SEMINAR IZ KRIPTOGRAFIJE

Drugi javni kriptosistemi

Aleksandar Jurišić (IMFM)

6. april 1998

Na zadnjem seminarju:

- Arijana Žitnik je končala s 4. pogl.
  - Rabinov kriptosistem
  - algoritmi za faktorizacijo
- rešitve nalog 4. poglavja
- A.J.: dodatne naloge

Današnji načrt

- Drugi javni kriptosistemi (5. pogl.)
  - ElGamalov kriptosistem in diskretni logaritem
  - končni obsegi
  - eliptični kriptosistemi
- rešitve nalog 4. poglavja ter dodatnih nalog s prejšnjega predavanja

JAVNA KRIPTOGRAFIJA

L. 1976 sta Whit **Diffie** in Martin **Hellman** predstavila koncept kriptografije z javnimi ključi.

Le-ta za razliko od simetrčnega sistema uporablja dva različna ključa, **privatnega** in pa **javnega**. V prejšnjem poglavju smo spoznali RSA (1978).

Taher ElGamal (1985): enkripcije z javnimi ključi in sheme digitalnih podpisov.

Varianta: algoritem za digitalni podpis (**Digital Signature Algorithm – DSA**), ki ga je prispevala vlada ZDA.

V razvoju javne kriptografije je bilo razbitih veliko predlaganih sistemov.

Le tri vrste so se obdržale in jih lahko danes smatramo za varne in učinkovite.

Glede na matematični problem na katerem temeljijo, so razdeljene v tri skupine:

- **Sistemi faktorizacije celih števil** (Integer Factorization Systems) z RSA (Rivest-Adleman-Shamir) kot najbolj znanim predstavnikom.
- **Sistemi diskretnega algoritma** (Discrete Logarithem Systems), kot na primer DSA.
- **Kripto sistemi z eliptičnimi krivuljami** (Eliptic Curve Cryptosystems)

Problem diskretnega logaritma v grupi G:

za dana $\alpha, \beta \in G$, kjer je red elementa α enak n, najdi $x \in \{0, \dots, n-1\}$, tako da je $\alpha^x = \beta$.

Število x se imenuje **diskretni logaritem** osnove α elementa β.

Medtem, ko je diskretni logaritem (verjetno) težko izračunati (v splošnem), lahko potenco izračunamo hitro (primer enosmerne funkcije).

Osnovna razloga za uporabo različnih grup:

- operacije v nekaterih grupah so izvedene enostavneje v programih (software) in programski opremi (hardware) kot v drugih grupah,
- problem diskretnega logaritma je v določeni grupi lahko zahtevnejši kot v drugi.

ElGamal-ovi protokoli

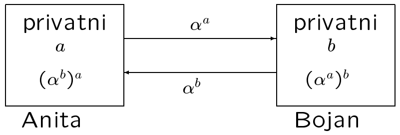
Delimo jih v tri razrede:

1. protokoli za izmenjavo ključev,
2. sistemi z javnimi ključi,
3. digitalni podpisi.

Te protokole lahko uporabimo s poljubno končno grupo G. Naj bo $\alpha \in G$ in naravno število n red tega elementa (t.j., $\alpha^n = 1$ in $\alpha^k \neq 1$ za vsak $k < n$).

1. IZMENJAVA KLJUČEV

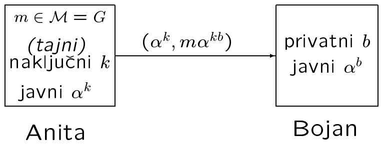
(Diffie-Hellman)



Anita in Bojan si delita skupni element grupe: $(\alpha^a)^b = (\alpha^b)^a = \alpha^{ab}$.

2. SISTEM JAVNIH KLJUČEV

(dva ključa, asimetrični sistem)



Sporočilo m lahko prebere le Bojan, ni pa nikjer rečeno, da mu ga je res poslala Anita (saj ni uporabila svojega privatnega ključa).

V javni kriptografiji smatramo, da nam javni del (npr. α^k, α^b) v ničemer ne pomaga pri iskanju tajnega/privatnega dela (npr. k, b).

(Digitalni podpis bo obravnavan v 6. poglavju.)

Zgled:
za G si izberemo grupo $GF(23)^*$.

Elementi obsega $GF(23)$ so: $0, 1, \ldots, 22$.

Definirajmo:
$a + b = r_1$, kjer je r_1 vsota $a + b$ mod 23.
$ab = r_2$, kjer je r_2 produkt ab mod 23.

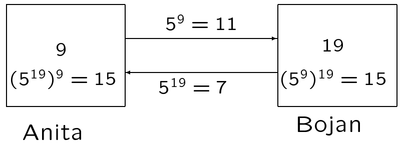
Primer: $12 + 20 = 32 = 9$, $8 \cdot 9 = 72 = 3$.

Multiplikativna grupa $GF(23)^*$

Elementi $GF(23)^*$ so elementi $GF(23)\backslash\{0\}$, in jih lahko generiramo z enim elementom:

$5^0 = 1$	$5^8 = 16$	$5^{16} = 3$
$5^1 = 5$	$5^9 = 11$	$5^{17} = 15$
$5^2 = 2$	$5^{10} = 9$	$5^{18} = 6$
$5^3 = 10$	$5^{11} = 22$	$5^{19} = 7$
$5^4 = 4$	$5^{12} = 18$	$5^{20} = 12$
$5^5 = 20$	$5^{13} = 21$	$5^{21} = 14$
$5^6 = 8$	$5^{14} = 13$	$5^{22} = 1$
$5^7 = 17$	$5^{15} = 19$	

Diffie–Hellmanov protokol v $GF(23)^*$



Anita in Bojan si sedaj delita skupen element $5^{9 \cdot 19} = 15$.

Log tabela

log	elt	log	elt	log	elt
0	1	8	16	16	3
1	5	9	11	17	15
2	2	10	9	18	6
3	10	11	22	19	7
4	4	12	18	20	12
5	20	13	21	21	14
6	8	14	13		
7	17	15	19		

Grupo G in generator α si izberemo tako, da je red elementa α velik (s tem pa je velika tudi log tabela).

Antilog tabela

elt	log	elt	log	elt	log
1	0	9	10	17	7
2	2	10	3	18	12
3	16	11	9	19	15
4	4	12	20	20	5
5	1	13	14	21	13
6	18	14	21	22	11
7	19	15	17		
8	6	16	8		

Algoritmi za računanje diskretnega logaritma

- Shankov algoritem (veliki korak – mali korak),
- Pollardov ρ algoritem,
- Pohlig-Hellmanov algoritem,
- metoda "index calculus".

Danes si bomo ogledali samo prvega in zadnjega.

Metoda veliki korak – mali korak:
$GF(23)^*$ z gen. 5: sestavi tabelo elementov $5^0, 5^5, 5^{10}, 5^{15}, 5^{20}$ in njihovih logaritmov.

element	1	20	9	19	12
logaritem	0	5	10	15	20

Izračunaj log(18): računaj $5 \times 18, 5^2 \times 18, \cdots$ vse dokler ne dobiš element iz tabele.
$5 \times 18 = 21$, $5^2 \times 18 = 13$, $5^3 \times 18 = 19$.
Iz tabele dobimo $\log(5^3 \times 18) = \log 19 = 15$.
Sledi $3 + \log 18 = 15$ oziroma $\log 18 = 12$.

$GF(89)^*$ z generatorjem 3: sestavi tabelo elementov $3^0, 3^{10}, 3^{20}, \cdots, 3^{80}$ in njihovih algoritmov.

elt	1	42	73	40	78	72	87	5	32
log	0	10	20	30	40	50	60	70	80

Izračunaj log(36): računaj $3 \times 36, 3^2 \times 36, \cdots$ vse dokler ne dobiš element iz tabele.
$3 \ \times 36 = 19$, $3^3 \times 36 = 82$, $3^5 \times 36 = 26$,
$3^2 \times 36 = 57$, $3^4 \times 36 = 68$, $3^6 \times 36 = 78$.
Iz tabele preberemo $\log(3^6 \times 36) = \log 78$.
Sledi $6 + \log 36 = 40$ oziroma $\log 36 = 34$.

Daljša je tabela, ki jo sestavimo, dlje časa jo je bilo treba računati (enkratni strošek), po drugi strani pa hitreje naletimo na element v tabeli.

Običajno sestavimo tabelo velikosti $m = \lfloor\sqrt{|G|}\rfloor$ in za iskanje potrebujemo $O(m)$ časa.

Metoda index calculus

$GF(23)^*$ z generatorem 5:
Izberi bazo 'majhnih' faktorjev:
$B = \{-1, 2, 3\}$
in sestavi tabelo njihovih logaritmov:

elt	-1	2	3
log	11	2	16

Iščemo logaritem elementa β (Las Vegas).
Poišči 'gladko' potenco elementa β,
tj. β^x, ki se da razstaviti na faktorje iz B.

Izračunaj log(13): $13^2 = 161 = 2^3 \iff \log 13^2 = \log 2^3 \iff 2\log 13 \equiv 3\log 2 \iff 2\log 13 \equiv 6 \pmod{22}$
Sledi $\log 13 \equiv 3$ ali $14 \pmod{22}$
Preverimo $\log 13 = 14$.

Izračunaj log(14):
$14^3 = 2^3 7^3 = 2^3 \cdot 21 = 2^3 \cdot (-2) = -2^4$.
$3\log 14 = \log(-2^4) = \log(-1) + \log 2^4 = 11 + 4 \cdot 2 = 19$,
$\log 14 = \frac{19}{3} = 19 \cdot (-7) = (-3)(-7) = 21$.

Izračunaj log(15):
$15^3 = 3^3 \cdot 5^3 = 3^3 \cdot 2 \cdot 5 = (-1) \cdot 2 \cdot 3$,
$3\log 15 = \log(-1) + \log 2 + \log 3 = 11 + 2 + 16 = 29 = 7$,
$\log 15 = \frac{7}{3} = 7(-7) = -49 = -5 = 17$.

Izračunaj log(7):
$7^3 = 49 \cdot 7 = 3 \cdot 7 = 21 = (-1) \cdot 2$,
$3\log 7 = \log(-1) + \log 2 = 11 + 2 = 13$,
$\log 7 = \frac{13}{3} = 13 \cdot (-7) = 63 = -3 = 19$.

Še en primer: $GF(89)^*$ z gen. 3.

tabela logaritmov:

elt	-1	2	3	5
log	44	16	1	70

Izračunaj log(7):
$7^3 = 76 = 2^2 \cdot 19$, $7^5 = 3 \cdot 5^2$,
$5 \log 7 = \log 3 + 2 \log 5 = 1 + 2 \cdot 70 = 141 = 53$,
$\log 7 = \frac{53}{5} = 53 \cdot (-35) = 81$.

Izračunaj log(53):
$53^3 = 3 \cdot 23$, $53^5 = 2^2 \cdot 17$, $53^7 = 2 \cdot 3^2$,
$7 \log 53 = \log 2 + 2 \log 3 = 16 + 2 = 8$,
$\log 53 = \frac{18}{7} = 18 \cdot (-25) = 78$.

Primer: $GF(2^4)$

Izberimo $f(x) = 1 + x + x^4 \in GF(2)[x]$. Naj bo $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = (a_0, a_1, a_2, a_3)$. Elementi obsega $GF(2^4)$ so:

(1000)	(1100)	(1010)	(1111)
(0100)	(0110)	(0101)	(1011)
(0010)	(0011)	(1110)	(1001)
(0001)	(1101)	(0111)	(0000)

Definirajmo operaciji '+' in '×' v $GF(p^n)$:

$$(a_0, \ldots, a_{n-1}) + (b_0, \ldots, b_{n-1}) = (c_0, \ldots, c_{n-1})$$

kjer je $c_i = a_i + b_i \pmod p$.

$$(a_0, \ldots, a_{n-1}) \times (b_0, \ldots, b_{n-1}) = (r_0, \ldots, r_{n-1})$$

kjer je $(r_0, \ldots, r_{n-1})$ ostanek produkta $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \times (b_0, \ldots, b_{n-1})$ pri deljenju z nerazcepnim polinomom $f(x)$ stopnje n.

Primer: $(1011) + (1001) = (0010)$.

$(1011) \times (1001)$
$= (1 + x^2 + x^3)(1 + x^3) = 1 + x + x^5 + x^6$
$= (x^4 + x + 1)(x^2 + x) + (1 + x + x^2 + x^3)$
$= (1111)$.

$GF(2^4)^*$

Izberimo $f(x) = 1 + x + x^4$. $GF(2^4)^*$ je lahko generiran z enim elementom $\alpha = x$.

$\alpha_0 = (1000)$	$\alpha_8 = (1010)$
$\alpha_1 = (0100)$	$\alpha_9 = (0101)$
$\alpha_2 = (0010)$	$\alpha_{10} = (1110)$
$\alpha_3 = (0001)$	$\alpha_{11} = (0111)$
$\alpha_4 = (1100)$	$\alpha_{12} = (1111)$
$\alpha_5 = (0110)$	$\alpha_{13} = (1011)$
$\alpha_6 = (0011)$	$\alpha_{14} = (1001)$
$\alpha_7 = (1101)$	$\alpha_{15} = \alpha^0 = 1$

Log tabela

log	elt		log	elt
0	(1000)		8	(1010)
1	(0100)		9	(0101)
2	(0010)		10	(1110)
3	(0001)		11	(0111)
4	(1100)		12	(1111)
5	(0110)		13	(1011)
6	(0011)		14	(1001)
7	(1101)			

Zech log tabela

$1 + \alpha^i = \alpha^{z(i)}$				
i	$z(i)$		i	$z(i)$
∞	0		7	9
0	∞		8	2
1	4		9	7
2	8		10	5
3	14		11	12
4	1		12	11
5	10		13	6
6	13		14	3

Grupa na eliptični krivulji

Za kriptografijo sta jo leta 1985 prva predlagala Neal Koblitz in Victor Miller.

Eliptična krivulja E nad obsegom $GF(p)$ je def. z Weierstrassovo enačbo:

$$y^2 = x^3 + ax + b$$

kjer sta $a, b \in \mathbb{Z}_p$ in $4a^3 + 27b^2 \not\equiv 0 \pmod p$
($GF(2^m)$: $y^2 + xy = x^3 + ax^2 + b$)

Množica $E(\mathbb{Z}_p)$ je sestavljena iz točk (x, y), $x, y \in \mathbb{Z}_p$, katere ustrezajo zgornji enačbi, vključno s točko neskončno $\mathcal{O}$.

THEOREM (Hasse).

$$p + 1 - 2\sqrt{p} \le |E| \le p + 1 + 2\sqrt{p}$$

Schoofov
algoritem izračuna $|E|$ v $O((\log p)^8)$ bitnih operacijah.

Grupa E je izomorfna $\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2}$, kjer $n_2 | n_1$ in $n_2 | (p-1)$, tako da lahko najdemo ciklično podgrupo $\mathbb{Z}_{n_1}$, ki jo uporabimo za ElGamalov kriptosistem.

Zaenkrat ne znamo uporabiti metodo index calculus pri diskretnem logaritmu na eliptični grupi (razen če ni eliptična krivulja supersingularna). Zato si lahko izberemo eliptično krivuljo s ciklično podgrupo velikosti (samo) okoli 2^{160}.

Pravilo za seštevanje:

1. $P + \mathcal{O} = \mathcal{O} + P = P$ za vsak $P \in E(\mathbb{Z}_p)$.
2. Če je $P = (x, y) \in E(\mathbb{Z}_p)$, potem je $(x, -y) =: -P \in E(\mathbb{Z}_p)$ in $P + (-P) = \mathcal{O}$.

3. $P = (x_1, y_1) \in E(\mathbb{Z}_p)$ in $Q = (x_2, y_2) \in E(\mathbb{Z}_p)$, kjer $P \ne -Q$. Potem je $P + Q = (x_3, y_3)$, kjer je $x_3 = \lambda^2 - x_1 - x_2$, $y_3 = \lambda(x_1 - x_3) - y_1$, in

$$\lambda = \begin{cases} \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} & \text{če } P \ne Q \\[2ex] \dfrac{3x_1^2 + a}{2y_1} & \text{če } P = Q. \end{cases}$$

Primer: EC nad $GF(2^4)$

- Naj bo $GF(2^4)$ generiran s korenom $\alpha = x$ nerazcepnega polinoma $f(x) = 1 + x + x^4$.
- $E_1 : \quad y^2 + xy = x^3 + \alpha^4 x^2 + 1$.
  Velja: $j(E_1) \ne 0$.
- $E_1(GF(2^4))$
  $= \{(x, y) : y^2 + xy = x^3 + \alpha^4 x^2 + 1\} \cup \{\mathcal{O}\}$.
- $E_1(GF(2^4))$ tvori "grupo" za seštevanje, z $\mathcal{O}$ kot identiteto.

Rešitve enačbe:

$$y^2 + xy = x^3 + \alpha^4 x^2 + 1 \quad \text{nad GF}(2^4)$$

$(0, 1)$	
$(1, \alpha^6)$	$(1, \alpha^{13})$
(α^3, α^8)	(α^3, α^{13})
(α^5, α^3)	(α^5, α^{11})
(α^6, α^8)	(α^6, α^{14})
(α^9, α^{10})	(α^9, α^{13})
(α^{10}, α^1)	(α^{10}, α^8)
$(\alpha^{12}, 0)$	$(\alpha^{12}, \alpha^{12})$

Primer seštevanja v $E_1(GF(2^4))$:

Let $P_1 = (\alpha^6, \alpha^8)$, $P_2 = (\alpha^3, \alpha^{13})$.

- $P_1 + P_2 = (x_3, y_3)$.

$$\begin{aligned} x_3 &= \left(\frac{\alpha^8 + \alpha^{13}}{\alpha^6 + \alpha^3}\right)^2 + \frac{\alpha^8 + \alpha^{13}}{\alpha^6 + \alpha^3} + \alpha^6 + \alpha^3 + \alpha^4 \\ &= \left(\frac{\alpha^3}{\alpha^2}\right)^2 + \frac{\alpha^3}{\alpha^2} + \alpha^2 + \alpha^4 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_3 &= \left(\frac{\alpha^8 + \alpha^{13}}{\alpha^6 + \alpha^3}\right)(\alpha^6 + 1) + 1 + \alpha^8 \\ &= \left(\frac{\alpha^3}{\alpha^2}\right)\alpha^{13} + \alpha^2 = \alpha^{13} \end{aligned}$$

- $2P_1 = (x_3, y_3)$.

$$\begin{aligned} x_3 &= (\alpha^6)^2 + \frac{1}{(\alpha^6)^2} \\ &= \alpha^{12} + \alpha^3 = \alpha^{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_3 &= (\alpha^6)^2 + \left(\alpha^6 + \frac{\alpha^8}{\alpha^6}\right)\alpha^{10} + \alpha^{10} \\ &= \alpha^3 + (\alpha^6 + \alpha^2)\alpha^{10} = \alpha^8 \end{aligned}$$

Še en primer EC nad $GF(2^4)$

- Naj bo $GF(2^4)$ generiran s korenom $\alpha = x$ nerazcepnega polinoma $f(x) = 1 + x + x^4$.
- $E_2: \quad y^2 + \alpha^6 y = x^3 + \alpha^3 x + 1$. Velja $j(E_2) = 0$.
- $E_2(GF(2^4))$ $= \{(x, y) : y^2 + \alpha^6 y = x^3 + \alpha^3 x + 1\} \cup \{\mathcal{O}\}$.
- $E_2(GF(2^4))$ tvori "grupo" za seštevanje z $\mathcal{O}$ kot identiteto.

Rešitve enačbe

$$y^2 + \alpha^6 y = x^3 + \alpha^3 x + 1$$

nad $GF(2^4)$.

Ta enačba ima samo 8 rešitev:

(α^2, α^8)	(α^2, α^{14})
$(\alpha^{10}, 1)$	$(\alpha^{10}, \alpha^{13})$
$(\alpha^{11}, 0)$	(α^{11}, α^6)
(α^{13}, α^5)	(α^{13}, α^9)

Primer: EC nad $GF(23)$

- Naj bo $p = 23$.
- $y^2 = x^3 + x + 1$, (i.e $a = 1$, $b = 1$). Velja: $27a^3 + 16b^2 = 3 \cdot 1^3 + 16 \cdot 1^3 = 19 \neq 0$ v $GF(23)$
- $E_3(GF(23)) = \{(x, y) : y^2 = x^3 + x + 1\} \cup \{\mathcal{O}\}$.
- $E_3(GF(23))$ tvori "grupo" za seštevanje z $\mathcal{O}$ kot identiteto.

Rešitve enačbe

$$y^2 = x^3 + x + 1.$$

nad $\mathbb{Z}_{23}$.

(0, 1)	(6, 4)	(-11,-4)
(0,-1)	(6,-4)	(-10, 7)
(1, 7)	(7, 11)	(-10,-7)
(1,-7)	(7,-11)	(-6, 3)
(3, 10)	(9, 7)	(-6,-3)
(3,-10)	(9,-7)	(-5, 3)
(4, 0)	(11, 3)	(-5,-3)
(5, 4)	(11,-3)	(-4, 5)
(5,-4)	(-11,4)	(-4,-5)

Primer seštevanja na $E_3(GF(23))$

1. $P_1 = (3, 10)$, $P_2 = (9, 7)$, $P_1 + P_2 = (x_3, y_3)$.

   $\lambda = \frac{7-10}{9-3} = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2} = 11 \in \mathbb{Z}_{23}$.

   $x_3 = 11^2 - 3 - 9 = 6 - 3 - 9 = -6$,
   $y_3 = 11(3 - (-6)) - 10 = 11(9) - 10$
   $= 89 = 20 = -3$.
   Sledi $P_1 + P_2 = (-6, -3)$.

2. $P_1 = (3, 10)$, $2P_1 = (x_3, y_3)$,

   $\lambda = \frac{3(3^2)+1}{20} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} = 6$.

   $x_3 = 6^2 - 6 = 30 = 7$,
   $y_3 = 6(3 - 7) - 10 = -24 - 10 = -11$.
   Sledi $2P_1 = (7, -11)$.

$P = (0, 1)$ je generator

P=(0, 1)	
$2P$=(6,-4)	$15P$=(9, 7)
$3P$=(3,-10)	$16P$=(-6,3)
$4P$=(-10,-7)	$17P$=(1,7)
$5P$=(-5,3)	$18P$=(12,-4)
$6P$=(7,11)	$19P$=(-4,5)
$7P$=(11,3)	$20P$=(5,4)
$8P$=(5,-4)	$21P$=(11,-3)
$9P$=(-4,-5)	$22P$=(7 -11)
$10P$ =(12,4)	$23P$=(-5,-3)
$11P$=(1,-7)	$24P$=(-10,7)
$12P$=(-6,-3)	$25P$=(3,10)
$13P$=(9,-7)	$26P$=(6,4)
$14P$=(4,0)	$27P$=(0,-1)

Log – antilog tabela

log	elt		log	elt
0	$\mathcal{O}$		14	(4,0)
1	(0,1)		15	(9,7)
2	(6,-4)		16	(-6,3)
3	(3,-10)		17	(1,7)
4	(-10,-7)		18	(-11,-4)
5	(-5,3)		19	(-4,5)
6	(7,11)		20	(5,4)
7	(11,3)		21	(11,-3)
8	(5,-4)		22	(7,-11)
9	(-4,-5)		23	(-5,-3)
10	(-11,4)		24	(-10,7)
11	(1,-7)		25	(3,10)
12	(-6,-3)		26	(6,4)
13	(9,-7)		27	(0,-1)

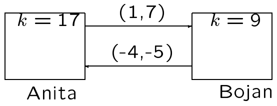
Log – antilog tabela

elt	log	elt	log
$\mathcal{O}$	0	(9,7)	15
(0,1)	1	(9,-7)	13
(0,-1)	27	(11,3)	7
(1,7)	17	(11,-3)	21
(1,-7)	11	(-11,4)	10
(3,10)	25	(-11,-4)	18
(3,-10)	3	(-10,7)	24
(4,0)	14	(-10,-7)	4
(5,4)	20	(-6,3)	16
(5,-4)	8	(-6,-3)	12
(6,4)	26	(-5,3)	5
(6,-4)	2	(-5,-3)	23
(7,11)	6	(-4,5)	19
(7,-11)	22	(-4,-5)	9

Diffie–Hellmanov protocol nad $E(GF(23))$

Javni parametri:

$$y^2 = x^3 + x + 1$$
$$P = (0,1)$$



- Anita izračuna $17P = (1,7)$
- Bojan izračuna $9P = (-4,-5)$
- Anita izračuna $17(-4,-5) = (6,4)$
- Bojan izračuna $9(1,7) = (6,4)$.

Anita in Bojan imata skupno točko $(6,4)$.

Računanje logaritmov

Izračunaj $\log_P(9,7)$.

Izračunaj naslednjo tabelo:

elt	(0,1)	(7,11)	(-6,-3)	(12,-4)	(-10,7)
log	1	6	12	18	24

Če je $k = \log_P(9,7)$, potem velja $kP = (9,7)$.

- Računaj
  $(9,7)+P$, $(9,7)+2P$, $(9,7)+3P, \ldots$
  vse dokler ne dobiš element iz tabele.
- Dobimo: $(9,7)+3P = (12,-4)$.
- Iz tabele preberemo $(12,-4) = 18P$
- Sledi $(9,7)+3P = 18P$
  oziroma $(9,7) = 15P$, torej $k = 15$

- Če je $|E(GF(q))| = n$ lahko posplošimo metodo za $E(GF(23))$ na naslednji način:
  - naredi tabelo (i, iP) velikosti $\sqrt{n}$,
  - za iskanje logaritma elementa v tej tabeli potrebujemo največ $\sqrt{n}$ seštevanj točk.
- Če je $q \approx 10^{40}$, potem je $|E(GF(q))| \approx 10^{40}$ in ima tabela 10^{20} vrstic.
  To je očitno <u>popolnoma nedosegljivo</u>.

Prihodnjič (20. apr) bo seminar vodil T. Klobučar:
Bojan Barlič nadaljuje s 5. poglavjem:

- Markle-Hellmanov sistem (nahrbtnik)
- McEliece sistem (error-correcting codes)

Do naslednič

- preberite 5. poglavje (str. 191-198)

- nadaljujte z reševanjem nalog
  4. in 5. poglavja

Stinsonovega učbenika
Cryptography, Theory and Practice