DA-naklonjen Monte Carlo algoritem je probabilistični algoritem za odločitveni problem (tj. DA/NE-problem), pri katerem je "DA" odgovor (vedno) pravilen, "NE" odgovor pa je lahko nepravilen.

Verjetnost napake za **DA-naklonjen Monte Carlo** algoritem je ε, če za vsak odgovor "DA" algoritem odgovori z "NE" z verjetnostjo kvečjemu ε.

Solovay-Strassen algoritem

1. *Izberi naključno število* $a \in \mathbb{Z}_n$, $\quad x := \left(\frac{a}{n}\right)$.
2. **if** $x = 0$ **then return**(*"n je sestavljeno število"*).
3. $y := a^{(n-1)/2} \bmod n$,
   if $x \equiv y \pmod n$
   then return(*"n je praštevilo"*)
   else return(*"n je sestavljeno število"*).

Verjetnost napake pri Solovay-Strassen algoritmu je kvečjemu 1/2 (glej nalogo 4.14 v Stinsonu).

Monte Carlo verjetnostni algoritem za odločitveni problem, ali je število sestavljeno: test ponovimo m-krat z naključnimi vrednostmi a. Verjetnost, da bo odgovor napačen m-krat zapored napačen je ε^m, vendar pa iz tega še ne moremo zaključiti, da je verjetnost, da je n praštevilo, $1-\varepsilon^m$.

Dogodek A:

"naključen lih n določene velikosti je sestavljen"

in dogodek B:

"algoritem odgovori 'n je praštevilo' m-krat zapored."

Potem očitno velja $P(B/A) \le \varepsilon^m$, vendar pa nas v resnici zanima $P(A/B)$, kar pa ni nujno isto.

Naj bo $N \le n \le 2N$ in uporabimo izrek o gostoti praštevil

$$\frac{2N}{\log 2N} - \frac{N}{\log N} \approx \frac{N}{\log N} \approx \frac{n}{\log n}\,.$$

Sledi $P(A) \approx 1 - 2/\log n$. Bayesovo pravilo pravi:

$$P(A/B) = \frac{P(B/A)P(A)}{P(B)}\,.$$

Imenovalec je enak $P(B/A)P(A) + P(B/\overline{A})P(\overline{A})$.

Upoštevajmo še $P(B/\overline{A}) = 1$ in dobimo

$$P(A/B) = \frac{P(B/A)(\log n - 2)}{P(B/A)(\log n - 2) + 2} \le$$

$$\le \frac{2^{-m}(\log n - 2)}{2^{-m}(\log n - 2) + 2} = \frac{(\log n - 2)}{\log n - 2 + 2^{m+1}},$$

kar pomeni, da gre iskana verjetnost eksponentno proti 0.

Monte Carlo verjetnostni algoritem za odločitveni problem ali je število sestavljeno:

Test ponovimo k-krat z različnimi vrednostmi a. Verjetnost, da bo ogovor k-krat zapored napačen, je za nas ocenjena z ε^k.

DN: Iz naslednjega izreka izpeljite, da za izračun Jacobijevega simbola ne potrebujemo praštevilske faktorizacije števila n.

Gaussov izrek

Izrek o kvadratni recipročnosti (1796)

Če sta p in q različni lihi praštevili, potem velja

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$$

ter za praštevilo 2

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}.$$

Zakaj je ta izrek tako pomemben?

Pomaga nam, da odgovorimo, kdaj imajo kvadratne kongruence rešitev, saj velja multiplikativno pravilo

$$\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right).$$

Predstavlja pa tudi nepričakovano zvezo med pari praštevil (pravilo, ki ureja praštevila).

Eisensteinova lema. $p>2$ *praštevilo*, $p \nmid q \in \mathbb{N}$. *Naj bo* $A := \{2,4,6,\dots,p-1\}$ *in* $r_a := qa \bmod p$ *za* $a \in A$. *Potem je*

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\sum\limits_{a\in A} r_a}.$$

Dokaz: Za $a, a' \in A$, $a \neq a'$, ne more veljati $r_a(-1)^{r_a} = r_{a'}(-1)^{r_{a'}}$ oziroma $qa \equiv \pm qa' \pmod p$, saj bi od tod sledilo $a = \pm a'$, kar pa ni mogoče.

Opozorimo še, da so vsa števila $r_a(-1)^{r_a} \bmod p$ soda, torej pretečejo ravno vse elemente množice A.

Od tod dobimo

$$\prod a \equiv (-1)^{\sum r} \prod r \pmod p,$$

očitno pa neposredno iz definicije sledi tudi

$$q^{\frac{p-1}{2}} \prod a \equiv \prod r \pmod p.$$

Torej velja $q^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\sum r} \pmod p$ in po Eulerjevem kriteriju še

$$\left(\frac{q}{p}\right) \equiv q^{\frac{p-1}{2}} \pmod p. \quad \blacksquare$$

Oglejmo si Eisensteinov *dokaz Gaussovega izreka o kvadratni recipročnosti.* Očitno velja

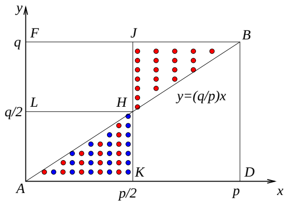
$$\sum qa = p \sum \left\lfloor \frac{qa}{p} \right\rfloor + \sum r\,.$$

Ker so elementi a vsi sodi in je p lih, velja

$$\sum r \equiv \sum \left\lfloor \frac{qa}{p} \right\rfloor \pmod 2$$

in zato iz Eisensteinove leme sledi

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\sum \left\lfloor \frac{qa}{p} \right\rfloor}.$$



Vsota $\sum \left\lfloor \frac{qa}{p} \right\rfloor$ je enaka številu celoštevilčnih točk sodo x-koordinato, ki ležijo v notranjosti trikotnika ABD. Sedaj pa si oglejmo točke z x-koordinato večjo od $p/2$. Ker pa je $q-1$ sod, je parnost števila $\left\lfloor \frac{qa}{p} \right\rfloor$ točk z isto x-koordinato pod diagonalo AB enako številu točk z isto sodo x-koordinato nad diagonalo AB.

To pa je po drugi strani enako številu točk pod diagonalo AB z liho x-koordinato $p-a$ (bijektivna korespondenca med točkami s sodo x-koordinato v BHJ in liho x-koordinato v AHK). Od tod sledi, da ima vsota $\sum \left\lfloor \frac{qa}{p} \right\rfloor$ enako parnost kot številu μ celoštevilčnih točk v notranjosti trikotnika AHK, tj.

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\mu}.$$

Če zamenjamo p in q, dobimo še število ν celoštevilčnih točk v notranjosti trikotnika AHL, kar nam da

$$\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\nu}$$

in skupaj s prejšnjo relacijo Gaussov izrek. $\blacksquare$

Še en Monte Carlo algoritem za testiranje sestavljenosti števil.

Miller-Rabinov test: *testiramo liho število* n.

1. $n-1 = 2^k m$, *kjer je* m *liho število,*
2. *izberemo naključno naravno število* $a < n$,
3. *izračunamo* $b \equiv a^m \pmod n$,
4. **if** $b \equiv 1 \pmod n$ **then** n *je praštevilo;* **exit;**
5. **for** $i = 0$ **to** $k-1$ **do**
   if $b \equiv -1 \pmod n$
   then n *je praštevilo;*
   exit;
   else $b \equiv b^2 \pmod n$,
7. *število* n *je sestavljeno.*

Izrek: *Miller-Rabinov algoritem za problem sestavljenih števil je DA-naklonjen Monte Carlo algoritem.*

Dokaz: Predpostavimo, da algoritem odgovori "n je sestavljeno število" za neko praštevilo p.

Potem je $a^m \not\equiv 1 \pmod n$.

Sledi $a^{2^i m} \not\equiv -1 \pmod n$ za $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$.

Ker je $n = 2^k m + 1$ praštevilo, iz Fermatovega izreka sledi

$$a^{2^k m} \equiv 1 \pmod n$$

in je $a^{2^{k-1} m}$ koren od 1 po modulu n.

Iz $x^2 \equiv 1 \pmod n$ oziroma $n \mid x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ sledi

$$x \equiv 1 \pmod n \quad \text{ali} \quad x \equiv -1 \pmod n$$

oziroma v našem primeru $a^{2^{k-1} m} \equiv 1 \pmod n$. Na isti način pridemo do

$$a^m \equiv 1 \pmod n,$$

kar je protislovje, saj bi algoritem v tem primeru odgovoril "n je praštevilo". $\blacksquare$

Za konec omenimo brez dokaza še, da je verjetnost napake Miller-Rabinovega algoritma kvečjemu $1/4$.

Napadi na RSA

Odličen pregledni članek "Twenty Years of Attacks on the RSA kriptosysystem", je objavil Dan Boneh v *Notices of AMS*, Feb. 1999, pp. 203-212.

Mi bomo omenili le nekaj osnovnih napadov.

Če poznamo $\varphi(n)$ in n, dobimo p, q iz naslednjega sistema dveh enačb

$$n = pq \qquad \text{in} \qquad \varphi(n) = (p-1)(q-1).$$

Odšifrirni eksponent kriptosistema RSA

Trditev: *Vsak algoritem A, ki najde odšifrirni eksponent d, lahko uporabimo kot podprogram v probabilističnem algoritmu, ki najde faktorje števila n.*

Od tod sledi, da iskanje odšifrirnega eksponenta ni nič lažje kot problem faktorizacije.

Opozorilo: če "izgubimo" d, moramo poleg šifrirnega eksponenta zamenjati tudi modul n.

Naj bo $\varepsilon \in [0, 1)$. **Las Vegas algoritem** je probabilističen algoritem, ki za dani primer problema, lahko *ne da odgovora* z verjetnostjo ε (se pravi, da konča s sporočilom "ni odgovora"). Če pa algoritem odgovori, potem je *odgovor gotovo pravilen.*

DN: Pokaži, da je povprečno pričakovano število ponovitev algoritma vse dokler ne dobimo odgovora, enako $1/(1-\varepsilon)$ (glej nalogo 4.15).

Če Las Vegas algoritem faktorizira število n z verjetnostjo vsaj ε in ga ponovimo m-krat, potem bo število n faktorizirano z verjetnostjo vsaj $1-\varepsilon^m$.

Trditev sledi iz algoritma, ki uporablja naslednje: za $n = pq$, kjer sta p, q lihi praštevili,

$$x^2 \equiv 1 \pmod{n}, \quad \text{tj.} \quad pq|(x-1)(x+1),$$

dobimo štiri rešitve; dve (trivialni) rešitvi iz enačb

$$x \equiv 1 \pmod{n} \ \text{ in } \ x \equiv -1 \pmod{n}$$

in s pomočjo kitajskega izreka o ostankih iz

$$x \equiv 1 \pmod{p}, \qquad x \equiv -1 \pmod{q}$$

in

$$x \equiv -1 \pmod{p}, \qquad x \equiv 1 \pmod{q}$$

še dve (netrivialni) rešitvi.

Algoritem za faktorizacijo z danim šifr. eksp. d

1. Izberi naključno naravno število $w < n$,
2. izračunaj $x = D(w, n)$,
3. **if** $1 < x < n$ **then exit**(uspeh $x = p$ ali $x = q$)
4. izračunaj $d = A(e, n)$ in zapiši $de - 1 = 2^s r$, r lih,
5. izračunaj $v = w^r \mod n$,
6. **if** $v \equiv 1 \pmod{n}$ **then exit**(neuspeh)
7. **while** $v \not\equiv 1 \pmod{n}$ **do** $v_0 = v$, $v = v^2 \mod n$
8. **if** $v_0 \equiv -1 \pmod{n}$ **then exit**(neuspeh)
   else izračunaj $x = D(v_0 + 1, n)$
   (uspeh: $x = p$ ali $x = q$) .

Naključne napake
(Boneh, DeMillo in Lipton, 1997)

Če uporabimo CRT in pride pri samo enem izmed C_p in C_q do napake, npr. C_p je pravilen, $\hat{C}_q$ pa ni, potem je $\hat{C} = t_p C_p + t_q \hat{C}_q$ očitno nepravilen podpis, saj je $\hat{C}^e \neq M \mod N$. Vendar pa je

$$\hat{C}^e = M \mod p, \quad \text{medtem, ko je} \quad \hat{C}^e \neq M \mod q$$

in nam $D(n, \hat{C}^e - M)$ odkrije netrivialni faktor števila n.

Rabinov kriptosistem

Temelji na tem, da je težko najti faktorizacijo produkta dveh velikih praštevil p in q.

$n = pq, \quad p \neq q, \quad p, q \equiv 3 \pmod{4}, \quad \mathcal{P} = \mathcal{C} = \mathbb{Z}_n$

$$\mathcal{K} = \{(n, p, q, B);\ 0 \leq B \leq n-1\}$$

Za izbrani ključ $K = (n, p, q, B)$ naj bo:

$$e_K(x) = x(x+B) \pmod{n},$$
$$d_K(y) = \sqrt{y + B^2/4} - B/2.$$

Javni ključ *je* (n, B), **zasebni ključ** *pa* (p, q).

Trditev: *Naj bo $\omega^2 \equiv 1 \pmod{n}$ netrivialen koren (kongruenca ima 4 rešitve: 1, -1 in še dve netrivialni), in $x \in \mathbb{Z}_n$, potem velja:*

$$e_K(\omega(x + B/2) - B/2) = e_K(x).$$

Imamo 4 čistopise, ki ustrezajo tajnopisu $e_K(x)$:

$$x, \ -x - B, \ \omega(x + \frac{B}{2}) \ \text{ in } \ -\omega(x + \frac{B}{2}).$$

V splošnem se ne da ugotoviti, kateri je pravi.

Odšifriranje

Imamo tajnopis y in iščemo x, ki zadošča naslednji enačbi:

$$x^2 + Bx \equiv y \pmod{n}.$$

Poenostavimo: $x = x_1 - B/2$,

$$x_1^2 \equiv y + B^2/4 \pmod{n}, \qquad C = y + B^2/4.$$

Iščemo kvadratne korene enačbe $\boxed{x_1^2 \equiv C \pmod{n}}$.

To je ekvivalentno sistemu:

$$\left.\begin{array}{l} x_1^2 \equiv C \pmod{p} \\ x_1^2 \equiv C \pmod{q} \end{array}\right|$$

Eulerjev izrek:
$C^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod{p}$

predpostavka: $p \equiv 3 \pmod{4}$

$\downarrow \qquad \Rightarrow \quad (\pm C^{(p+1)/4})^2 \equiv C \pmod{p}$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \equiv x_{1,2} \pmod{p} \\ x_1 \equiv x_{3,4} \pmod{q} \end{array}\right| \quad \Rightarrow$$

korena prve enačbe sta:
$x_{1,2} = \pm C^{(p+1)/4}$

korena druge enačbe pa:
$x_{3,4} = \pm C^{(q+1)/4}$

$\Downarrow$ KIO

x_1, x_2, x_3, x_4

Primer: $n = 77 = 7 \cdot 11, \quad B = 9$

$e_K(x) = x^2 + 9x \pmod{77}$

$d_K(y) = \sqrt{y + B^2/4} - B/2 = \sqrt{1+y} - 43 \pmod{77}$

Tajnopis: $y = 22$. Poiskati moramo rešitve:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 \equiv 23 \pmod{7} \\ x^2 \equiv 23 \pmod{11} \end{array}\right| \qquad \begin{array}{l} (x \equiv \pm 4 \pmod{7}) \\ (x \equiv \pm 1 \pmod{11}) \end{array}$$

Dobimo štiri sisteme dveh enačb z dvema neznankama, npr.:

$$x \equiv 4 \pmod{7}, \quad x \equiv 1 \pmod{11}$$

Po kitajskem izreku o ostankih velja:

$$x = 4 \cdot 11 \cdot (11^{-1} \bmod 7) + 1 \cdot 7 \cdot (7^{-1} \bmod 11).$$

Vse rešitve so:

$x_1 = 67 \pmod{77}, \quad x_2 = 10 \pmod{77},$
$x_3 = 32 \pmod{77}, \quad x_4 = -32 \pmod{77}.$

Odšifrirani tekst je:

$$d_K(y) = \begin{array}{ll} 67 - 43 \pmod{77} & = 24 \\ 10 - 43 \pmod{77} & = 44 \\ 32 - 43 \pmod{77} & = 66 \\ 45 - 43 \pmod{77} & = 2, \end{array}$$

vse štiri rešitve pa se zašifrirajo v 22.

Varnost Rabinovega kriptosistema

Hipotetični algoritem A za dekripcijo Rabinovega kriptosistema lahko uporabimo kot podprogram v algoritmu tipa Las Vegas za faktorizacijo števila n z verjetnostjo vsaj 1/2.

1. Izberemo r, $1 \leq r \leq n-1$,
2. $y := r^2 - B^2/4 \pmod{n} \quad (y = e_K(r - B/2))$,
3. $x := A(y)$,
4. $x_1 := x + B/2 \qquad (x_1^2 \equiv r^2 \pmod{n})$,
5. če velja $x_1 \equiv \pm r \pmod{n}$, potem ni odgovora, sicer ($x_1 \equiv \pm\omega \cdot r \pmod{n}$, kjer je $\omega \equiv 1 \pmod{n}$ netrivialni koren) $D(x_1 + r_1, n) = p$ (ali q).

V zadnjem primeru $n \,|\, (x_1 - r)(x_1 + r)$, vendar $n \nmid (x_1 - r)$ in $n \nmid (x_1 + r) \quad \Rightarrow D(x_1 + r, n) \neq 1$.

Verjetnost, da uspemo v enem koraku:

Def: $r_1 \sim r_2 \Leftrightarrow r_1^2 \equiv r_2^2 \pmod{n}$ $(r_1, r_2 \neq 0)$.
To je ekvivalenčna relacija, ekvivalenčni razredi v $Z_n \backslash \{0\}$ imajo moč 4: $[r] = \{\pm r, \pm\omega r\}$.
Vsak element iz [r] nam da isto vrednost y.
Podprogram A nam vrne x, $[x] = \{\pm x, \pm\omega x\}$,
$r = \pm x$: 4 ni odgovora $\quad r = \pm\omega x$: dobimo odgovor.

Ker izberemo r slučajno, je vsaka od teh možnosti enako verjetna $\Rightarrow$ verjetnost, da uspemo, je 1/2.

Algoritmi za faktorizacijo števil

Poskušanje
Število n delimo z vsemi lihimi števili do $\sqrt{n}$:

$i := 3$,
until $i \leq \sqrt{n}$ **repeat**
if $i \,|\, n$, potem smo našli faktor,
else $i := i + 2$.

Algoritem je uporaben za manjše n (npr. $n \leq 10^{12}$).
Časovna zahtevnost za k bitov je $2^{k/2-1}$ deljenj.

Metoda $p-1$ (Pollard, 1974)

Podatki: n (lih, želimo faktorizirati) in B (meja)

Algoritem temelji na naslednjem preprostem dejstvu:

če je p praštevilo, ki deli n, in za vsako praštevilsko potenco q, ki deli $p-1$, velja $q \leq B$, potem $(p-1)|B!$

Primer: $B = 9$, $p = 37$, $p - 1 = 36 = 2^2 \cdot 3^2$

$2^2 \leq B, 3^2 \leq B \Rightarrow 2^2 \cdot 3^2 | 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$

Algoritem

Podatki: n, B

1. $a := 2$
2. $j = 2, ..., B$ $\quad (a \equiv 2^{B!} \pmod{n})$

   $a := a^j \pmod{n}$ $\quad (\Rightarrow a \equiv 2^{B!} \pmod{p})$
3. $d = D(a-1, n)$ $\quad$ (Fermat: $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$)
4. Če velja $1 < d < n$, je d faktor števila n (saj $p|d$) sicer ni uspeha (to se zgodi, kadar je $d=1$).

Če $B \geq \sqrt{n}$, vedno uspemo, vendar algoritem ni učinkovit.

Časovna zahtevnost

- $B-1$ potenciranj po modulu n, za vsako rabimo $2\log_2 B$ množenj po modulu n,
- največji skupni delitelj z Evklid. alg.: $\mathcal{O}((\log n)^3)$.

Skupaj $\mathcal{O}(B \log B (\log n)^2 + (\log n)^3)$, kar pomeni, da je za $B \approx (\log n)^i$ algoritem polinomski.

Primer: $n{=}143$, $B{=}4$, $a \equiv 2^{2\cdot 3\cdot 4} \equiv 131 \pmod{143}$. Torej je $a-1 = 130$ in od tod $D(130, 143) = 13$.

Za varen RSA izberemo $p = 2p_1 + 1$ in $q = 2q_1 + 1$, kjer sta p_1 in q_1 praštevili.

Dixonov algoritem in kvadratno rešeto

$$(x \not\equiv \pm y \pmod{n}, x^2 \equiv y^2 \pmod{n} \implies D(x-y, n) \neq 1)$$

Sestavimo bazo faktorjev $\mathcal{B} = \{p_1, \dots, p_B\}$, kjer so p_i "majhna" praštevila. Naj bo C malo večji kot B (npr. $C = B + 10$). Najdemo C kongruenc:

$$x_j^2 \equiv p_1^{\alpha_{1,j}} \times p_2^{\alpha_{2,j}} \times \cdots \times p_B^{\alpha_{B,j}} \pmod{n}, \quad 1 \leq j \leq C$$

Označimo $a_j := (\alpha_{1,j} \bmod 2, \dots, \alpha_{B,j} \bmod 2)$.
Če najdemo podmnožico $\{a_1, \dots, a_C\}$, v kateri se vektorji seštejejo v $(0, 0, \cdots, 0) \bmod 2$, potem bo produkt x_j uporabil vsak faktor iz $\mathcal{B}$ sodo mnogokrat.

Primer: $n = 15770708441$, $\mathcal{B} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$

$$8340934156^2 \equiv 3 \times 7 \pmod{n} \qquad a_1 = (0,1,0,1,0,0)$$
$$12044942944^2 \equiv 2 \times 7 \times 13 \pmod{n}, \quad a_2 = (1,0,0,1,0,1)$$
$$2773700011^2 \equiv 2 \times 3 \times 13 \pmod{n}, \quad a_3 = (1,1,0,0,0,1)$$

Iz $a_1 + a_2 + a_3 = (0{,}0{,}0{,}0{,}0{,}0) \bmod 2$ sledi

$$(8340934156 \times 12044942944 \times 2773700011)^2 \equiv$$
$$\equiv (2 \times 3 \times 7 \times 13)^2 \pmod{n}$$

oziroma $9503435785^2 \equiv 546^2 \pmod{n}$

in $D(9503435785 - 546, 15770708441) = 115759$.

- Linearno odvisnost med vektorji $\{a_1, a_2, \cdots, a_C\}$ poiščemo npr. z Gaussovo eliminacijo.
- $C > B + 1$: vendar imamo raje več različnih odvisnosti, da bo vsaj ena dala faktorizacijo.
- Števila x_j, za katere se da $x_j^2 \pmod{n}$ faktorizirati v $\mathcal{B}$, iščemo v množici $\{x_j = j + \lfloor\sqrt{n}\rfloor \mid j = 1, 2, ...\}$ z metodo **kvadratnega rešeta** (Pomerance).
- Če je $\mathcal{B}$ velik, je večja možnost, da se da neko število faktorizirati v $\mathcal{B}$, a potrebujemo več kongruenc, da najdemo linearno odvisnost. ($|\mathcal{B}| \approx \sqrt{e^{\sqrt{\ln n \ln\ln n}}}$).

Algoritmi za faktorizacijo v praksi

Kvadratno rešeto	$O(e^{(1+o(1))\sqrt{\ln n \ln\ln n}})$
Eliptične krivulje	$O(e^{(1+o(1))\sqrt{\ln p \ln\ln p}})$
Številsko rešeto	$O(e^{(1.92+o(1))(\ln n)^{1/3}(\ln\ln n)^{2/3}})$

$o(1) \to 0$, ko $n \to \infty$
p - najmanjši praštevilski faktor n

V najslabšem primeru, ko je $p \approx \sqrt{n}$, imata kvadratno rešeto in eliptične krivulje približno enako časovno zahtevnost, sicer pa je boljše kvadratno rešeto.

Faktorizacije velikih števil s kvadratnim rešetom: ($n = p \cdot q$, $p \approx q$)

69	cifer	1983	Davis, Holdredge, Simmons (sestavljen faktor od $2^{251} - 1$)
$<$ 106	cifer	1989	Lenstra, Manasse + pomočniki
129	cifer	1994	Atkins, Graff, Lenstra, Leyland +600 pomočnikov

Fermatova števila:

$2^{2^{11}} - 1$ eliptične krivulje: 1988 (Brent)

$2^{2^9} - 1$ številsko rešeto: 1990 (Lenstra, Lenstra, Manasse, Pollard)

Prof. Vidav je leta 1997 zastavil naslednje vprašanje (morda tudi zato, da preveri trenutne moči namiznih računalnikov): poišči prafaktorje števila

$$10^{64} + 1$$

in namignil, da so vsi prafaktorji, če jih je kaj, oblike $128k + 1$.

Večina osebnih računalnikov z Mathematica/Maple hitro najde en faktor:

$$1265011073$$

55-mestni ostanek pa povzroči težave.
V Waterlooju sem končno našel hiter računalnik (cacr: Alpha ???) ter hitro programsko opremo (glej `http://www.informatik.th-darmstadt.de/TI/LiDIA/`), ki je v manj kot 10-ih minutah našla še preostala prafaktorja

$$15343168188889137818369$$

$$515217525265213267447869906815873.$$