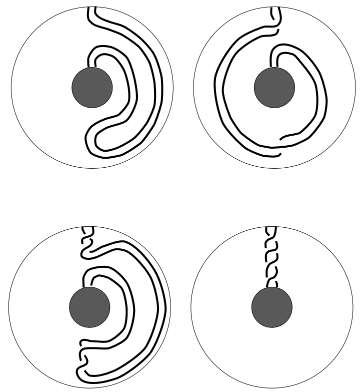
Skica dokaza:



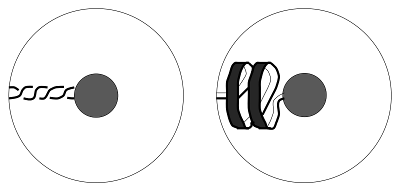
∎

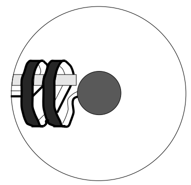
V VOTLI KROGLI:

obstaja ambientna isotopija prostora H, ki spremeni število zvojev traku A za 2:



V VOTLI KROGLI:





DEMONSTRACIJA!!!

Prišli smo do bistva problema.

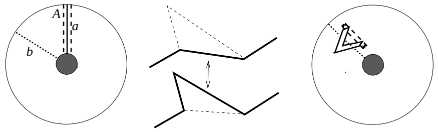
Za dokaz neeksistenčnega dela problema bomo uporabili nekaj topologije, pravzaprav se lahko omejimo le na naslednji dejstvi (glej knjigo od Burde in Zieschang-a).

1. *Ker lahko našo začetno stanje narišemo z lomljenkami, lahko narišemo z lomljenkami vsako stanje, če le dovolimo majhno deformacijo.*

2. *Če obstaja ambientna izotopija med dvema lomljenkama, potem obstaja po delih linearna ambientna izotopija med njunima stanjema.*

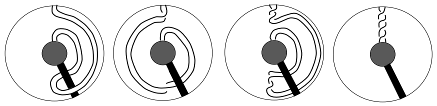
LEMA 2. *Ambientna izotopija prostora H, ki fiksira sferi S_1 in S_2 lahko spremeni $\mathrm{Zv}(A)$ za večkratnik števila 2.*

Skica dokaza:

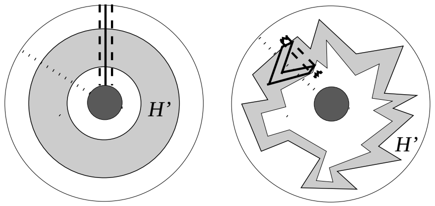


(a) (b) Delta move (c)

Privzamemo lahko, da je ambientna izotopija prostora H po delih linearna. Zato jo lahko opravimo s končnim številom Δ-pomikov, in tako bo trak A prečkal žarek b samo končno-krat.



Dva ravninska prereza:



Sledi $2|\mathrm{Zv}(A)$. ∎

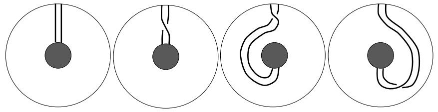
KVATERNIONI

Naj bodo i, j in k zaporedoma rotacije prostora S_1 okoli koordinatnih osi x, y in z za π radijanov.

Naj bo grupa $G \leq SO(3)$ generirana z i, j, k po modulu ekvivalenčne relacije ambientne izotopije prostora H s trakom A, ki fiksira sferi S_1 in S_2.

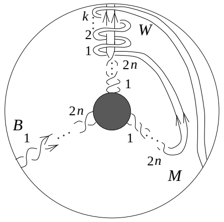
Potem velja $i^4 = j^4 = k^4 = 1$, $i^2 = j^2 = k^2$, ter $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$.

Če označimo količino i^2 z minus ena (tj. -1), potem velja tudi $ji = -k$, $kj = -i$, $ik = -j$, (glej sliko), se pravi, da smo dobili natanko **kvaternionsko grupo**.


k ik $j^{-1} = j^3 = -j$

REŠITEV. Naj bodo B, M in W ravni trakovi v prostoru H, ki se zaporedoma prilegajo intervalom b, m in w.

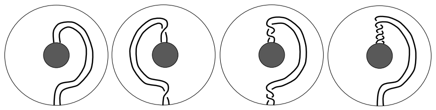
Privzemino, da je obstaja ambientna isotopija prostora H, ki fiksira sferi S_1 in S_2 in navije m k-krat okoli w.



Lema 2 $\Longrightarrow$ $\mathrm{Zv}(B) = 2n$, za $n \in \mathbb{N}$.
Lema 1 $\Longrightarrow$ $\mathrm{Zv}(W) = -2n$ & $\mathrm{Zv}(M) = -2n$.
Potem $\mathrm{Zv}(M)$ postane $-2n + 2k$.
Lema 1 $\Longrightarrow$ $\mathrm{Zv}(M) = 2n$.
Končno velja $k = 2n$. ∎

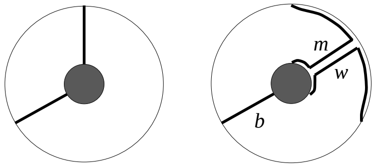
UPORABA.

D. A. Adams je sestavil napravo, ki dovaja izmenični tok rotacijskemu telesu po fleksibilni žici (tj. napravi, ki prepreči, da bi se žica zapletla in pretrgala).

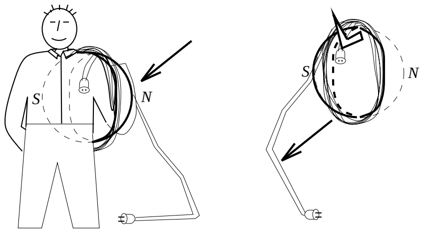


Apparatus for Providing Energy Communication Between a moving and a Stationary Terminal, U.S. Patent 3,586,413, June 22, 1971. Copies available from the U.S. Patent Office

Oglejmo si še bolj naravno rešitev 1. vprašanja.



Pojasnimo še 'fenomen', ki smo ga omenili na začetku predavanja.



(a) (b)

DEMONSTRACIJA!!!

Isti princip je uporabljen tudi v *periskopu*, tj. inštrumentu s katerim lahko opazujete objekte iza prepreke, pri tem pa se lahko ozrete naokoli brez da bi premaknili svojo glavo.