UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
Matematika - raziskovalna smer

Štefko Miklavič

RAZDALJNO-REGULARNI GRAFI MAJHNEGA PREMERA

Magistrsko delo

Ljubljana, 2002

Zahvaljujem se mentorju prof. dr. Aleksandarju Jurišiću
za zgledno in vestno mentorstvo.

Zahvaljujem se ženi Leonidi za potrpljenje in proste četrtke.

Izjavljam, da sem avtor pričujočega magistrskega dela.

Štefko Miklavič

Kazalo

PROGRAM MAGISTRSKEGA DELA

Razdaljno-regularni grafi majhnega premera

Delo naj predstavi klasične družine in klasifikacijo razdaljno-regularnih grafov (glej Brouwer, Cohen in Neumaier ter Godsil). Glavni cilji so:

(a) seznam parametrov antipodnih razdaljno-regularnih grafov premera 4, ki ustrezajo vsem znanim potrebnim pogojem,

(b) ocena stopnje antipodnih razdaljno-regularnih grafov premera 4 (glede na število vozlišč), glej domnevo v Jurišić (str. 54) oziroma Jurišić in Koolen,

(c) ocena premera razdaljno-regularnega grafa (glede na stopnjo in glede na število vozlišč).

Izdela naj se tudi podroben dokaz faktorizacije determinante Töplitzove matrike, glej Jurišić (str. 116).

Literatura:

A. E. Brouwer, A. M. Cohen, and A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1989.

C. D. Godsil, *Algebraic combinatorics*, Chapman and Hall, New York (1993).

A. Jurišić, *Antipodal Covers.* Ph.D. Thesis, University of Waterloo (1995).

A. Jurišić and J. Koolen, Krein parameters and antipodal tight graphs with diameter 3 and 4, *Discrete Math.* **244**(1-3)(2002), 181-202.

Mentor: prof. dr. Aleksandar Jurišić

Povzetek

V tem delu vpeljemo razdaljno-regularne grafe. Ogledamo si njihove klasične družine ter razvijemo osnovno teorijo, ki je potrebna za razumevanje in raziskovanje razdaljno-regularnih grafov. Posebej se posvetimo antipodnim razdaljno-regularnim grafom. Glavni rezultat tega dela je izrek o zgornji meji za stopnjo antipodnih razdaljno-regularnih grafov premera 4, izraženi s številom vozlišč grafa. Dokažemo tudi Pyberjevo ter Hiraki-Koolenovo zgornjo mejo za premer razdaljno-regularnih grafov.

Ključne besede: razdaljno-regularni grafi, krepko regularni grafi, antipodni razdaljno-regularni grafi, kvocientni grafi, asociativne sheme, töplitzove matrike.

Abstract

In this thesis distance-regular graphs and their classical families are introduced. We develop theory, needed for an understanding and research of distance-regular graphs, with an emphasis on the antipodal distance-regular graphs. The main result is a theorem, which gives an upper bound on the valency of an antipodal distance-regular graph with diameter 4 in terms of number of vertices. Also Pyber and Hiraki-Koolen upper bounds for diameter of distance-regular graphs are proved.

Keywords: distance-regular graphs, strongly regular graphs, antipodal distance-regular graphs, quotient graphs, association schemes, Töplitz matrices.

Math. subj. class (2000): 05 C 12, 05 C 25, 05 C 35, 05 C 50, 05 E 30

Uvod

Rdeča nit in glavna tema pričujočega magistrskega dela so razdaljno-regularni grafi. Na kratko so to tisti grafi, za katere je število vozlišč, ki so za i oddaljena od izbranega vozlišča x in za j od izbranega vozlišča y, neodvisno od izbire vozlišč x in y. Odvisno je le od razdalje med vozliščema x in y.

Že ob prvem srečanju z navedeno definicijo uvidimo, da je dokaj omejujoča. Izkušnje kažejo, da imajo grafi z velikim premerom, ki zadostoščajo tej definiciji, visoko stopnjo simetrije. Na prvi pogled bi celo dejali, da je takih grafov malo in da so razmeroma nepomembni v teoriji grafov in drugih področjih matematike. Pa vendar se izkaže, da je razdaljno-regularnih grafov kar "precej": od zelo enostavnih kot so cikli in vseh pet Platonskih teles (tetraeder, kocka, oktaeder, ikozaeder in dodekaeder), do nekoliko bolj zapletenih, kot so hiperkocke, krepko regularni grafi, Johnsonovi grafi, Hammingovi grafi, itd. Morda pa še bolj osupne dejstvo, da so ti grafi močno povezani tudi z nekaterimi drugimi področji matematike. Najprej velja na tem mestu omeniti algebro in z njo povezano Bose-Mesnerjevo algebro, ki pripada vsakemu razdaljno-regularnemu grafu. Johnsonovi grafi so povezani s teorijo dizajnov, Hammingovi grafi pa s teorijo kodiranja. Ne kaže pa pri tem pozabiti tudi na končne geometrije, asociativne sheme, spektralno analizo, itd.

Teorija razdaljno-regularnih grafov je zelo obširna in v njej je še vedno zelo veliko odprtih problemov. Pravzaprav se zdi, da večina najbolj zanimivih odprtih problemov iz teorije razdaljno-regularnih grafov ne bo še tako hitro rešena. Eden izmed teh je klasifikacija razdaljno-regularnih grafov. Pričujoče magistrsko delo je usmerjeno proti temu cilju.

Graf G premera d je neprimitiven, če je za neko množico $I \subset \{0, 1, \ldots, d\}$, $I \neq \emptyset$, $I \neq \{0\}$, $I \neq \{0, 1, \ldots, d\}$, relacija "imeti razdaljo v množici I" ekvivalenčna relacija na množici točk grafa G. Primeri neprimitivnih grafov so dvodelni grafi ($I = \{0, 2, \ldots, 2\lfloor d/2 \rfloor\}$) ali pa antipodni grafi ($I = \{0, d\}$). Smith [29] je pokazal, da so pri razdaljno tranzitivnih grafih stopnje $k > 2$ dvodelni in antipodni grafi edini neprimitivni grafi. Njegov rezultat pa so hitro razširili tudi na razdaljno-regularne grafe. Omejitev $k > 2$ ni prestroga, saj so razdaljno-regularni grafi stopnje $k = 2$ natanko cikli.

Iz neprimitivnih razdaljno-regularnih grafov lahko konstruiramo nove razdaljno-regularne grafe. Naj bo G dvodelen razdaljno-regularen graf premera $d \geq 2$. Najprej definirajmo graf G_2: njegove točke naj bodo kar točke grafa G, dve točki pa naj bosta povezani, če sta v grafu G na razdalji 2. Graf G_2 ima očitno dve komponenti, ki sta nedvodelna razdaljno-regularna grafa premera $[d/2]$.

Če pa je graf G antipoden, potem množica njegovih točk razpade na ekvivalenčne razrede, torej na disjunktno unijo množic tistih točk, ki so medsebojno na razdalji d. Tem ekvivalenčnim razredom grafa G pravimo tudi antipodni razredi grafa G. Naj ima nov graf $\overline{G}$ (antipodni kvocient grafa G) za množico točk množico vseh antipodnih razredov grafa G. Dve točki grafa $\overline{G}$ pa naj bosta povezani natanko tedaj, ko ustrezna antipodna razreda vsebujeta sosednji točki. Dokazano je, da je graf $\overline{G}$ razdaljno-regularen graf premera $\lfloor d/2 \rfloor$, ki ni antipoden, če je le $d \geq 4$.

Torej lahko iz vsakega neprimitivnega razdaljno-regularnega grafa s premerom $d \geq 4$ dobimo primitiven razdaljno-regularen graf v največ dveh korakih. Veliki projekt klasifikacije razdaljno-regularnih grafov je zato naravno razdeljen v dve fazi. Najprej klasifikacijo vseh primitivnih razdaljno-regularnih grafov, nato pa za dan primitiven razdaljno-regularen graf G poiskati vse antipodne in dvodelne razdaljno-regularne grafe, ki nam po zgoraj opisanih postopkih dajo graf G.

Vsaka nova stvar, ki jo uspemo izvedeti o dvodelnih ali antipodnih razdaljno-regularnih grafih je zato nov (čeprav verjetno zelo majhen) kamenček v mozaiku klasifikacije razdaljno-regularnih grafov. Glavni rezultat magistrskega dela je izrek, ki omejuje stopnjo antipodnega razdaljno-regularnega grafa G premera 4 ali 5 s številom ekvivalenčnih razredov tega grafa. Dokazana je namreč neenakost

$$k \leq \frac{n-1}{2},$$

kjer je k stopnja grafa G, n pa število antipodnih razredov grafa G. Ta neenakost nam med drugim pove, da je lahko samo eden od dveh komplementarnih krepko-regularnih grafov antipodni kvocient nekega antipodnega razdaljno-regularnega grafa.

Magistrsko delo je organizirano takole. V prvem poglavju bomo podali definicijo in osnovne lastnosti krepko regularnih grafov. Netrivialni povezani krepko regularni grafi so namreč natanko razdaljno-regularni grafi premera 2. V sedmem poglavju bodo krepko regularni grafi igrali osrednjo vlogo. To je dodaten razlog, da jim namenimo posebno poglavje.

V drugem poglavju si bomo pobliže ogledali splošne razdaljno-regularne grafe. Podali bomo njihovo definicijo, našteli nekaj zgledov in dokazali nekaj njihovih osnovnih lastnosti.

V tretjem poglavju bomo opisali klasične razdaljno-regularne grafe. Mednje štejemo 10 družin razdaljno-regularnih grafov. Podali bomo konstrukcijo le-teh, njihov premer in njihova presečna števila.

V četrtem poglavju bomo govorili o ekvitabilnih particijah in kvocientnih grafih. Ogledali si bomo povezave med lastnimi vrednostmi grafa G in lastnimi vrednostmi njegovega kvocientnega grafa. Posebej se bomo posvetili tudi antipodnim kvocientom.

V petem poglavju bo tekla beseda o asociativnih shemah, ki so posplošitev razdaljno-regularnih grafov. Mnogo zanimivih izrekov o razdaljno-regularnih grafih namreč lahko lažje dokažemo v kontekstu asociativnih shem.

V šestem poglavju si bomo podrobneje ogledali lastne vrednosti in Kreinove parametre razdaljno-regularnih grafov. Spoznali bomo povezave med lastnimi vrednostmi ter Kreinovimi parametri antipodnega razdaljno-regularnega grafa ter lastnimi vrednostmi in Kreinovimi parametri njegovega antipodnega kvocienta.

V sedmem poglavju bomo dokazali glavni rezultat tega magistrskega dela. To je neenakost, ki smo jo omenili že tukaj v uvodu. Nakazali bomo tudi nekaj možnosti za izboljšanje te neenakosti.

Osmo poglavje bo namenjeno še enemu odprtemu problemu iz področja razdaljno-regularnih grafov, ki pa je tesno povezan s klasifikacijo le-teh. To je premer razdaljno-regularnih grafov. Dokazali bomo Pyberjevo in Hiraki-Koolenovo zgornjo mejo za njihov premer.

V devetem poglavju bomo pristop, ki smo ga v šestem poglavju uporabili za dokazovanje izreka, ki govori o lastnih vrednostih antipodnega razdaljno-regularnega grafa, uporabili za dokaz izreka o faktorizacij determinant Töplitzovih matrik, glej Jurišić [18].

Sledi še deseto poglavje, v katerem so podane tabele presečnih števil antipodnih razdaljno-regularnih grafov premera 4. Podobne tabele so podane že v Brouwer, Cohen in Neumaier [7] ter Jurišić [18]. V tem delu so tabele zasnovane tako, da so grafi razvrščeni po velikosti presečnega števila a_1 glede na stopnjo grafa.

Poglavje 1

KREPKO REGULARNI GRAFI

V tem poglavju bomo obravnavali krepko regularne grafe. Zanimivi so iz več razlogov, tu pa omenimo tri. Netrivialni povezani krepko regularni grafi so natanko razdaljno-regularni grafi premera 2. Zaradi tega jih lahko definiramo na lažji in bolj jasen način kot splošne razdaljno-regularne grafe. Zato krepko regularni grafi predstavljajo "naraven" uvod v vsako razpravljanje o razdaljno-regularnih grafih. Krepko regularni grafi so tudi najpreprostejši netrivialni primer asociativnih shem, katere bomo spoznali v petem poglavju. Izkaže se namreč, da so krepko regularni grafi ekvivalentni dvorazrednim asociativnim shemam. Tretji razlog, da bomo krepko regularnim grafom namenili posebno poglavje, pa je ta, da jih bomo zopet srečali v sedmem poglavju. Kot bomo videli, so antipodni kvocienti antipodnih razdaljno-regularnih grafov premera 4 ali 5, katerim bo namenjeno sedmo poglavje, krepko regularni grafi.

V prvem razdelku poglavja bomo podali osnovne pojme in definicije iz teorije grafov. V drugem bomo podali definicijo krepko regularnih grafov in navedli nekaj njihovih lastnosti. Tretji razdelek je namenjen primerom krepko regularnih grafov, v četrtem pa bomo izračunali lastne vrednosti krepko regularnih grafov in njihove večkratnosti.

1.1 Osnovno o grafih

Graf $G = G(V, E)$ je sestavljen iz končne množice *vozlišč* $V = V(G)$ in neke množice dvoelementnih podmnožic množice V, ki jo označimo z $E = E(G)$. Elemente množice E imenujemo *povezave* grafa G. Če je $e = \{x, y\} \in E$, potem pravimo, da sta vozlišči x in y *povezani*, oziroma da sta *sosednji.* vozlišči x in y sta *krajišči* povezave e.

Opomba: včasih bomo malce nedosledni in bomo z rekli "graf" tudi objektom, ki to ne bodo , namreč multigrafom. Ti imajo za razliko od "pravih grafov" lahko tudi večkratne povezave in zanke.

Naj bo $G = G(V, E)$ graf in $x \in V$. *Stopnja* vozlišča x je število vseh tistih povezav grafa G, katerih krajišče je vozlišče x. Očitno je stopnja vozlišča x enaka številu sosedov vozlišča x. Če je stopnja vseh vozlišč grafa G enaka k, potem je graf G *regularen* stopnje k.

Graf G je *dvodelen*, če lahko množico njegovih vozlišč V razbijemo na disjunktno unijo dveh množic V_1 in V_2, tako da med vozlišči znotraj množic V_1 in V_2 ni nobenih povezav.

Poln graf K_n na n vozliščih je graf, katerega poljubno vozlišče je povezano z vsemi ostalimi vozlišči. Graf K_n je torej regularen graf stopnje $n-1$. *Poln dvodelen* graf $K_{n,m}$ ima množico vozlišč $V = \{v_1, \ldots, v_n\} \cup \{u_1, \ldots, u_m\}$ in množico povezav $E = \{\{v_i, u_j\} \; ; \; 1 \leq i \leq n \; , \; 1 \leq j \leq m\}$. Če je $n = m$ je $K_{n,m}$ regularen stopnje n.

Komplement grafa G je graf $\overline{G}$, za katerega je $V(\overline{G}) = V(G)$. vozlišči $x, y \in V(\overline{G}), x \neq y$, sta povezani v grafu $\overline{G}$ natanko tedaj, kadar nista povezani v grafu G.

Sprehod v grafu G je zaporedje vozlišč $x_1, x_2, \ldots, x_n$ grafa G, za katero velja $\{x_i, x_{i+1}\} \in E \; ; \; 1 \leq i \leq n-1$. *Pot* v grafu G je sprehod v grafu G, za katerega velja še $\{x_i, x_{i+1}\} \neq \{x_j, x_{j+1}\}$ za $1 \leq i < j \leq n-1$. Vozlišče x_1 je *začetek*, vozlišče x_n pa *konec* poti. Graf G je *povezan*, če za poljubni dve vozlišči x in y grafa G obstaja pot z začetkom v vozlišču x in koncem v vozlišču y. *Razdalja* med vozliščema x in y povezanega grafa G je dolžina najkrajše poti med x in y. Označimo jo z $\partial(x, y)$. *Premer* povezanega grafa G je $\max\{\partial(x, y) | x, y \in V(G)\}$.

Naj bo x vozlišče grafa G in r nenegativno celo število. Množico vseh vozlišč grafa G, ki so na razdalji r od vozlišča x, bomo označevali z $S_r(x)$. Imenujemo jo *sfera* s središčem v vozlišču x in radijem r. Množico vseh prvih sosedov vozlišča x pa bomo še bolj na kratko označevali z $S(x)$. Če je število r večje od premera grafa G, potem je $S_r(x) = \emptyset$ za vsako vozlišče x grafa G.

Grafa $G_1(V_1, E_1)$ in $G_2(V_2, E_2)$ sta *izomorfna*, če obstaja bijektivna preslikava $f : V_1 \to V_2$, za katero velja, da sta vozlišči $x, y \in V_1$ povezani natanko tedaj, ko sta povezani vozlišči $f(x), f(y) \in V_2$. *Avtomorfizem* grafa G je taka permutacija f vozlišč grafa G, za katero velja, da je $\{x, y\} \in E(G)$ natanko tedaj, ko je $\{f(x), f(y)\} \in E(G)$.

Naj bosta $G = (V, E)$ in $G' = (V', E')$ grafa. Če je $V' \subseteq V$ in $E' \subseteq E$, potem je graf G' *podgraf* grafa G. Če je G' podgraf grafa G in če vsebuje vse povezave $xy \in E$, kjer sta $x, y \in V'$, potem je G' *inducirani* podgraf grafa G.

Matrika sosednosti A grafa G na n vozliščih je matrika dimenzije $n \times n$, ki je definirana takole:

$$(A)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{če sta } i\text{-to in } j\text{-to vozlišče povezani} \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

Lastne vrednosti matrike sosednosti A grafa G imenujemo *lastne vrednosti* grafa G.

Graf povezav grafa G je graf H, ki ima za množico vozlišč množico vseh povezav grafa G, kjer sta dve različni vozlišči grafa H povezani natanko tedaj, ko imata v grafu G skupno krajišče.

1.2 Osnove krepko regularnih grafov

Definicija 1.2.1 *Naj bosta λ in μ nenegativni celi števili in G regularen graf za katerega velja:*

(1) poljubni dve sosednji vozlišči grafa G imata natanko λ skupnih sosed;

(2) poljubni dve nesosednji vozlišči grafa G imata natanko μ skupnih sosed.

Potem pravimo, da je graf G **krepko regularen**.

Če je G krepko regularen graf na n vozliščih stopnje k, in če sta λ in μ zgoraj opisani števili, potem bomo graf G na kratko označevali s $\mathrm{srg}(n, k, \lambda, \mu)$, kjer je srg okrajšava za angleško ime 'strongly regular graph'. Številom n, k, λ in μ pravimo *parametri* krepko regularnega grafa G. Toda **pozor!** Pri tem se moramo zavedati pomembne pomanjkljivosti te okrajšave: krepko regularen graf ni do izomorfizma natančno določen s svojimi parametri. Obstajajo namreč neizomorfni krepko regularni grafi, ki imajo enake parametre. Tak primer sta recimo dva neizomorfna krepko regularna grafa s parametri $(16, 6, 2, 2)$. Prvi je tako imenovani mrežni graf $L_2(4)$ (glej sliko 1.2), drugi pa je Shrikhandejev graf (glej sliko 1.1). Inducirani podgraf mrežnega grafa $L_2(4)$, ki ga določajo sosedje poljubnega vozlišča u, je cikel dolžine 6. Inducirani podgraf Shrikhandejevega grafa, ki ga določajo sosedje poljubnega vozlišča v, pa sta dva cikla dolžine 3. Torej ta dva grafa ne moreta biti izomorfna.

Očitno je, da mora veljati $0 \leq \lambda \leq k - 1$ in $0 \leq \mu \leq k$. Če je $\mu = 0$, potem je G unija polnih grafov enake velikosti. Če je $\mu = k$, potem je G komplement krepko regularnega grafa, ki ima $\mu = 0$. Torej je G v tem primeru komplement unije polnih grafov enake velikosti, oziroma *polni multipartitni graf.* Če je G komplement unije t polnih grafov velikosti m, potem za G uporabljamo oznako $K_{t \times m}$.

Enostaven razmislek nam pove, da je tudi komplement krepko regularnega grafa krepko regularen. Če so (n, k, λ, μ) parametri krepko regularnega grafa G, potem so parametri krepko regularnega grafa $\overline{G}$ enaki

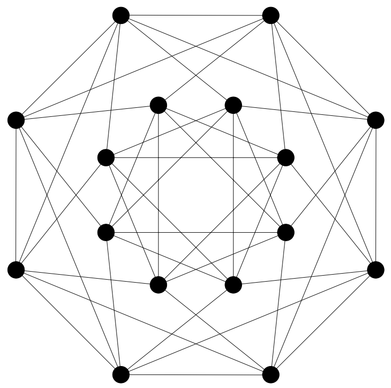
$$(n, n-k-1, n-2k+\mu-2, n-2k+\lambda).$$

Od tod dobimo še dva potrebna pogoja za obstoj krepko regularnega grafa $\mathrm{srg}(n, k, \lambda, \mu)$, namreč

$$n-2k+\mu-2 \geq 0 \quad \text{in} \quad n-2k+2\lambda \geq 0.$$

Naslednji, nekoliko močnejši pogoj za obstoj krepko regularnega grafa s parametri (n, k, λ, μ), pa dobimo takole. Vzemimo poljubno vozlišče x grafa G. Ostala vozlišča razdelimo na dve disjunktni množici: množico sosed vozlišča x in množico nesosed vozlišča x. Označimo ju zaporedoma z $S(x)$ in $\Delta(x)$. Po definiciji krepko regularnega grafa je vsako od k vozlišč iz množice $S(x)$ povezano še z λ vozlišči iz $S(x)$, vsako od $n-k-1$ vozlišč iz množice $\Delta(x)$ pa je povezano z μ vozlišči iz $S(x)$. Če preštejemo povezave z enim krajiščem v $\Gamma(x)$, drugim pa v $\Delta(x)$ na dva različna načina, dobimo

$$k(k-\lambda-1) = \mu(n-k-1), \quad \text{oz.} \quad n = 1+k+\frac{k(k-\lambda-1)}{\mu} \tag{1.1}$$



Slika 1.1: Shrikhandejev graf je eden izmed dveh neizomorfnih krepko regularnih grafov s parametri (16,6,2,2). Drugi je mrežni graf $L_2(4)$ (glej sliko 1.2).

1.3 Nekaj primerov krepko regularnih grafov

Navedimo nekaj najbolj enostavnih primerov krepko regularnih grafov.

- Zelo enostaven primer krepko regularnega grafa je *pentagon* oziroma *petcikel*. To je $\mathrm{srg}(5,2,0,1)$

- Unija m polnih grafov K_n je očitno tudi krepko regularen graf s parametri

$$(n,k,\lambda,\mu) = (nm, n-1, n-2, 0).$$

- Komplement unije m polnih K_n grafov je krepko regularen graf

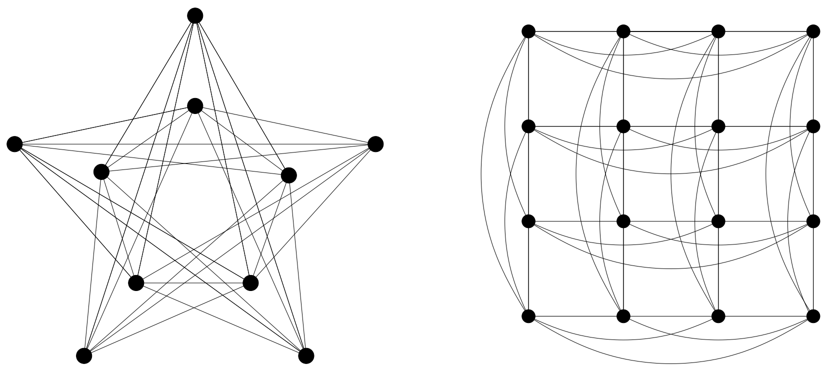
$$\mathrm{srg}(nm, (m-1)n, (m-2)n, (m-1)n).$$

- *Trikotniški graf* $T(m)$, $m \geq 4$, ima za množico vozlišč vse dvoelementne podmnožice neke množice moči m. Dve vozlišči sta povezani natanko tedaj, ko nista disjunktni. Graf $T(m)$ je $\mathrm{srg}(\binom{m}{2}, 2(m-2), m-2, 4)$. Graf $\overline{T(5)}$ je izomorfen verjetno najznamenitejšemu izmed krepko regularnih grafov – Petersenovemu grafu. Petersenov graf je krepko regularen graf $\mathrm{srg}(10,3,0,1)$. Trikotniški graf $T(5)$ vidimo na sliki 1.2.

- *Mrežni graf* $L_2(m)$, $m \geq 2$, ima za množico vozlišč množico $S \times S$, kjer je S množica moči m. Dve vozlišči sta sosednji natanko tedaj, ko imata skupno "koordinato". Graf $L_2(m)$ je $\mathrm{srg}(m^2, 2(m-1), m-2, 2)$. Mrežni graf $L_2(4)$ vidimo na sliki 1.2.

Omenimo na tem mestu še dve družini krepko regularnih grafov, katerih podrobnejši opis presega okvir tega poglavja. Prva družina so krepko regularni grafi dobljeni iz *latinskih kvadratov* (ang. '*Latin square graph*'). Več o latinskih kvadratih lahko bralec prebere v [24, Ch. 17], sami krepko regularni grafi, ki jih dobimo iz latinskih kvadratov pa so opisani v [24, Example 21.7].

Druga družina pa so krepko regularni grafi, ki so dobljeni kot *bločni grafi kvazisimetričnih dizajnov* (ang. '*block graph of quasisymmetric design*'). Več o teoriji dizajnov bralec lahko poišče v [24, Ch. 19], o bločnih grafih kvazisimetričnih dizajnov pa v [24, Thm. 21.2]. Omenimo le še to, da so *Steinerjevi trojni sistemi* (ang. '*Steiner triple system*') tudi kvazisimetrični dizajni (glej [24, str. 205] za definicijo Steinerjevih trojnih sistemov).



Slika 1.2: trikotniški graf $T(5)$ (levo) in mrežni graf $L_2(4)$ (desno)

1.4 Lastne vrednosti krepko regularnih grafov

Naj bo G povezan krepko regularen graf s parametri (n, k, λ, μ) in A njegova matrika sosednosti. Z J označimo matriko, ki je sestavljena iz samih enic, z I pa identično matriko. Ker je G regularen graf stopnje k, velja

$$AJ = kJ. \tag{1.2}$$

Ker pa je G tudi krepko regularen, in ker nam element $(A^2)_{ij}$ v A^2 pove število sprehodov dolžine 2 od i-tega vozlišča do j-tega vozlišča, velja še

$$A^2 = \mu(J - I - A) + \lambda A + kI, \text{ oziroma } A^2 + (\mu - \lambda)A + (\mu - k)I = \mu J. \tag{1.3}$$

Enačba (1.2) nam pove, da je vektor $\boldsymbol{j}$, ki je sestavljen iz samih enic lastni vektor grafa G z lastno vrednostjo k. Naslednja lema nam pove, da je večkratnost te lastne vrednosti enaka 1.

Lema 1.4.1 *Naj bo G povezan regularen graf stopnje k in $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$. Potem je*

(i) večkratnost lastne vrednosti k enaka 1,

(ii) za vsako lastno vrednost x grafa G velja $|x| \leq k$.

Dokaz. (i) Naj bo $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$ poljuben vektor, za katerega velja $A\boldsymbol{y} = k\boldsymbol{y}$, kjer je A matrika sosednosti grafa G. Naj bo y_j tista komponenta vektorja $\boldsymbol{y}$, ki ima največjo absolutno vrednost. Ker je $(A\boldsymbol{y})_j = ky_j$, je

$$\sum_i y_i = ky_j,$$

kjer vsota teče po tistih k indeksih i, za katere je vozlišče v_i sosednja vozlišču v_j. Zaradi maksimalnosti y_j je zato za vse te indekse $y_i = y_j$. Ker je G povezan, lahko na enak način postopek nadaljujemo z nekim y_i, kjer je v_i sosednje vozlišče vozlišča v_j. Torej so vse komponente vektorja $\boldsymbol{y}$ enake, vektor $\boldsymbol{y}$ pa je zato večkratnik vektorja $\boldsymbol{j}$. To pa pomeni, da je večkratnost lastne vrednosti k enaka 1.
(ii) Naj bo $A\boldsymbol{y} = x\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y} \neq 0$, in naj bo y_j enako kot prej komponenta vektorja $\boldsymbol{y}$ z največjo absolutno vrednostjo. Kot prej imamo tudi tokrat

$$\sum_i y_i = \lambda y_j,$$

in zato

$$|\lambda||y_j| = |\sum_i y_i| \leq \sum_i |y_i| \leq k|y_j|,$$

torej $|\lambda| \leq k$. $\square$

Vsak drug lastni vektor grafa G je zato pravokoten na vektor $\boldsymbol{j}$. Naj bo x lastna vrednost lastnega vektorja $\boldsymbol{y}$ grafa G, ki je pravokoten na vektor $\boldsymbol{j}$. Če na vektor $\boldsymbol{y}$ delujemo z enačbo (1.3), dobimo

$$x^2\boldsymbol{y} + (\mu - \lambda)x\boldsymbol{y} + (\mu - k)\boldsymbol{y} = 0,$$

oziroma ker je $\boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}$

$$x^2 + (\mu - \lambda)x + (\mu - k) = 0.$$

Torej ima graf G samo še dve lastni vrednosti r in s, ki sta enaki

$$r, s = \frac{\lambda - \mu \pm \sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu)}}{2}. \tag{1.4}$$

Zaradi Vietovih pravil velja tudi

$$r + s = \lambda - \mu \qquad rs = \mu - k. \tag{1.5}$$

Naj bodo $1, f$ in g večkratnosti lastnih vrednosti k, r in s. Potem velja

$$1 + f + g = n \quad \text{in} \quad \mathrm{tr}(A) = k + fr + gs = 0.$$

Če iz teh dveh enačb izračunamo f in g, dobimo naslednji enakosti:

$$f = \frac{1}{2}\Big(n - 1 + \frac{(n-1)(\mu - \lambda) - 2k}{\sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu)}}\Big) \tag{1.6}$$

$$g = \frac{1}{2}\Big(n - 1 - \frac{(n-1)(\mu - \lambda) - 2k}{\sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu)}}\Big) \tag{1.7}$$

Opomba. Včasih je prikladno, da imamo večkratnosti f in g izražene z lastnimi vrednostmi k, r in s. Tako dobimo

$$f = \frac{-k(s+1)(k-s)}{(k+rs)(r-s)} \quad \text{in} \quad g = \frac{k(r+1)(k-r)}{(k+rs)(r-s)}. \tag{1.8}$$

Ker sta večkratnosti f in g naravni števili, lahko odtod izluščimo naslednje dejstvo: če sta večkratnosti f in g različni, potem morata biti imenovalec ulomkov v (6) in (7)

$$\sqrt{(\lambda-\mu)^2+4(k-\mu)}$$

naravno število. Potem pa iz (1.4) sledi, da sta tudi lastni vrednosti r in s celi števili.
Če pa sta večkratnosti f in g lastnih vrednosti r in s grafa G enaki, če torej velja $(n-1)(\mu-\lambda) = 2k$, potem graf G imenujemo *konferenčni* graf. Če upoštevamo še enačbo (1.1), potem vidimo, da za parametre konferenčnega grafa velja

$$\left(1+\frac{k-\lambda-1}{\mu}\right)(\mu-\lambda) = 2.$$

Torej je $1+(k-\lambda-1)/\mu = 2$ in $\mu-\lambda = 1$ in od tod

$$\lambda = \mu - 1, \quad k = 2\mu, \quad n = 4\mu + 1.$$

Konferenčni grafi so torej natanko tisti krepko regularni grafi, ki imajo parametre oblike $(4\mu+1, 2\mu, \mu-1, \mu)$.

Poglavje 2

RAZDALJNO-REGULARNI GRAFI

V tem poglavju bomo spoznali razdaljno-regularne grafe. Razdaljno-regularni grafi so del večje družine objektov, ki jim pravimo asociativne sheme. Njim bo v celoti namenjeno peto poglavje. Zaradi visoke stopnje simetrije, ki jo imajo razdaljno-regularni grafi, sega njihov študij tako na področje teorije grafov in kombinatorike, kot tudi na področje algebre. Prav zaradi tega lahko o njih povemo dosti več, kot o splošnih grafih. Vseeno pa je še precej vprašanj v zvezi z njimi še vedno odprtih. Med njimi tudi klasifikacija razdaljno-regularnih grafov.

V prvem razdelku bomo podali definicijo razdaljno-regularnih grafov, v drugem pa navedli nekaj zgledov. V tretjem si bomo bolj podrobno ogledali presečna števila razdaljno-regularnih grafov in dokazali nekaj njihovih lastnosti. V četrtem razdelku bomo definirali razdaljne matrike razdaljno-regularnega grafa in dokazali nekaj njihovih lastnosti. V petem razdelku pa bomo definirali neprimitivne in antipodne razdaljno-regularne grafe. Dokazali bomo Smithov izrek, ki pravi, da je vsak neprimitiven razdaljno-regularen graf stopnje $k > 2$ bodisi dvodelen bodisi antipoden.

2.1 Definicija razdaljno-regularnih grafov

Naj bo G graf s premerom d.

Definicija 2.1.1 *Graf G je razdaljno-regularen, če je za poljubni vozlišči x, y grafa G, ki sta na razdalji h, in za poljubni nenegativni celi števili i in j, število*

$$p_{ij}^h(x, y) = |S_i(x) \cap S_j(y)|$$

odvisno samo od števil h, i in j, ne pa od vozlišč x in y samih.

Kadar torej govorimo o razdaljno-regularnih grafih, pišemo kar p_{ij}^h namesto $p_{ij}^h(x,y)$.
Kot bomo videli pozneje, je za definicijo razdaljno-regularnih grafov dovolj zahtevati že samo to, da so števila $p_{1j}^h(x,y)$ odvisna samo od razdalje med vozliščema x in y. Poleg tega pa je zaradi trikotniške neenakosti – kateri zadošča razdalja med dvema vozliščema v grafu – očitno, da je $p_{1,j}^h = 0$, brž ko je $|h-j| > 1$. Zato je smiselno uvesti naslednje oznake: $a_i := p_{1i}^i \, (0 \le i \le d)$, $b_i := p_{1i+1}^i \, (0 \le i \le d-1)$, $c_i := p_{1i-1}^i \, (1 \le i \le d)$. Posebej še definiramo $c_0 = b_d = 0$. Številom a_i, b_i in c_i, $0 \le i \le d$, pravimo *presečna števila* razdaljno-regularnega grafa G. Razdaljno-regularen graf je očitno regularen stopnje $k = b_0$

Intuitivno si razdaljno-regularen graf najlažje predstavljamo takole. Vzemimo poljubno vozlišče x grafa G in si oglejmo množice $S_0(x), S_1(x), \ldots, S_d(x)$. Naj bo y poljubno vozlišče iz množice $S_i(x)$, kjer je i med 0 in d. Od vozlišča y lahko potekajo povezave samo do vozlišč v množicah S_{i-1}, S_i in S_{i+1}. Po definiciji razdaljno-regularnega grafa pa od **vsakega** vozlišča iz S_i poteka **natanko** a_i povezav do vozlišč, ki so tudi v S_i, b_i povezav do vozlišč, ki so v S_{i+1} in c_i povezav do vozlišč, ki so v S_{i-1}. Poleg tega so števila a_i, b_i in c_i neodvisna od izbire vozlišča x. S tem je tudi osmišljena definicija števil c_0 in b_d.

Hitro lahko vidimo, da so povezani krepko regularni grafi ravno razdaljno-regularni grafi, ki imajo premer 2. Če so (n, k, λ, μ) parametri krepko regularnega grafa G, potem so njegova (netrivialna) presečna števila $b_0 = k, b_1 = k - \lambda - 1, c_1 = 1, c_2 = \mu, a_1 = \lambda, a_2 = k - \mu$.

2.2 Primeri razdaljno-regularnih grafov

V tem razdelku bomo navedli nekaj primerov razdaljno-regularnih grafov.

- Trivialen primer razdaljno-regularnih grafov so cikli. Njihova presečna števila so $\{2, 1, \ldots, 1; 1, \ldots, 1, 2\}$ v primeru, ko imajo sodo dolžino, in $\{2, 1, \ldots, 1; 1, \ldots, 1\}$ sicer.

- Vseh pet *platonskih teles* (tetraeder, kocka, oktaeder, ikozaeder in dodekaeder), natančneje njihovi 1-skeleti, so razdaljno-regularni grafi.

- Graf povezav Petersenovega grafa je razdaljno-regularen graf premera 3 (glej sliko 2.1).

- **Johnsonovi grafi $J(n, e)$**. Naj bo X končna množica z n elementi in e naravno število. *Johnsonov graf* $J(n, e)$ ima za množico vozlišč vse e-elementne podmnožice množice X. Vozlišči a in b Johnsonovega grafa

$J(n,e)$ sta povezani natanko tedaj, ko je moč množice $a \cap b$ enaka $e-1$. Johnsonov graf $J(n,e)$ ima premer $d = \min(e, n-e)$ in presečna števila

$$b_i = (e-i)(n-e-i)\,, \qquad c_i = i^2\,, \qquad 0 \le i \le d,$$

(glej Brouwer, Cohen in Neumaier [7, Thm. 9.1.2]). Johnsonov graf $J(n,2)$ je trikotniški graf $T(n)$, ki smo ga že predstavili v poglavju o krepko regularnih grafih.

- **Hammingovi grafi $\boldsymbol{H(d,n)}$**. Naj bo X končna množica moči $n \ge 2$ in d naravno število. *Hammingov graf* $H(d,n)$ ima za množico vozlišč kartezični produkt d kopij množice X. Dve vozlišči sta povezani natanko tedaj, ko se razlikujeta v natanko eni koordinati. Premer Hammingovega grafa $H(d,n)$ je d, presečna števila pa so

$$b_i = (d-i)(n-1)\,, \qquad c_i = i\,, \qquad 0 \le i \le d,$$

(glej Brouwer et al. [7, Thm. 9.2.1]). Hammingov graf $H(2,n)$ je v drugem poglavju predstavljeni mrežni graf $L(n)$.

- Naj bo d poljubno naravno število. Hammingov graf $H(d,2)$ je *d-kocka*, oziroma na kratko Q_d. Z drugimi besedami lahko graf Q_d opišemo takole: Q_d je direkten produkt d polnih grafov K_2. Graf Q_2 je četverokotnik, graf Q_3 pa običajna kocka (1-skelet telesa kocka). Graf Q_d je torej razdaljno-regularen graf premera d s presečnimi števili

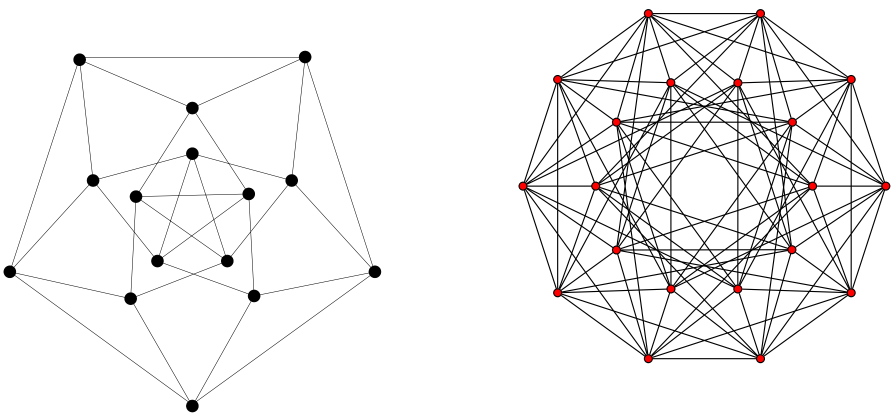
$$b_i = d-i\,, \qquad c_i = i\,, \qquad 0 \le i \le d.$$

2.3 Presečna števila razdaljno-regularnih grafov

Naj bo G razdaljno-regularen graf in x njegovo poljubno vozlišče. S $k_i(x)$ bomo označevali število vozlišč grafa G, ki so na razdalji i od vozlišča x, torej

$$k_i(x) = |S_i(x)|.$$

Ker je $k_i(x) = p^0_{ii}(x,x) = p^0_{ii}$, števila $k_i(x)$ niso odvisna od vozlišča x. Zato bomo pisali krajše: $k_i(x) = k_i$. V naslednji lemi bomo dokazali nekaj osnovnih lastnosti števil a_i, b_i, c_i in k_i razdaljno-regularnega grafa G.



Slika 2.1: Graf povezav Petersenovega grafa(levo) in Johnsonov graf $J(6,3)$ (desno). Za sliko Johnsonovega grafa $J(6,3)$ se zahvaljujem mag. Boben Marku.

Lema 2.3.1 *Naj bo G povezan razdaljno-regularen graf premera d. Potem velja*

(i) $k_{i-1}b_{i-1} = k_i c_i$, $1 \leq i \leq d$,

(ii) $a_i + b_i + c_i = b_0 = k$, $0 \leq i \leq d$,

(iii) $1 = c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_d$,

(iv) $k = b_0 \geq b_1 \geq \cdots \geq b_{d-1} \geq 1$,

(v) če je $i + j \leq d$, potem je $c_i \leq b_j$.

Dokaz. Naj bo x poljubno vozlišče grafa G.
(i) Oba izraza, $k_{i-1}b_{i-1}$ in $k_i c_i$, sta enaka številu povezav, ki potekajo med množicama $S_{i-1}(x)$ in $S_i(x)$.

(ii) Število $a_i + b_i + c_i$ je ravno število povezav, ki potekajo iz poljubnega vozlišča $y \in S_i(x)$, $0 \leq i \leq d$. Ker pa je G regularen stopnje $b_0 = k$, je točka (ii) dokazana.

(iii) Ker je v množici $S_0(x)$ samo eno vozlišče, je seveda $c_1 = 1$. Naj bo sedaj y poljubno vozlišče iz $S_{i+1}(x)$ in z poljubno vozlišče iz $S_i(y) \cap S(x)$ (vsaj eno tako vozlišče z sigurno obstaja). Naj bo $w \in S(y) \cap S_{i-1}(z)$. Kratek razmislek nam pokaže, da mora biti $w \in S_i(x)$, torej $S(y) \cap S_{i-1}(z) \subseteq S_i(x) \cap S(y)$. Toda

$$c_i = |S(y) \cap S_{i-1}(z)| \leq |S_i(x) \cap S(y)| = c_{i+1}.$$

(iv) Da je zaporedje b_i padajoče, pokažemo na podoben način kot v (iii). Neenakost $b_{d-1} \geq 1$ sledi iz povezanosti grafa G.

(v) Naj bo $y \in S_i(x)$ in $z \in S_{i+j}(x) \cap S_j(y)$ (vozlišče z sigurno obstaja, ker je $i + j \leq d$). Ker je $S_{i-1}(x) \cap S(y) \subseteq S_{j+1}(z) \cap S(y)$, je $c_i = |S_{i-1}(x) \cap S(y)| \leq |S_{j+1}(z) \cap S(y)| = b_j$. □

Posledica 2.3.2 *Naj bo G povezan razdaljno-regularen graf premera d. Potem je*

(i) $k_i = (b_0 b_1 \cdots b_{i-1})/(c_1 c_2 \cdots c_i)$ *za* $1 \leq i \leq d$,

(ii) če je $i + j \leq d$ in $0 \leq i \leq j$, potem je $k_i \leq k_j$.

DOKAZ. Točka (i) je direktna posledica leme 2.3.1(i). Dokažimo še točko (ii). Če je $i = j$ je trditev očitna. Sicer pa imamo po točki (i)

$$k_j = k_i \frac{b_i \cdots b_{j-1}}{c_{i+1} \cdots c_j} = k_i \frac{b_i}{c_j} \cdot \frac{b_{i+1}}{c_{j-1}} \cdots \frac{b_{j-1}}{c_{i+1}}.$$

Po točki (v) leme 2.3.1 so vsi ulomki b_{i+s}/c_{j-s}, $0 \leq s \leq j - i - 1$ večji ali enaki 1, torej je $k_i \leq k_j$. □

2.4 Razdaljne matrike razdaljno-regularnih grafov

Začeli bomo z definicijo razdaljnih matrik in razdaljnih grafov grafa G.

Definicija 2.4.1 *(i) Naj bo G povezan graf na n vozliščih $x_1, \ldots, x_n$. Njegova r-ta razdaljna matrika $A_r(G)$, $0 \leq r \leq d$, je $n \times n$ matrika, za katero je*

$$(A_r)_{i,j} = \begin{cases} 1\,; & \partial(x_i, x_j) = r, \\ 0\,; & \textit{sicer.} \end{cases}$$

(ii) Razdaljni graf G_r, $0 \leq r \leq d$, grafa G je graf na isti množici vozlišč, kot graf G. Dve vozlišči sta v grafu G_r povezani natanko tedaj, ko sta v grafu G na razdalji r. Matrika sosednosti grafa G_r je $A_r(G)$.

Opomba: Zaradi tehničnih razlogov je priročno definirati še $A_{-1} = A_{d+1} = 0$.

V naslednji lemi bomo našteli nekaj bolj ali manj očitnih lastnosti razdaljnih matrik razdaljno-regularnega grafa G.

Lema 2.4.1 *Naj bo G povezan razdaljno-regularen graf premera d in $A_0, \ldots, A_d$ njegove razdaljne matrike. Potem*

(i) $A_0 = I$, *kjer je I identična matrika;*

(ii) $\sum_{i=0}^{d} A_i = J$, *kjer je J matrika velikosti $n \times n$ sestavljena iz samih enic;*

(iii) $A_r = A_r^T$, *kjer je ^{T} oznaka za transponiranje;*

(iv) $A_i A_j = \sum_{\ell=0}^{d} p_{ij}^{\ell} A_\ell$*;*

(v) $AA_j = b_{j-1}A_{j-1} + a_j A_j + c_{j+1}A_{j+1}\ ,\ 0 \leq i \leq d$.

Opomba: V točki (v) zgornje leme vzamemo, da sta vrednosti b_{-1} in c_{i+1} nedoločeni.

Dokaz. Točke (i), (ii) in (iii) so očitne. Dokažimo sedaj točko (iv). Naj bosta r in s vozlišči grafa G. Število $(A_iA_j)_{rs}$ je ravno število vseh tistih vozlišč grafa G, ki so od r oddaljene i, od s pa j. Teh vozlišč pa je po definiciji razdaljno-regularnega grafa ravno p_{ij}^h, kjer je h razdalja med r in s. Zato je $(A_iA_j)_{rs} = p_{ij}^h (A_h)_{rs}$. Ker pa je $(A_m)_{rs} = 0$, če je $m \neq h$, je seveda $A_iA_j = \sum_{\ell=0}^{d} p_{ij}^{\ell} A_\ell$.

Točko (v) leme dobimo, če v (iv) vstavimo $i = 1$ in upoštevamo, da je $p_{1j}^h = 0$, če je $|h - j| > 1$. □

Posledica 2.4.2 *Naj bo G povezan razdaljno-regularen graf premera d in $A_0, \ldots, A_d$ njegove razdaljne matrike. Potem je*

$$c_{i+1}p_{i+1j}^h + a_i p_{ij}^h + b_{i-1}p_{i-1j}^h = p_{ij}^{h-1}c_h + p_{ij}^h a_h + p_{ij}^{h+1}b_h.$$

Dokaz. S pomočjo leme 2.4.1 (iv) in (v) na dva načina izračunajmo $(AA_i)A_j = A(A_iA_j)$. Dobimo

$$c_{i+1}A_{i+1}A_j + a_iA_iA_j + b_{i-1}A_{i-1}A_j = \sum_{\ell=0}^{d} p_{ij}^{\ell}(c_{\ell+1}A_{\ell+1} + a_\ell A_\ell + b_{\ell-1}A_{\ell-1}).$$

Naj bosta r in s vozlišči grafa G, ki sta na razdalji h. Če primerjamo rs komponento zgornje enačbe, dobimo ravno zahtevano enakost. □

Torej lahko $p_{i+1,j}^h$ rekurzivno izračunamo iz p_{ij}^h in p_{i-1j}^h, zato so vsi p_{ij}^h natančno določeni s presečnimi števili.

2.5 Neprimitivni in antipodni razdaljno-regularni grafi

Začeli bomo kar z definicijama neprimitivnosti in antipodnosti.

Definicija 2.5.1 *Razdaljno-regularen graf G je* **primitiven***, če so vsi njegovi razdaljni grafi povezani. Sicer je graf G* **neprimitiven**.

Značilen razred neprimitivnih razdaljno-regularnega grafa so dvodelni razdaljno-regularni grafi. Zanje je seveda razdaljni graf G_2 nepovezan – razpade namreč na dve povezani komponenti. Podgrafa grafa G, ki sta inducirana na množici vozlišč teh dveh povezanih komponent označujemo z G^+ in G^-. V angleški literaturi se je za ta dva grafa ustalilo ime 'halved graphs of G'. V tem delu jih bomo imenovali 'polovična grafa', oziroma 'polovični graf od grafa G', če sta izomorfna.
Še en razred neprimitivnih razdaljno-regularnih grafov so antipodni razdaljno-regularni grafi.

Definicija 2.5.2 *Graf G s premerom d je antipoden, če je relacija 'biti na razdalji 0 ali d' ekvivalenčna relacija na množici njegovih vozlišč.*

Očitno je, da s simetričnostjo in refleksivnostjo zgornje relacije nikoli ni težav. Edina netrivialna zahteva je torej tranzitivnost relacije. Z drugimi besedami lahko rečemo takole: graf G s premerom d je antipoden, če za poljubna tri njegova vozlišča x, y in z velja

$$\partial(x,y) = d \ \text{ in } \ \partial(y,z) = d \ \ \Rightarrow \ \ \partial(x,z) = d.$$

Primeri antipodnih razdaljno-regularnih grafov so recimo kocke in graf povezav Petersenovega grafa.
Če je G antipoden graf premera $d \geq 2$, potem je njegov razdaljni graf G_d očitno nepovezan. Torej so antipodni razdaljno-regularni grafi neprimitivni.

Izkaže pa se, da obstajata samo dve vrsti neprimitivnih razdaljno-regularnih grafov. Naslednji izrek nam namreč pove, da so neprimitivni razdaljno-regularni grafi ravno dvodelni in antipodni razdaljno-regularni grafi. Izrek je prvi dokazal Smith v [29], vendar samo za razdaljno-tranzitivne grafe (to so povezani grafi, za katere velja, da njihova grupa avtomorfizmov deluje tranzitivno na množici parov vozlišč oblike $\{(x,y); \partial(x,y) = i\}$, kjer je i poljubno naravno število ali 0). Njegov dokaz pa se da brez težav razširiti tudi na razdaljno-regularne grafe. Tukaj bomo dokaz povzeli po Godsil [15].

Izrek 2.5.1 *Naj bo G povezan razdaljno-regularen graf premera d in stopnje vsaj 3. Če je G neprimitiven, potem je dvodelen ali antipoden.*

Opomba 1: Lahko se zgodi, da je graf G dvodelen in antipoden hkrati. Tak primer so recimo kocka Q_n.

Opomba 2: Če je stopnja razdaljno-regularnega grafa G enaka 2, potem je G cikel. Če je dolžina cikla G enaka n, potem je G_m nepovezan natanko takrat, ko je m delitelj števila n, različen od 1 in n.

DOKAZ. Rekli bomo, da vozlišča x, y, z grafa G določajo (i, j, k)-*trikotnik*, če je

$$\partial(x, y) = i,\ \partial(y, z) = j,\ \partial(x, z) = k.$$

Če v grafu G obstajata dve vozlišči x in y, ki sta na razdalji i in določata nek (i, j, k)-trikotnik, potem po definiciji razdaljno-regularnega grafa vsak par vozlišč, ki je na razdalji i, določa nek (i, j, k)-trikotniku.

Naj bo sedaj G neprimitiven graf premera d, za katerega je G_2 nepovezan. Dokazali bomo, da je v tem primeru graf G dvodelen, ali pa je $d = 2$. Vzemimo najprej, da je $a_1 = 0$ (kar pomeni, da v grafu G nimamo ciklov dolžine 3). Naj bo C cikel lihe dolžine večje od 3. Potem vsa vozlišča tega cikla ležijo v isti povezani komponenti grafa G_2, ki jo označimo z Δ. To pa pomeni, da Δ vsebuje dve vozlišči x in y grafa G, ki sta sosednji v grafu G. Ker so vsi sosedje vozlišča y, razen samega vozlišča x, na razdalji 2 od vozlišča x, so v Δ tudi vsi sosedje vozlišča y. Ker pa je graf G povezan, so potem v Δ kar vsa vozlišča grafa G, kar pa je protislovje. Graf G torej ne vsebuje ciklov lihe dolžine in je zato dvodelen.

Sedaj pa predpostavimo, da je $a_1 > 0$ in $d \geq 3$. Torej v grafu G obstajata vozlišči x in w, ki sta na razdalji 3. Naj bo (x, y, z, w) pot dolžine 3 med x in w. Ker je $a_1 > 0$, obstaja vozlišče v, ki je skupna soseda vozlišč x in y. Vozlišče v seveda ni povezano z vozliščem w, sicer bi imeli $\partial(x, w) = 2$. Če vozlišče v ni povezano z vozliščem z, potem vozlišča x, v in z določajo $(2, 2, 1)$-trikotnik. Torej poljubni dve povezani vozlišči grafa G določata nek $(2, 2, 1)$-trikotnik in zato ležita v isti komponenti Δ grafa G_2. Ker pa je graf G povezan, od tod sledi, da Δ vsebuje vsa vozlišča grafa G. Protislovje! Če pa je vozlišče v povezano z vozliščem z, potem pa vozlišča y, v in w določajo $(2, 2, 1)$-trikotnik. Na isti način kot prej pridemo do protislovja tudi v tem primeru.

Privzemimo sedaj, da je za neko naravno število r , $2 < r < d$, graf G_r nepovezan, graf G_2 pa je povezan. Dokazali bomo, da je v tem primeru $k \leq 2$, kar pa je v protislovju s predpostavko izreka. Naj bo x vozlišče grafa G in vzemimo, da obstajata dve sosednji vozlišči, ki sta obe na razdalji r od vozlišča x. To bi pomenilo obstoj $(r, r, 1)$-trikotnika, kar pa pomeni, da poljubni dve sosednji vozlišči grafa G določata nek $(r, r, 1)$-trikotnik. Ker pa so vsa tri vozlišča $(r, r, 1)$-trikotnika vsebovane v isti povezani komponenti Δ grafa G_r in ker je graf G povezan, je to v protislovju z nepovezanostjo grafa G_r. Torej mora v tem primeru veljati, da graf G ne vsebuje $(r, r, 1)$-trikotnikov, oziroma $a_r = 0$.

Vzemimo, da graf G vsebuje $(r, r, 2)$-trikotnik, torej da za poljubni dve vozlišči grafa G, ki sta na razdalji 2 v grafu G, obstaja vozlišče x, ki je na razdalji r od obeh. To bi pomenilo, da sta poljubni dve vozlišči grafa G, ki sta na razdalji 2, v isti povezani komponenti Δ grafa G_r. Ker je po predpostavki G_2 povezan, komponenta Δ vsebuje vsa vozlišča grafa G, kar pa je protislovje. Graf G torej ne vsebuje $(r, r, 2)$-trikotnikov.

Naj bo sedaj x vozlišče grafa G. Oglejmo si sedaj presečno število c_{r+1}. Ker je $r < d$, je $c_{r+1} > 0$. Če je $c_{r+1} \geq 2$, potem obstajata vozlišči $y, z \in S_r(x)$, za kateri je $\partial(y, z) = 2$. Vozlišč x, y, z v te primeru določajo $(r, r, 2)$-trikotnik. Protislovje! Zato je $c_{r+1} < 2$. Po lemi 2.3.1 (iii) je tudi $c_r < 2$. Na podoben način dobimo $(r, r, 2)$-trikotnik tudi pri predpostavki $b_{r-1} \geq 2$. Torej $b_{r-1} < 2$ in po lemi 2.3.1 (iv) je tudi $b_r < 2$. Ker pa smo dokazali, da je $a_r = 0$, imamo po lemi 2.3.1 (ii)

$$k = a_r + b_r + c_r \leq 2,$$

kar pa je v protislovju s predpostavko izreka.

Ogledati si moramo torej samo še primer, ko je G_d nepovezan, grafi G_r pa so povezani za $r < d$. Naj bo spet x poljubno vozlišče grafa G. Vozlišči y, z naj bosta na razdalji d od vozlišča x, njuna medsebojna razdalja pa naj bo s. Vozlišča x, y, z torej določajo (d, d, s)-trikotnik, zato sta vozlišči y in z v isti povezani komponenti Δ grafa G_d. Naj bo $s < d$. Poljubni dve vozlišči grafa G, ki sta na razdalji s, sta vsebovani v nekem (d, d, s)-trikotniku. Ker je po predpostavki graf G_s povezan, vsebuje graf G_d vsa vozlišča grafa G - protislovje. Torej je $s = d$ in graf G je antipoden. $\square$

Poglavje 3

KLASIČNI RAZDALJNO-REGULARNI GRAFI

V tem poglavju bomo obravnavali in si podrobneje ogledali družine klasičnih razdaljno-regularnih grafov. S tem bomo dobili občutek, kaj vse združuje teorija razdaljno-regularnih grafov.

Klasični razdaljno-regularni grafi so tisti razdaljno-regularni grafi, katerih presečna števila ustrezajo skupni parametrizaciji (glej [7, sec. 6.1]). Po Van Bon in Brouwer [5] so klasični razdaljno-regularni grafi naslednji: Johnsonovi grafi, Hammingovi grafi, Grassmannovi grafi, dualni polarni grafi, grafi bilinearnih preslikav, grafi alternirajočih bilinearnih preslikav, grafi hermitskih preslikav, grafi kvadratičnih form, grafi tipa E_7 in afini grafi tipa E_6. Ker smo Johnsonove in Hammingove grafe predstavili že v prejšnjem poglavju, bomo njihov opis v tem poglavju izpustili.

Podali bomo samo osnovne informacije o klasičnih razdaljno-regularnih grafih. Več o njih si bralec lahko prebere v Brouwer et al. [7, Ch. 9], kjer so tudi dokazi izrekov, ki so tukaj navedeni.

V tem poglavju bomo z $GF(q)^n$ označevali n-dimenzionalen vektorski prostor nad končnim obsegom $GF(q)$, kjer je q potenca praštevila.

3.1 Grassmannovi grafi

Naj bo q potenca praštevila, in naj bo $e \leq n$ naravno število. Naj bo G graf, ki ima za množico vozlišč množico vseh linearnih podprostorov prostora $GP(q)^n$, ki imajo dimenzijo e. Dve vozlišči (podprostora) X in Y sta povezana natanko takrat, ko je dimenzija preseka $X \cap Y$ enaka $e - 1$. Grafu G pravimo *Grassmannov graf e-dimenzionalnih podprostorov prostora $GP(q)^n$*.

Izrek 3.1.1 (Thm. 9.3.3, [7]) *Naj bo G Grassmannov graf e podprostorov prostora $GP(q)^n$. Potem je graf G razdaljno-regularen graf s premerom $d = \min(e, n-e)$. Presečna števila grafa G so*

$$b_j = q^{2j+1}\frac{q^{e-j}-1}{q-1}\frac{q^{n-e-j}-1}{q-1}, \quad c_j = \left(\frac{q^j-1}{q-1}\right)^2 \quad (0 \le j \le d).$$

□

Z Grassmannovimi grafi so povezani tudi tako imenovani *dvojni Grassmannovi grafi*. Naj bo m naravno število in V vektorski prostor dimenzije $2m+1$ nad končnim obsegom $GF(q)$. Dvojni Grassmannov graf ima za množico vozlišč množico vseh m in $(m+1)$ -dimenzionalnih linearni podprostorov prostora V. Vozlišči (podprostora) X in Y grafa G sta povezani natanko takrat, ko sta različni in je $X \subset Y$ ali $Y \subset X$.

Izrek 3.1.2 (Thm. 9.3.11, [7]) *Naj bo G zgoraj opisani dvojni Grassmannov graf. Potem je G dvodelen razdaljno-regularen graf premera $d = 2m+1$ s presečnimi števili*

$$b_{2j} = b_{2j+1} = q^j\frac{q^{m+1-j}-1}{q-1}, \quad c_{2j+1} = c_{2(j+1)} = \frac{q^j-1}{q-1} \quad (0 \le j \le m-1),$$

in

$$b_{2m} = q^m, \quad c_{2m+1} = \frac{q^m-1}{q-1}.$$

3.2 Dualni polarni grafi

Naj bosta q in r pa potenci praštevila, V pa eden od naslednjih prostorov, opremljen z ustrezno formo:

a) $GF(q)^{2d}$ z nedegenerirano simplektično formo,

b) $GF(q)^{2d+1}$ z nedegenerirano kvadratično formo,

c) $GF(q)^{2d}$ z nedegenerirano kvadratično formo Wittovega indeksa d,

d) $GF(q)^{2d+2}$ z nedegenerirano kvadratično formo Wittovega indeks d,

e) $GF(q)^{2d+1}$ z nedegenerirano hermitsko formo $(q = r^2)$,

f) $GF(q)^{2d}$ z nedegenerirano hermitsko formo $(q = r^2)$.

Nekaj več znanja o teh prostorih in njihovih formah lahko bralec dobi v Artin [1] in Dieudonne [10].
Podprostor prostora V bomo imenovali *izotropičen*, kadar je forma na njem povsod enaka 0. Maksimalni izotropični podprostori imajo dimenzijo d. *Dualni polarni graf prostora* V ima za množico vozlišč množico vseh maksimalnih izotropičnih podprostorov prostora V. Dve vozliš"i (podprostora) X in Y sta povezani natanko takrat, ko je dimenzija preseka $X \cap Y$ enaka $d-1$.

Izrek 3.2.1 (Thm. 9.4.3, [7]) *Naj bo V eden od zgoraj naštetih prostorov in naj bo $e = 1, 1, 0, 2, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$ glede na to, ali je V iz točke a), b), c), d), e) ali f). Naj bo G dualni polarni graf prostora V. Potem je G razdaljno-regularen s premerom d in presečnimi števili*

$$b_j = q^{j+e}\frac{q^{d-j}-1}{q-1}, \quad c_j = \frac{q^j-1}{q-1} \quad (0 \leq j \leq d).$$

□

3.3 Grafi bilinearnih preslikav

Naj bosta d in e naravni števili, q potenca praštevila ter $V = GF(q)^d$ in $W = GF(q)^e$. Vektorski prostor B naj bo vektorski prostor vseh bilinearnih preslikav iz $V \times W$ v $GF(q)$. Vektorski prostor B je izomorfen vektorskemu prostoru vseh linearnih preslikav iz $V \otimes W$ v $GF(q)$ in ima dimenzijo $d \cdot e$. *Ničelni prostor* bilinearne preslikave $f \in B$ v V je definiran kot $\{v \in V; f(v, W) = 0\}$. *Rang* bilinearne preslikave $f \in B$ pa definiramo kot kodimenzijo vsakega od njenih ničelnih prostorov (v V in W).

Naj bo graf G definiran takole. Množica njegovih vozlišč naj bo kar množica vseh bilinearnih preslikav iz prostora B. Dve bilinearni preslikavi f in g sta povezani natanko takrat, ko je rang preslikave $f - g$ enak 1.

Graf G lahko definiramo tudi takole. Njegova vozlišča naj bodo kar vse matrike dimenzije $d \times e$ nad končnim obsegom $GF(q)$. Dve matriki sta povezani natanko takrat, ko je rang njune razlike enak 1.

Izrek 3.3.1 (Thm. 9.5.2, [7]) *Naj bo G graf bilinearnih preslikav in naj bo $d \leq e$. Potem je G razdaljno-regularen graf premera d s presečnimi števili*

$$b_j = q^{2j}(q^{d-j}-1)\frac{q^{e-j}-1}{q-1}, \quad c_j = q^{j-1}\frac{q^j-1}{q-1} \quad (0 \leq j \leq d).$$

□

3.4 Grafi alternirajočih bilinearnih preslikav

Naj bo n naravno število, q potenca praštevila in $V = GF(q)^n$. Naj bo A vektorski prostor vseh alternirajočih bilinearnih preslikav iz $V \times V$ v $GF(q)$. Torej $f \in A$ natanko tedaj, ko je f bilinearna in ko velja $f(x,x) = 0$ za vsak $x \in V$. Vektorski prostor A ima dimenzijo $n(n-1)/2$. Definirajmo rang alternirajoče bilinearne preslikave $f \in A$ kot dimenzijo naslednjega kvocientnega vektorskega prostora:

$$\mathrm{Rk}(f) = \dim\,(V/\mathrm{Rad}(f)),$$

kjer je *radikal* preslikave f definiran kot

$$\mathrm{Rad}(f) = \{x \in V \mid f(x,y) = 0 \text{ za vsak } y \in V\}.$$

Graf G alternirajočih bilinearnih preslikav prostora V ima za množico vozlišč vse preslikave prostora A. Dve vozlišči (preslikavi) f in g sta povezani natanko takrat, ko je rang njune razlike enak 2.

Graf G lahko definiramo tudi s pomočjo poševno-simetričnih matrik. Matrika M *poševno-simetrična* natanko tedaj, ko velja $M^T = -M$. Za množico vozlišč grafa G vzemimo kar vse poševno-simetrične matrike dimenzije $n \times n$ nad $GF(q)$, dve matriki pa naj bosta povezani natanko tedaj, ko ima njuna razlika rang 2.

Izrek 3.4.1 (Thm. 9.5.6, [7]) *Naj bo $V = GF(q)^n$ in G graf alternirajočih bilinearnih preslikav prostora V. Potem je G razdaljno-regularen graf premera $[n/2]$, njegova presečna števila pa so*

$$\left.\begin{array}{rcr} b_j &=& q^{4j}(q^{n-2j}-1)(q^{n-2j-1}-1)/(q^2-1) \\ c_j &=& q^{2j-2}(q^{2j}-1)/(q^2-1) \end{array}\right\} \quad 0 \le j \le d.$$

□

3.5 Grafi hermitskih preslikav

Naj bo n naravno število, r potenca praštevila in $q = r^2$. Dalje naj bo $V = GF(q)^n$ in H n^2-dimenzionalen vektorski prostor nad $GF(r)$ vseh Hermitskih preslikav na V. Torej je $f \in H$ natanko tedaj, ko je $f(x, \_)$ linearna za vsak $x \in V$ in je $f(y,x) = \overline{f(x,y)}$ za poljubna $x, y \in V$.

Graf G hermitskih preslikav prostora V definiramo takole. Njegova vozlišča so vse hermitske preslikave na V. Dve vozlišči (preslikavi) f in g sta povezani natanko tedaj, ko je rang njune razlike enak 1. Pri tem je rang preslikave definiran na enak način kot v razdelku o grafih alternirajočih bilinearnih preslikav.

Tudi v tem primeru lahko graf G definiramo s pomočjo matrik. Za množico vozlišč grafa G lahko vzamemo kar množico vseh hermitskih matrik dimenzije $n \times n$ nad $GF(q)$. Dve matriki sta povezani natanko tedaj, ko je rang njune razlike enak 1.

Izrek 3.5.1 (Thm. 9.5.7, [7]) *Naj bo G graf hermitskih preslikav prostora $V = GF(q)^n$, kjer je n naravno število, $q = r^2$ in r potenca praštevila. Potem je G razdaljno-regularen graf premera $d = n$, njegova presečna števila pa so*

$$b_j = \frac{q^n - q^j}{r+1}, \quad c_j = \frac{r^{j-1}(r^j - (-1)^j)}{r+1}, \quad 0 \leq j \leq d.$$

□

3.6 Grafi kvadratičnih form

Grafe kvadratičnih form je prvi konstruiral Egawa [12], izrek ki govori o presečnih številih in premeru grafa simetričnih bilinearnih preslikav pa bralec lahko najde v [7, Thm. 9.6.3].

Naj bo spet $V = GF(q)^n$, kjer je n naravno število in q potenca praštevila. *Kvadratična forma* prostora V je preslikava $\gamma : V \to GF(q)$, za katero velja

$$\gamma(ax) = a^2\gamma(x)$$

za vsak $a \in GF(q)$ in vsak $x \in V$ in za katero je

$$B_\gamma = \gamma(x+y) - \gamma(x) - \gamma(y) \quad (x, y \in V)$$

simetrična bilinearna preslikava. Naj bo Q vektorski prostor vseh kvadratičnih form prostora V. Vektorski prostor Q ima dimenzijo $n(n+1)/2$. *Radikal* kvadratične forme γ definiramo takole:

$$\mathrm{Rad}(\gamma) = \{x \in \mathrm{Rad}(B_\gamma) | \gamma(x) = 0\} = \{x \in V | \gamma(y) = \gamma(x+y) \text{ za vsak } y \in V\}.$$

Rang kvadratične forme γ pa naj bo dimenzija kvocientnega prostora $V/\mathrm{Rad}(\gamma)$. Graf G kvadratičnih form prostora V ima za množico vozlišč množico Q, torej vse kvadratične forme na prostoru V. Dve vozlišči (kvadratični formi) γ in δ sta povezani natanko tedaj, ko je rang njune razlike enak 1 ali 2.

Izrek 3.6.1 (Thm. 9.6.3, [7]) *Naj bo G graf kvadratičnih form prostora $V = GF(q)^n$. Potem je G razdaljno-regularen graf premera $d = [(n+1)/2]$, njegova presečna števila pa so*

$$\left.\begin{array}{rcr} b_j & = & q^{4j}(q^{n-2j+1} - 1)(q^{n-2j} - 1)/(q^2 - 1) \\ c_j & = & q^{2j-2}(q^{2j} - 1)/(q^2 - 1) \end{array}\right\} \quad 0 \leq j \leq d.$$

□

3.7 Afini grafi tipa E_6

Naj bo q potenca praštevila in $GF(q)$ končen obseg. S K označimo 27-dimenzionalen vektorski prostor nad obsegom $GF(q)$, ki je sestavljen iz urejenih trojk $\boldsymbol{x} = (x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)})$, kjer je $x^{(i)}$ matrika dimenzije 3×3 s koeficienti iz $GF(q)$, $(i = 1, 2, 3)$. Ta vektorski prostor opremimo z naslednjo simetrično kubično formo:

$$\mathrm{Dt}(\boldsymbol{x}) = \det x^{(1)} + \det x^{(2)} + \det x^{(3)} - \mathrm{tr}(x^{(1)}x^{(2)}x^{(3)}), \quad \boldsymbol{x} = (x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}) \in K.$$

Naj bo G graf, katerega vozlišča so elementi vektorskega prostora K. Vozlišči $\boldsymbol{x}$ in $\boldsymbol{y}$ grafa G naj bosta povezani natanko tedaj, ko je

$$\mathrm{Dt}(2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}) - \mathrm{Dt}(2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})) - 2\mathrm{Dt}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) + 2\mathrm{Dt}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) + \mathrm{Dt}(\boldsymbol{z}) = 0$$

za vsak $\boldsymbol{z} \in K$. Graf G se imenuje *afini graf tipa* E_6 nad obsegom $GF(q)$.

Izrek 3.7.1 (Thm. 10.8.1, [7]) *Naj bo G afini E_6 graf nad obsegom $GF(q)$. Potem je G razdaljno-regularen graf premera 3, njegova presečna števila pa so*

$$\left\{\frac{(q^{12}-1)(q^9-1)}{q^4-1}, q^8(q^4+1)(q^5-1), q^{16}(q-1); 1, q^4(q^4+1), q^8\frac{q^{12}-1}{q^4-1}\right\}.$$

□

Grafi tipa E_7 so grafi Lievega tipa. Ker opis teh grafov presega okvir tega poglavja, jih tukaj ne bomo opisali. Bralec se lahko z grafi Lievega tipa seznani v Brouwer et al. [7, Sec. 10.6].

Poglavje 4

EKVITABILNE PARTICIJE IN ANTIPODNI KVOCIENTI

Konstrukcija kvocientnega grafa je v teoriji grafov pomemben in koristen postopek. Z njo lahko iz “velikega” grafa G dobimo graf, ki ima marsikaj skupnega z grafom G. Ker pa je kvocientni graf manjši od originalnega grafa G, pridemo do informacij o skupnih lastnostih dosti lažje s študiranjem kvocientnega grafa, kot pa grafa G. Tak primer je recimo računanje lastnih vrednosti grafa. Vzemimo naprimer graf povezav Petersenovega grafa. Namesto da bi njegove lastne vrednosti računali kot lastne vrednosti matrike dimenzije 15×15, je dovolj, da izračunamo lastne vrednosti matrike dimenzije 4×4.

Obstaja več možnih načinov definicije kvocientnega grafa. V tem poglavju bomo opisali konstrukcijo s pomočjo ekvitabilne particije vozlišč grafa G. V prvem razdelku bomo definirali ekvitabilno particijo in z njo povezan kvocientni graf. V drugem razdelku si bomo ogledali, v kakšni povezavi so lastne vrednosti in lastni vektorji grafa G in njegovega kvocienta. V tretjem razdelku bomo definirali krovne grafe, v četrtem pa poseben primer kvocientnega grafa – antipodni kvocient.
Večina tega poglavja je povzeta po 5. poglavju Godsilove knjige [15].

4.1 Ekvitabilne particije in kvocientni grafi

Začeli bomo z definicijo ekvitabilne particije množice vozlišč grafa H.

Definicija 4.1.1 *Particija $\pi = \{C_1, C_2, \ldots, C_r\}$ množice vozlišč grafa H je* **ekvitabilna**, *če je za poljubni števili i, j , $1 \leq i, j \leq r$, število sosedov, ki jih ima vozlišče iz množice C_i v množici C_j, neodvisno od izbire vozlišča iz množice C_i. Število sosedov, ki jih ima vozlišče iz množice C_i v množici C_j, označimo s c_{ij}.*

Primer 1: Naj bo H poljuben graf in $\mathrm{Aut}(H)$ grupa njegovih avtomorfizmov. Orbite grupe $Aut(H)$ določajo particijo vozlišč grafa H. Če vozlišči u in v pripadata isti orbiti, potem obstaja $f \in \mathrm{Aut}(H)$, tako da je $f(u) = v$. Ker f preslika vsako orbito samo nase in ker ohranja sosednost, imata u in v isto število sosed v vsaki orbiti. Torej je particija vozlišč grafa, ki je določena z orbitami njegove grupe avtomorfizmov, ekvitabilna.

Primer 2: Naj bo H graf s premerom d in u neko njegovo vozlišče. *Razdaljna particija* vozlišč grafa H glede na vozlišče u je particija $\{C_0, \ldots, C_d\}$ vozlišč grafa H, za katero velja

$$C_i = \{v \in V(H)\,;\, \partial(u, v) = i\}.$$

Če je graf H razdaljno-regularen, potem je razdaljna particija glede na vsako njegovo vozlišče ekvitabilna. Velja namreč

$$c_{i,i-1} = c_i\ ,\ c_{ii} = a_i\ ,\ c_{i,i+1} = b_i$$

in $c_{ij} = 0$ sicer. Pri tem so c_i, a_i, b_i presečna števila grafa H.

Naj bo H graf in $\pi = \{C_1, \ldots, C_r\}$ ekvitabilna particija njegovih vozlišč. Naj bo c_{ij} število sosedov, ki jih ima poljubno vozlišče iz množice C_i v množici C_j.

Definicija 4.1.2 *Naj bo H graf in π ekvitabilna particija njegovih točk. Njegov* **kvocientni graf** *glede na particijo π, ki ga označimo s H/π, je usmerjen multigraf z množico vozlišč $V(H/\pi) = \{C_1, \ldots, C_r\}$, kjer od vozlišča C_i do vozlišča C_j poteka c_{ij} usmerjenih povezav.*

Kvocientni graf ima v splošnem lahko večkratne povezave in zanke. Njegova matrika sosednosti je matrika dimenzije $r \times r$, katere ij-ti element je c_{ij}.

Primer: Naj bo H Petersenov graf in $\pi = \{C_0, C_1, C_2\}$ razdaljna particija njegovih vozlišč. Ker je Petersenov graf krepko regularen, in s tem tudi razdaljno-regularen, je particija π ekvitabilna. Kvocientni graf H/π je usmerjeni graf na treh vozliščih: $V(H/\pi) = \{C_0, C_1, C_2\}$. Od vozlišča C_0 do vozlišča C_1 potekajo tri povezave, od C_1 do C_0 pa ena. Od C_1 do C_2 potekata dve povezavi, od C_2 do C_1 ena povezava. Poleg tega sta pri vozlišču C_2 še dve zanki. Njegova matrika sosednosti je

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4.2 Lastne vrednosti in lastni vektorji

V tem razdelku bomo opisali povezavo med lastnimi vrednostmi in lastnimi vektorji grafa in njegovega kvocienta. *Karakteristična matrika* $P = P(\pi)$ particije $\pi = \{C_1, \ldots, C_r\}$ množice $\{x_1, \ldots, x_n\}$ z n elementi, je $n \times r$ matrika, za katero je

$$(P)_{ij} = \begin{cases} 1; & x_i \in C_j \\ 0; & x_i \notin C_j \end{cases}$$

Lema 4.2.1 *Naj bo π particija vozlišč grafa H in P njena karakteristična matrika. Če je π ekvitabilna, potem je*

$$A(H)P = PA(H/\pi).$$

Obratno: particija π je ekvitabilna samo če obstaja taka matrika B, da je $A(H)P = PB$.

Dokaz. Naj bo π particija vozlišč grafa H in naj bo $A = A(H)$. Element ij matrike AP je enak številu vozlišč iz množice C_j, ki so sosednje vozlišču i grafa H. Če je particija π ekvitabilna, potem je to število odvisno samo od množice particije π, v kateri i leži. Torej so tiste vrstice produkta AP, ki pripadajo vozliščem, ki ležijo v C_1, enake $(c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1r})$, tiste vrstice, ki pripadajo vozliščem iz C_2, so enake $(c_{21}, c_{22}, \ldots, c_{2r})$, in tako naprej. Sedaj pa ni težko videti, da je $AP = PB$, kjer je $(B)_{ij} = c_{ij}$.

Vzemimo obratno, da je $AP = PB$. Naj bosta i in j dve vozlišči iz množice C_ℓ particije π. Naj bo C_k poljubna množica particije π. Vozlišče i ima $(AP)_{ik}$ sosedov v C_k, vozlišče j pa $(AP)_{jk}$. Ker pa je $(AP)_{ik} = (PB)_{ik}$ in $(AP)_{jk} = (PB)_{jk}$, je

$$(AP)_{ik} = \sum_{a=1}^{r} p_{ia} b_{ak} = b_{\ell k}$$

in

$$(AP)_{jk} = \sum_{a=1}^{r} p_{ja} b_{ak} = b_{\ell k}.$$

Torej imata poljubni dve vozlišči iz C_ℓ vedno $b_{\ell k}$ sosedov v C_k, kar pa pomeni, da je particija π ekvitabilna. $\square$

Definicijo ekvitabilne particije lahko prevedemo neposredno v jezik linearne algebre. Velja namreč naslednja lema.

Lema 4.2.2 *Naj bo H graf, A njegova matrika sosednosti in π particija vozlišč grafa H s karakteristično matriko P. Potem je π ekvitabilna natanko tedaj, ko je vektorski podprostor, ki ga napenjajo stolpci matrike P, A-invarianten.*

Dokaz. Ni težko videti, da je vektorski podprostor, ki ga določajo stolpci matrike P, A-invarianten natanko tedaj, ko obstaja taka matrika B, da je $AP = PB$. Če je particija π ekvitabilna, potem lahko po lemi 4.2.1 za matriko B vzamemo kar matriko $A(H/\pi)$. Obrat pa smo dokazali že v dokazu leme 4.2.1

□

Poglejmo si sedaj povezavo med lastnimi vrednostmi in lastnimi vektorji grafa H in njegovega kvocientnega grafa H/π.

Lema 4.2.3 *Naj bo π ekvitabilna particija vozlišč grafa H in naj bo $A = A(H)$, $B = A(H/\pi)$ in $P = P(\pi)$. Potem*

(i) če je $B\boldsymbol{x} = \theta\boldsymbol{x}$, potem je $AP\boldsymbol{x} = \theta P\boldsymbol{x}$;

(ii) če je $A\boldsymbol{y} = \theta\boldsymbol{y}$, potem je $\boldsymbol{y}^T PB = \theta\boldsymbol{y}^T P$.

Dokaz. Naj bo $B\boldsymbol{x} = \theta\boldsymbol{x}$. Potem je

$$\theta P\boldsymbol{x} = P\theta\boldsymbol{x} = PB\boldsymbol{x} = AP\boldsymbol{x}.$$

Podobno, če je $A\boldsymbol{y} = \theta\boldsymbol{y}$, potem je

$$\theta\boldsymbol{y}^T P = \boldsymbol{y}^T AP = \boldsymbol{y}^T PB.$$

□

Točka (i) zgornje leme nam pove, da če je $\boldsymbol{x}$ lastni vektor grafa H/π z lastno vrednostjo θ, potem je $P\boldsymbol{x}$ lastni vektor grafa H z isto lastno vrednostjo. Če je vektor $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_r)$, potem ima vektor $P\boldsymbol{x}$ koordinato i enako x_k natanko takrat, ko $i \in C_k$. Od tod vidimo, da se večkratnost lastne vrednosti θ v grafu H ne more zmanjšati, kvečjemu se lahko poveča.

Podobno nam točka (ii) pove, da če je $\boldsymbol{y}$ lastni vektor grafa H z lastno vrednostjo θ, potem je v primeru, ko je $\boldsymbol{y}^T P \neq \mathbf{0}$, vektor $\boldsymbol{y}^T P$ lastni vektor grafa H/π z isto lastno vrednostjo. Če je torej $\boldsymbol{y}$ lastni vektor grafa H, ki ni lastni vektor grafa H/π, potem je vsota njegovih koordinat, ki pripadajo množici C_i, enaka 0 za vsak i.

4.3 Krovi

Če je π ekvitabilna particija vozlišč grafa H, potem ima kvocientni graf H/π lahko zanke in večkratne povezave. Če pa velja, da je $c_{ii} = 0$ za vsak i in $c_{ij} = c_{ji} \in \{0,1\}$ za $i \neq j$, potem pravimo, da je H **krovni graf** kvocientnega grafa H/π. V tem primeru v kvocientnem zank ni, vsak par usmerjenih povezav med dvema vozliščema pa lahko nadomestimo z neusmerjeno povezavo med tema dvema vozliščema.

Opomba: Bralec z nekoliko topološkega znanja bo spoznal, da je topološki objekt, ki je prirejen krovnemu grafu H, tudi *topološki krov* nad topološkim objektom, ki je prirejen kvocientnemu grafu H/π.

Naj bosta sedaj C_i in C_j dve množici take particije, med katerima obstaja vsaj ena povezava. Torej je $c_{ij} = c_{ji} = 1$ in je zato vsako vozlišče iz C_i povezana z natanko enim vozliščem iz C_j in obratno. Množici C_i in C_j imata potemtakem isto moč r. Dokazali smo torej naslednjo lemo.

Lema 4.3.1 *Naj bo H krovni graf povezanega grafa $G = G/\pi$. Potem imajo vse množice particije π isto moč.* □

Moč množic C_i bomo v tem primeru imenovali *krovni indeks*.

Primer: Naj bo graf H 9-cikel. Njegova vozlišča naj bodo označene kar z naravnimi števili od 1 do 9. Particija π njegovih vozlišč naj bo definirana takole: $C_i = \{i, i+3, i+6\}$, kjer je $i \in \{1,2,3\}$. Bralec se lahko sam prepriča, da je particija π ekvitabilna, in da je graf H krov svojega kvocientnega grafa H/π, ki je trikotnik.

4.4 Antipodni kvocient

Naj bo G antipoden razdaljno-regularen graf premera $d \geq 3$. Spomnimo se, da antipodnost pomeni, da je relacija 'biti na razdalji 0 ali d', ki jo bomo v tem razdelku označevali z $\mathcal{R}$, ekvivalenčna relacija na množici vozlišč grafa G. Zato nam ta relacija razbije množico vozlišč grafa G na disjunktno unijo ekvivalenčnih razredov. Pokažimo sedaj naslednjo lemo.

Lema 4.4.1 *Naj bo H povezan antipoden razdaljno-regularen graf premera $d \geq 3$. Če med dvema ekvivalenčnima razredoma relacije $\mathcal{R}$ obstaja povezava, potem je med tema dvema razredoma popolno prirejanje.*

Opomba: Z besedo *popolno prirejanje* množic A in B mislimo, da je vsako vozlišče iz množice A povezano z natanko enim vozliščem iz množice B, in obratno.

DOKAZ. Naj bosta A in B ekvivalenčna razreda relacije $\mathcal{R}$, med katerima obstaja povezava, in $x \in A$ ter $y \in B$ ustrezni krajišči. Najprej vidimo, da x ne more biti povezan s še enim vozliščem – recimo z – iz B, ker bi bila potem razdalja med y in z enaka 2. To pa ne gre, zaradi predpostavke, da je $d \geq 3$. Vzemimo sedaj poljuben $x' \in A$. Ker x' ni v istem ekvivalenčnem razredu kot vozlišče y, je $\partial(x', y) \leq d - 1$. Ker pa je $\partial(x, x') = d$, je $\partial(x', y) = d - 1$. Torej je $x' \in S_{d-1}(y)$. Ker je graf H povezan, je po lemi 2.3.1 (iv) $b_{d-1} \geq 1$, torej je x' povezan z vsaj enim vozliščem iz B. Videli smo, da x' ne more biti povezan z več kot enim vozliščem iz B, zato je vsako vozlišče iz A povezano z natanko enim vozliščem iz B. Podobno vidimo, da je vsako vozlišče iz B povezano z natanko enim vozliščem iz A. □

V resnici smo s to lemo pokazali, da je particija antipodnega razdaljno-regularnega grafa na antipodne razrede ekvitabilna. Še več, graf H je krov svojega kvocienta glede na to particijo. Kvocient grafa H glede na to particijo bomo imenovali *antipodni kvocient grafa H*. Ker se bomo z antipodnimi kvocienti še ukvarjali, povzemimo vse to v definiciji 4.4.1.

Definicija 4.4.1 *Naj bo H povezan antipoden razdaljno-regularen graf premera $d \geq 3$. Njegov* **antipodni kvocient** *je graf G, katerega množico vozlišč sestavljajo ekvivalenčni razredi relacije $\mathcal{R}$ grafa H. Dve vozlišči grafa G sta povezani, če med ustreznima ekvivalenčnima razredoma obstaja popolno prirejanje. Graf H je* **antipodni krov** *grafa G. Ekvivalenčnemu razredu, ki ustreza vozlišču x grafa G pravimo* **vlakno** *nad vozliščem x. Če je r moč vlakna nad poljubnim vozliščem grafa G, potem je r* **indeks** *krova H nad grafom G. Pravimo tudi, da je H* **antipodni** r**-krov** *nad G. V angleški literaturi se je za graf G udomačilo ime 'folded H' (npr. 'folded Johnson graph').*

Primer: Naj bo graf H 1-skelet dodekaedra. Premer grafa H je 5 in za dano vozlišče x grafa H obstaja natanko eno vozlišče y, ki je na razdalji 5 od vozlišča x. Graf H je torej antipoden, moč antipodnih razredov pa je 2. Drugače povedano: v vsakem antipodnem razredu sta dve diametralno nasprotni vozlišči dodekaedra. Bralec se lahko sam prepriča, da je antipodni kvocient dodekaedra Petersenov graf. Presenetljiva pa je naslednja asociacija. Dodekaeder ("žogo") lahko na naraven način vložimo v sfero S^2. Topološki kvocient sfere pa je projektivna ravnina, v kateri je na naraven način vložen Petersenov graf (glej sliko 4.1 in 4.2).

V naslednjem izreku bomo navedli nekatere povezave med presečnimi števili antipodnega razdaljno-regularnega grafa H in njegovega antipodnega kvocienta G. Dokaz izreka bralec lahko najde v Gardiner [14] in Jurišić [18, Thm. 4.2.2].

Izrek 4.4.2 *Naj bo H antipoden razdaljno-regularen graf premera $d \in \{2m, 2m+1\}$, $d \geq 3$, in G njegov antipodni kvocient. Potem je*

(i) Krovni indeks r je enak $1 + b_m/c_{d-m}$.

(ii) Graf G je razdaljno-regularen premera m.

(iii) Če so $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, c_2, \ldots, c_d\}$ presečna števila grafa H, potem so presečna števila grafa G

$$\{b_0, b_1, \ldots, b_{m-1}; c_1, c_2, \ldots, c_{m-1}, \gamma c_m\},$$

kjer je $\gamma = r$, če je $d = 2m$, in $\gamma = 1$, če je $d = 2m+1$.

(iv) Če so $\{b_0, b_1, \ldots, b_{m-1}; c_1, c_2, \ldots, c_m\}$ presečna števila grafa G, potem so presečna števila grafa H enaka

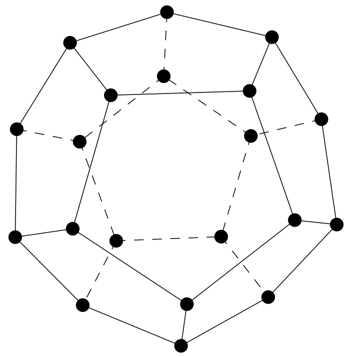
$$\{b_0, \ldots, b_{m-1}, \frac{(r-1)c_m}{r}, c_{m-1}, \ldots, c_1; c_1, \ldots, c_{m-1}, \frac{c_m}{r}, b_{m-1}, \ldots, b_0\}$$

v primeru, ko je $d = 2m$, in

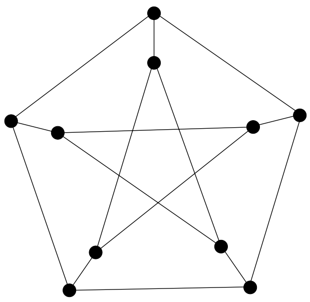
$$\{b_0, \ldots, b_{m-1}, (r-1)t, c_m, , \ldots, c_1; c_1, \ldots, c_m, t, b_{m-1}, \ldots, b_0\}$$

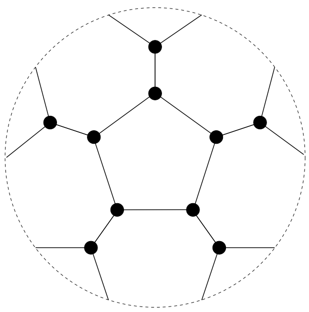
za neko celo število t v primeru, ko je $d = 2m+1$. $\square$

Primer: Dodekaeder ima premer $5 = 2 \cdot 2 + 1$, njegova presečna števila pa so $\{3, 2, 1, 1, 1\ ;\ 1, 1, 1, 2, 3\}$. Njegov antipodni kvocient je Petersenov graf, ki ima premer 2 in presečna števila $\{3, 2; 1, 1\}$. Krovni indeks je v tem primeru enak 2.



Slika 4.1: Dodekaeder





Slika 4.2: Petersenov graf (levo) in Petersenov graf vložen v projektivno ravnino (desno)

Poglavje 5

ASOCIATIVNE SHEME

Asociativne sheme so eden izmed najpomembnejših objektov algebraične kombinatorike. Tudi razdaljno-regularni grafi nam dajo asociativne sheme, obratno pa ne drži: obstajajo asociativne sheme, ki ne izhajajo iz razdaljno-regularnih grafov. Razlog za obravnavo asociativnih shem v tem delu je ta, da na mnoga vprašanja o razdaljno-regularnih grafih najlažje odgovorimo v okviru asociativnih shem.

Poglavje o asociativnih shemah je razdeljeno na tri razdelke. V prvem bomo podali definicijo asociativnih shem. V drugem razdelku si bomo ogledali nekatere objekte in strukture, ki pripadajo vsaki asociativni shemi: Bose-Mesnerjevo algebro, presečna števila, Kreinove parametre. V tretjem razdelku pa bomo dokazali pomemben potreben pogoj za obstoj asociativne sheme, to je nenegativnost njenih Kreinovih parametrov.

5.1 Definicija asociativnih shem

Začnimo z definicijo asociativne sheme.

Definicija 5.1.1 *Naj bo d naravno število in X poljubna končna množica. Asociativna shema z d razredi na množici X je množica d nepraznih grafov $G_1, \ldots, G_d$, ki imajo množico vozlišč X, in za katere velja*

(a) če sta x in y različni vozlišči množice X, potem obstaja natanko en graf G_i, v katerem sta x in y povezana;

(b) za vsak par $x, y \in X$ in za vsaka $i, j \in \{1, \ldots, d\}$, je število vozlišč $z \in X$ za katere je $(x, z) \in E(G_i)$ in $(y, z) \in E(G_j)$ odvisno samo od grafa G_k, za katerega velja $(x, y) \in E(G_k)$.

Rekli bomo, da je graf G_i i-ti razred asociativne sheme. Če v točki (b) zgornje definicije vzamemo, da je $i = j$ in $x = y$, potem vidimo, da morajo biti grafi asociativne sheme regularni.

Včasih je zelo ugodno, da zgornjo definicijo asociativne sheme povemo s pomočjo matrik. V tem primeru je definicija naslednja.

Definicija 5.1.2 *Naj bosta d in n naravni števili. Asociativna shema $\mathcal{A}$ z d razredi je množica $\{A_0, A_1, \ldots, A_d\}$ neničelnih $n \times n$ matrik, katerih elementi so bodisi 0 bodisi 1, in za katere velja*

- *(a)* $A_0 = I$,
- *(b)* $\sum_{i=0}^{d} A_i = J$,
- *(c)* $A_i^T = A_i$,
- *(d) za vsak i in j je produkt A_iA_j linearna kombinacija matrik $A_0, \ldots, A_d$,*

kjer je I identična matrika, J matrika iz samih enic in A^T označuje transponiranje.

Ni težko videti, da sta ti dve definiciji ekvivalentni. Matrike A_i so namreč ravno matrike sosednosti grafov G_i.

Značilen primer asociativnih shem so razdaljno-regularni grafi. Lema 2.4.1 nam namreč pove, da razdaljne matrike razdaljno-regularnega grafa tvorijo asociativno shemo. Obstajajo tudi asociativne sheme, ki ne izhajajo iz razdaljno-regularnih grafov, vendar se z njimi tu ne bomo ukvarjali. Primer take asociativne sheme lahko bralec najde v Godsil [15, str. 222].

5.2 Bose-Mesnerjeva algebra, presečna števila in Kreinovi parametri

Z vsako asociativno shemo $\mathcal{A}$ je tesno povezana njena Bose-Mesnerjeve algebra. Najprej navedimo njeno definicijo.
Bose-Mesnerjeva algebra asociativne sheme $\mathcal{A}$ je realen vektorski prostor, ki ga napenjajo matrike A_i. Označujemo jo s $\mathrm{span}(\mathcal{A})$.

Ime *algebra* je upravičeno, saj je po točki (d) definicije 5.1.2 ta vektorski prostor zaprt za matrično množenje. Je pa Bose-Mesnerjeva algebra zaprta še za eno vrsto množenja matrik, za tako imenovani *Schurov produkt* matrik. Schurov produkt dveh $m \times n$ matrik B in C je $m \times n$ matrika $B \circ C$, definirana z

$$(B \circ C)_{ij} = (B)_{ij}(C)_{ij}, \quad 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n.$$

Ta produkt je znan tudi pod imenom *Hadamarjev produkt* matrik B in C. Ker so matrike A_i sestavljene samo iz ničel in enic, in ker se seštejejo v matriko J, je očitno

$$A_i \circ A_j = \delta_{ij} A_i. \tag{5.1}$$

Iz tega pa sledi, da je algebra $\mathrm{span}(\mathcal{A})$ zaprta tudi za Schurovo množenje. Če torej povzamemo, Bose-Mesnerjeva algebra asociativne sheme $\mathcal{A}$ je algebra z identiteto glede na običajno matrično množenje in glede na Schurovo množenje. Identiteta za Schurovo množenje je matrika J.
Iz enačbe (5.1) pa sledi tudi naslednja lema.

Lema 5.2.1 *Matrike A_i tvorijo bazo za* $\mathrm{span}(\mathcal{A})$.

Dokaz. Ni se težko prepričati, da seštevanje matrik in Schurovo množenje matrik povezuje distributivnostni zakon. Recimo, da bi veljalo $\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_d A_d = 0$. Potem to enačbo lahko pomnožimo (Schurov produkt) z A_j in dobimo $\alpha_j A_j = 0$, torej $\alpha_j = 0$. Ker to lahko naredimo za vsak j, je $\alpha_1 = \cdots = \alpha_d = 0$. □

V Bose-Mesnerjevo algebro asociativne sheme $\mathcal{A}$ lahko vpeljemo tudi običajen skalarni produkt:

$$\langle B, C\rangle = \mathrm{tr}(B^T C) = \mathrm{tr}(BC).$$

Naj bo B matrika. Potem z $\sum B$ označimo vsoto vseh njenih elementov. Dokažimo sedaj naslednjo zelo uporabno lemo.

Lema 5.2.2 *Naj bosta B in C matriki iz* $\mathrm{span}(\mathcal{A})$. Potem velja

$$\langle B, C\rangle = \sum (B \circ C).$$

Dokaz. Ker sta matriki B in C simetrični, sta leva in desna stran zgornje enakosti enaki

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij} c_{ij}.$$

□

Naslednji izrek nam pove, da ima Bose-Mesnerjeva algebra asociativne sheme $\mathcal{A}$ še eno bazo, ki jo sestavljajo matrike, ki so idempotenti glede na običajno matrično množenje. Njegov dokaz si bralec lahko prebere v Godsil [15, Thm 12.2.1].

Izrek 5.2.3 *Naj bo $\mathcal{A}$ d-razredna asociativna shema na množici moči n in $A_0, \ldots, A_d$ njene matrike. Potem obstaja množica paroma ortogonalnih idempotentnih matrik $E_0, \ldots, E_d$ in realna števila $p_i(j)$, za katere velja*

(i) $\sum_{i=0}^{d} E_i = I$,

(ii) $A_i E_j = p_i(j) E_j$,

(iii) $E_0 = \frac{1}{n} J$,

(iv) $\{E_0, \ldots, E_d\}$ *je baza za* $\mathrm{span}(\mathcal{A})$. □

Matrike E_j bomo imenovali *glavni idempotenti* asociativne sheme $\mathcal{A}$, števila $p_i(j)$ pa *lastne vrednosti* asociativne sheme $\mathcal{A}$ (ime opravičuje točka (ii) izreka 5.2.3). Ker je $A_0 = I$, je $p_0(j) = 1$ za vsak j. Ker je $E_0 = \frac{1}{n}J$, je $p_i(0)$ enak številu neničelnih elementov v bilokateri vrstici matrike A_i - to pa je ravno stopnja grafa G_i. Označevali jo bomo z k_i. Ker je $E_j^2 - E_j = 0$, so lastne vrednosti matrike E_j enake 0 ali 1. Torej je sled matrike E_j enaka rangu matrike E_i, ki ga bomo označevali z m_j. Ta števila bomo imenovali *večkratnosti* asociativne sheme $\mathcal{A}$.

Iz točke (ii) izreka 5.2.3 sledi naslednja enakost

$$A_i = A_i I = A_i \sum_{j=0}^{d} E_j = \sum_{j=0}^{d} A_i E_j = \sum_{j=0}^{d} p_i(j) E_j. \tag{5.2}$$

Ker matrike $A_0, \ldots, A_d$ tvorijo bazo za $\mathrm{span}(\mathcal{A})$, obstajajo števila $q_i(j)$, tako da je

$$E_i = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{d} g_i(j) A_j. \tag{5.3}$$

Imenovali jih bomo dualne lastne vrednosti asociativne sheme. Če enačbo (5.3) pomnožimo z A_k, dobimo

$$E_i \circ A_k = \frac{1}{n} g_i(k) A_k.$$

Če v to enakost vstavimo $k = 0$, dobimo $m_i = q_i(0)$.
Ker je $\mathrm{span}(\mathcal{A})$ zaprta za običajno matrično množenje, obstajajo števila p_{ij}^k, za katera velja

$$A_i A_j = \sum_{r=0}^{d} p_{ij}^r A_r. \tag{5.4}$$

Ker pa je algebra span($\mathcal{A}$) zaprta tudi za Schurovo množenje, obstajajo števila q_{ij}^k, za katera velja

$$E_i \circ E_j = \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{d} q_{ij}^r E_r. \tag{5.5}$$

Števila p_{ij}^k imenujemo *presečna števila*, števila q_{ij}^k pa *Kreinovi parametri* asociativne sheme $\mathcal{A}$. Ker so elementi produkta $A_i A_j$ nenegativna cela števila, morajo biti tudi presečna števila nenegativna cela števila.
Presečna števila in Kreinove parametre asociativne sheme lahko izrazimo z lastnimi vrednostmi $p_i(j)$. Iz 5.4 dobimo

$$(A_i A_j) \circ A_k = p_{ij}^k \, A_k,$$

od tod pa iz leme 5.2.2

$$p_{ij}^k \sum A_k = \sum((A_i \, A_j) \circ A_k = \mathrm{tr}((A_i \, A_j) \, A_k).$$

Iz enačbe 5.2 dobimo, da je

$$A_i A_j = \sum_{\ell=0}^{n} p_i(\ell) \, p_j(\ell) \, E_\ell$$

in zato tudi

$$(A_i \, A_j) A_k = \sum_{\ell=0}^{n} p_i(\ell) \, p_j(\ell) \, p_k(\ell) \, E_\ell.$$

Torej je

$$p_{ij}^k \sum A_k = \sum_{\ell=0}^{n} p_i(\ell) \, p_j(\ell) \, p_k(\ell) \, \mathrm{tr}(E_\ell) =$$

$$= \sum_{\ell=0}^{n} p_i(\ell) \, p_j(\ell) \, p_k(\ell) \, m_\ell.$$

Na podoben način dobimo

$$\frac{1}{n} q_{ij}^k m_k = \frac{1}{n^3} \sum_{\ell=0}^{n} q_i(\ell) \, q_j(\ell) \, q_k(\ell) \, \sum A_\ell.$$

Po izreku 5.2.3 (ii) je $A_i E_j = p_i(j) E_j$, in zato po lemi 5.2.2

$$p_i(j) \, \mathrm{tr}(E_j) = \mathrm{tr}(p_i(j) \, E_j) = \mathrm{tr}(A_i \, E_j) = \sum (A_i \circ E_j).$$

Ker pa je $A_i \circ E_j = \frac{1}{n} q_j(i) A_i$, smo dokazali enakost

$$p_i(j)\, m_j = \frac{1}{n}\, q_j(i) \sum A_i.$$

Torej je

$$q_{ij}^k = n\, m_i\, m_j \sum_{\ell=0}^{n} p_\ell(i)\, p_\ell(j)\, p_\ell(k) / \left(\sum A_\ell \right)^2. \tag{5.6}$$

5.3 Kreinovi parametri

V tem razdelku bomo dokazali pomemben potreben pogoj za obstoj asociativne sheme, to je nenegativnost Kreinovih parametrov. Ideja dokaza je podana v [15, str. 255, nal. 35]. Najprej pa potrebujemo nekaj pomožnih rezultatov.

Lema 5.3.1 *Naj bo n naravno število, A matrika velikosti $n \times n$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ vektorja in $B = \boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^T$. Potem je*

$$\boldsymbol{x}^T (B \circ A)\, \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{y})^T A\, (\boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{y}).$$

DOKAZ. Naj bo $A = (a_{ij})$, $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ in $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T$. Potem je $(B)_{ij} = y_i\, y_j$ in $(B \circ A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}$, kjer je $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$ in $z_i = \sum_{k=1}^n y_i\, y_k\, a_{ik}\, x_k$. Torej je

$$\boldsymbol{x}^T (B \circ A)\, \boldsymbol{x} = \sum_{l=1}^{n} x_l\, y_l \sum_{k=1}^{n} y_k\, a_{lk}\, x_k.$$

Po drugi strani pa je $A(\boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{w}$, kjer je $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ in $w_i = \sum_{k=1}^n a_{ik}\, x_k\, y_k$. Torej je

$$(\boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{y})^T A (\boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{y}) = \sum_{l=1}^{n} x_l\, y_l \sum_{k=1}^{n} y_k\, a_{lk}\, x_k.$$

Lema je tako dokazana. □

Lema 5.3.2 *Naj bo n naravno število in A pozitivna semidefinitna matrika velikosti $n \times n$. Potem je za vsak $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ pozitivna semidefinitna tudi matrika $B = \boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^T \circ A$.*

DOKAZ. Ker je $(B)_{ij} = y_i\, y_j\, (A)_{ij} = y_j\, y_i\, (A)_{ji} = (B)_{ji}$, matrika B simetrična. Pokazati moramo še, da je $\boldsymbol{x}^T B \boldsymbol{x} \geq 0$ za vsak vektor $\boldsymbol{x}$. Po lemi 5.3.1 in zaradi pozitivne definitnosti matrike A dobimo

$$\boldsymbol{x}^T B\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T (\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^T \circ A)\, \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{y})^T A\, (\boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{y}) \geq 0.$$

□

Lema 5.3.3 *Naj bosta A in B pozitivno definitni matriki velikosti $n \times n$. Potem je pozitivno definitna tudi matrika $C = A \circ B$.*

Dokaz. Ker je A simetrična matrika, jo lahko izrazimo v obliki $A = PDP^T$, kjer je D diagonalna matrika z lastnimi vrednostmi matrike A na diagonali. Ker je A pozitivna semidefinitna, so njene lastne vrednosti nenegativne. Z $\boldsymbol{y}_k$ označimo k-ti stolpec matrike P. Bralec se lahko sam prepriča, da velja

$$A = PDP^T = \sum_{i=1}^{n} (D)_{ii} \boldsymbol{y}_i \boldsymbol{y}_i^T.$$

Naj bo sedaj $\boldsymbol{x}$ poljuben vektor iz $\mathbb{R}^n$. Potem imamo

$$\boldsymbol{x}^T (A \circ B) \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T \left(\sum_{i=1}^{n} ((D)_{ii} \boldsymbol{y}_i \boldsymbol{y}_i^T \circ B \right) \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} (D)_{ii} \boldsymbol{x}^T (\boldsymbol{y}_i \boldsymbol{y}_i^T \circ B) \boldsymbol{x}.$$

Vsak sumand te vsote je nenegativen, ker je $(D)_{ii} \geq 0$ in po lemi 5.3.2 tudi $\boldsymbol{x}^T (\boldsymbol{y}_i \boldsymbol{y}_i^T \circ B) \boldsymbol{x} \geq 0$. Torej je $\boldsymbol{x}^T (A \circ B) \boldsymbol{x} \geq 0$. Lema je s tem dokazana. □

Izrek 5.3.4 *Kreinovi parametri q_{ij}^k asociativne sheme $\mathcal{A}$ so nenegativni.*

Dokaz. Ker so matrike E_i paroma ortogonalne idempotentne matrike, dobimo iz enačbe 5.5 (če jo pomnožimo z E_k)

$$(E_i \circ E_j) E_k = \frac{1}{n} q_{ij}^k E_k.$$

To pomeni, da je q_{ij}^k lastna vrednost matrike $E_i \circ E_j$ na podprostoru vektorjev, ki ga določajo stolpci matrike E_k. Matrike E_i so pozitivno semidefinitne (ker so simetrične, njihove lastne vrednosti pa so lahko samo 0 ali 1). Po lemi 5.3.3 je zato tudi Schurov produkt $E_i \circ E_j$ semidefiniten in ima zato nenegativne lastne vrednosti. Torej $q_{ij}^k \geq 0$. □

Opomba: Alternativni dokaz dejstva, da so Kreinovi parametri q_{ij}^k asociativne sheme $\mathcal{A}$ nenegativni, si lahko bralec prebere v Godsil [15, Lemma 12.4.1].

Sedaj pa si poglejmo še, kakšno vrednost imajo Kreinovi parametri q_{ij}^k.

Lema 5.3.5 *Naj bo $\mathcal{A}$ asociativna shema in q_{ij}^k njeni Kreinovi parametri. Potem je*

$$q_{ij}^0 = \delta_{ij} m_i.$$

DOKAZ. Če enačbo 5.5 pomnožimo z E_0, dobimo

$$(E_i \circ E_j)E_0 = \frac{1}{n}\, q_{ij}^0\, E_0.$$

Torej je

$$\mathrm{tr}((E_i \circ E_j)E_0) = \frac{1}{n}\, q_{ij}^0\, \mathrm{tr}(E_0).$$

Ker je $E_0 = \frac{1}{n}J$, je $\mathrm{tr}(E_0)$=1. Zato je

$$\frac{1}{n}\, g_{ij}^0 = \mathrm{tr}((E_i \circ E_j)E_0) = \sum \big(E_i \circ E_j \circ E_0\big) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum (E_i \circ E_j) = \frac{1}{n}\, \mathrm{tr}(E_i E_j) = \frac{1}{n}\, \delta_{ij}\, \mathrm{tr}(E_i) = \frac{1}{n}\, \delta_{ij}\, m_i.$$

□

Poglavje 6

KREINOVI PARAMETRI IN LASTNE VREDNOSTI RAZDALJNO-REGULARNEGA GRAFA

O lastnih vrednostih razdaljno-regularnega grafa lahko povemo dosti več kot o lastnih vrednostih splošnega grafa. Nenegativnost Kreinovih parametrov in celoštevilskost večkratnosti lastnih vrednosti razdaljno-regularnega grafa pa mnogokrat predstavljajo pomembne potrebne pogoje za obstoj le-tega. Zato je zelo priročno, če imamo Kreinove parametre in lastne vrednosti razdaljno-regularnega grafa izražene z njegovimi presečnimi števili.

V prvem razdelku tega poglavja si bomo podrobneje ogledali Kreinove parametre razdaljno-regularnega grafa, v drugem pa njegove lastne vrednosti. Tretji razdelek bo namenjen povezavam med lastnimi vrednostmi antipodnega razdaljno-regularnega grafa in njegovega kvocienta. V četrtem razdelku pa se bomo še bolj podrobno posvetili Kreinovim parametrom in lastnim vrednostim antipodnih razdaljno-regularnih grafov premera 4, s katerimi se bomo ukvarjali tudi v naslednjem poglavju. V petem razdelku si bomo ogledali tesne antipodne razdaljno-regularne grafe premera 4.

6.1 Kreinovi parametri razdaljno-regularnega grafa

Ker razdaljne matrike razdaljno-regularnega grafa G premera d določajo d-razredno asociativno shemo, so grafu G prirejeni tudi Kreinovi parametri q_{ij}^k ustrezne asociativne sheme. Ker smo v izreku 5.3.4 dokazali, da morajo biti

Kreinovi parametri nenegativni, dobimo od tod nov potrebni pogoj, ki ga morajo izpolnjevati presečna števila razdaljno-regularnega grafa.

Naj bo G razdaljno-regularen graf premera d in naj bo A njegova matrika sosednosti. Lastne vrednosti matrike A označimo z $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_d$. Matrike $A_0, A_1, \ldots, A_{d+1}$ naj bodo razdaljne matrike grafa G. Pri tem naj bo $A_0 = I$. V poglavju o asociativnih shemah smo dokazali (enačba 5.6), da je

$$q_{ij}^k = nm_i m_j \sum_{\ell=1}^{n} p_\ell(i)\, p_\ell(j)\, p_\ell(k) \,/\, \Big(\sum A_\ell\Big)^2.$$

(Spomnimo se, da oznaka $\sum A$ pomeni vsoto vseh elementov matrike A.)

Pri asociativnih shemah, ki so porojene iz razdaljno-regularnih grafov, je primitivni idempotent E_i ravno ortogonalni projektor na lastni podprostore matrike sosednosti A, ki pripada lastni vrednosti θ_i. Lastna vrednost asociativne sheme $p_i(j)$ je torej ravno lastna vrednost razdaljne matrike A_i za lastni podprostor, ki ga določa idempotent E_j. Zato je $p_1(j) = \theta_j$ za $0 \leq j \leq d$. Večkratnost asociativne sheme m_i pa je enaka rangu idempotenta E_i, torej je enaka ravno večkratnosti lastne vrednosti θ_i.

Zaradi enačbe (v) iz leme 2.4.1 je smiselno definirati naslednje polinome: $v_{-1}(x) = 0, v_0(x) = 1$ in

$$c_{i+1} v_{i+1}(x) = (x - a_i) v_i(x) - b_{i-1} v_{i-1}(x)\,, \quad i = 0, 1, \ldots, d,$$

kjer je vrednost za c_{d+1} nedefinirana. Pokažimo sedaj naslednjo lemo:

Izrek 6.1.1 *Naj bo G razdaljno-regularen graf, $A_0, A_1, \ldots, A_{d+1}$ njegove razdaljne matrike, $v_i(x)$ pa zgoraj definirani polinomi. Potem je*

$$v_i(A) = A_i$$

za $i = 0, 1, 2, \ldots, d+1$

DOKAZ. Lemo bomo dokazali z indukcijo. Lema očitno drži za $i = 0$. Ker je $v_1(x) = x$, lema drži tudi za $i = 1$. Privzemimo, da lema drži za vse indekse manjše ali enake i. Potem je

$$c_{i+1} v_{i+1}(A) = (A - a_i I) A_i - b_{i-1} A_{i-1},$$

torej

$$v_{i+1}(A) = \frac{1}{c_{i+1}} ((A - a_i I) A_i - b_{i-1} A_{i-1}).$$

To pa je po lemi 2.4.1 (v) enako ravno A_{i+1}. □

Posledica 6.1.2 *Naj bo $\boldsymbol{x}$ lastni vektor matrike sosednosti A razdaljno-regularnega grafa G in naj bo θ pripadajoča lastna vrednost. Potem je $\boldsymbol{x}$ tudi lastni vektor razdaljne matrike A_i $(1 \leq i \leq d+1)$ grafa G, pripadajoča lastna vrednost pa je $v_i(\theta)$.*

Dokaz. Ker je $A\boldsymbol{x} = \theta\boldsymbol{x}$ in $A_i = v_i(A)$, je

$$A_i\,\boldsymbol{x} = v_i(A)\boldsymbol{x} = v_i(\theta)\boldsymbol{x}.$$

Posledica je s tem dokazana. □

Posledica 6.1.3 *Naj bo G razdaljno-regularen graf premera d in $\theta_0, \ldots, \theta_d$ njegove lastne vrednosti. Potem za Kreinov parameter q_{ij}^k velja*

$$q_{ij}^k = \frac{m_i m_j}{n} \sum_{\ell=0}^{n} \frac{v_\ell(\theta_i) v_\ell(\theta_j) v_\ell(\theta_k)}{k_\ell^2}. \tag{6.1}$$

Dokaz. V poglavju o asociativnih shemah smo pokazali, da velja

$$q_{ij}^k = n m_i m_j \sum_{\ell=0}^{n} p_\ell(i)\, p_\ell(j)\, p_\ell(k) \,/\, \Big(\sum A_\ell\Big)^2.$$

Vemo že, da je $p_\ell(i)$ lastna vrednost matrike A_ℓ, ki pripada lastnemu podprostoru določenemu z E_i. Po posledici 6.1.2 je to ravno $v_\ell(\theta_i)$. Matrika A_ℓ pa je matrika sosednosti grafa G_ℓ. Vsako vozlišče grafa G ima k_ℓ vozlišč, ki so od njega oddaljene za ℓ, torej je G_ℓ regularen graf stopnje k_ℓ. Torej je $\sum A_\ell = nk_\ell$. Če to vstavimo v zgornjo enačbo za q_{ij}^k, dobimo ravno enakost iz posledice. □

6.2 Lastne vrednosti razdaljno-regularnega grafa

V tem razdelku bomo dokazali, da ima vsak povezan razdaljno-regularen graf premera d natanko $d+1$ lastnih vrednosti.

Izrek 6.2.1 *Naj bo G razdaljno-regularen graf premera d in A njegova matrika sosednosti. Potem je Bose-Mesnerjeva algebra grafa G podalgebra v algebri matrik velikosti $n \times n$ nad kompleksnimi števili, ki je generirana z matriko A, t.j., elementi Bose-Mesnerjeve algebre grafa G so vse matrike oblike*

$$z_n A^n + z_{n-1} A^{n-1} + \cdots + z_1 A + z_0,$$

kjer so $z_n, \ldots, z_0$ kompleksna števila.

DOKAZ. Vemo, da so razdaljne matrike $A_0, \ldots, A_d$ grafa G baza Bose-Mesnerjeve algebre grafa G. Ker pa po lemi 6.1.1 za razdaljno matriko A_i velja $A_i = v_i(A)$, je Bose-Mesnerjeva algebra vsebovana v podalgebri generirani z matriko A. Obratno pa iz točke (v) leme 2.4.1 sledi, da se vsaka potenca matrike A da izraziti kot linearna kombinacija razdaljnih matrik. Zato je podalgebra, ki je generirana z matriko A, vsebovana v Bose-Mesnerjevi algebri razdaljno-regularnega grafa G. S tem je lema dokazana. □

Posledica 6.2.2 *Naj bo G razdaljno-regularen graf premera d. Potem ima G natanko $d+1$ različnih lastnih vrednosti.*

DOKAZ. Naj ima matrika sosednosti A grafa G s različnih lastnih vrednosti. Ker je A realna in simetrična matrika, ima njen minimalni polinom stopnjo s. Torej je zaradi izreka 6.2.1 dimenzija Bose-Mesnerjeve algebre grafa G enaka s. Ker pa so razdaljne matrike grafa G baza Bose-Mesnerjeve algebre, ima ta dimenzijo $d+1$. Zato je $s = d+1$. □

Lema 6.2.3 *Naj bo G razdaljno-regularen graf premera d in θ njegova lastna vrednost. Potem je $v_{d+1}(\theta) = 0$.*

DOKAZ. Naj bo $A\boldsymbol{x} = \theta\boldsymbol{x}$. Potem imamo po lemi 6.1.1

$$v_{d+1}(\theta)\boldsymbol{x} = v_{d+1}(A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}.$$

Ker pa je $\boldsymbol{x}$ neničeln vektor, je $v_{d+1}(\theta) = 0$. □

Ker ima po posledici 6.2.2 razdaljno-regularen graf premera d natanko $d+1$ lastnih vrednosti, in ker je vsaka lastna vrednost ničla polinoma v_{d+1} (ki ima stopnjo $d+1$), so lastne vrednosti razdaljno-regularnega grafa natanko ničle polinoma v_{d+1}. Pokažimo sedaj naslednjo lemo.

Lema 6.2.4 *Naj bo G razdaljno-regularen graf premera d in a_i, b_i, c_i njegova presečna števila, $0 \le i \le d$. Za vsak i, $1 \le i \le d$, je polinom $c_{i+1} \cdot c_i \cdots c_1 v_{i+1}(x)$ karakteristični polinom matrike*

$$M_i = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & & & & \\ c_1 & a_1 & b_1 & & 0 & \\ 0 & c_2 & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & 0 & & \cdot & \cdot & b_{i-1} \\ & & & & c_i & a_i \end{pmatrix}.$$

DOKAZ. Lemo bomo dokazali z indukcijo po i. S $\Phi_i(x)$ označimo karakteristični polinom matrike M_i. Za $i = 0$ in $i = 1$ lema očitno drži, saj je polinom $c_1 v_1(x) = x$ karakteristični polinom matrike $M_0 = (a_0) = (0)$, polinom $c_2 c_1 v_2(x) = (x - a_1)x - b_0 = x^2 - a_1 x - b_1$ pa karakteristični polinom matrike

$$M_1 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_1 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b_0 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix}.$$

Naj torej trditev drži za $0, 1, \ldots, i-1$. Z razvojem determinante $\det(xI - M_i)$ po zadnji vrstici dobimo, da je

$$\Phi_i(x) = (x - a_i)\Phi_{i-1}(x) - c_i b_{i-1} \Phi_{i-2}(x).$$

Toda po indukcijski predpostavki je

$$\Phi_{i-1}(x) = c_i \cdots c_1 v_i(x) \text{ in } \Phi_{i-2}(x) = c_{i-1} \cdots c_1 v_{i-1}(x).$$

Torej z upoštevanjem definicije polinomov v_i dobimo

$$\Phi_i(x) = (x - a_i) c_i \cdots c_1 v_i(x) - c_i b_{i-1} c_{i-1} \cdots c_1 v_{i-1}(x) =$$

$$= c_i \cdots c_1((x - a_i) v_i(x) - b_{i-1} v_{i-1}(x)) = c_{i+1} \cdots c_1 v_{i+1}(x).$$

□

Ker so lastne vrednosti razdaljno-regularnega grafa G natanko ničle polinoma $v_{d+1}(x)$, in ker je polinom v_{d+1} karakteristični polinom matrike M_d, so lastne vrednosti razdaljno-regularnega grafa ravno lastne vrednosti matrike M_d. Matrika M_d pa je ravno matrika sosednosti grafa G/π, kjer je π ekvitabilna razdaljna particija vozlišč grafa G glede na poljubno vozlišče u. Grafa G in G/π imata torej iste lastne vrednosti.

6.3 Lastne vrednosti antipodnega kvocienta

V tem razdelku si bomo pogledali, v kakšnem odnosu so lastne vrednosti antipodnega kvocienta z lastnimi vrednostmi krova. To nam pove naslednji izrek, ki sta ga prva dokazala Biggs in Gardiner v [4].

Lema 6.3.1 *Naj bo H antipoden razdaljno-regularen graf premera d in G njegov antipodni kvocient. Potem so vse lastne vrednosti grafa G tudi lastne vrednosti grafa H z isto večkratnostjo.*

DOKAZ. Da so lastne vrednosti grafa G tudi lastne vrednosti grafa H je posledica leme 4.2.3, saj je particija vozlišč grafa H na antipodne razrede ekvitabilna.

Pokažimo še, da se večkratnost ohranja. Že v komentarju po dokazu leme 4.2.3 smo omenili, da večkratnost lastne vrednosti grafa G ne more biti večja od večkratnosti te iste lastne vrednosti v grafu H. Pokažimo sedaj še obratno.

Število vozlišč grafa G označimo z n. Graf H_d je sestavljen iz n kopij grafa K_r - za vsako od n vlaken (antipodnih razredov) eno. Lastne vrednosti nepovezanega grafa so kar lastne vrednosti njegovih povezanih komponent, večkratnost lastne vrednosti pa je seštevek večkratnosti te lastne vrednosti po vseh komponentah. Vemo, da ima graf K_r lastno vrednost -1 z večkratnostjo $r-1$ in lastno vrednost $r-1$ z večkratnostjo 1. Lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti $r-1$, ima vse komponente enake, komponente lastnega vektorja z lastno vrednostjo -1 pa se seštejejo v 0. Torej ima graf H_d lastno vrednost -1 z večkratnostjo $n(r-1)$, in lastno vrednost $r-1$ z večkratnostjo n. Lastni vektor grafa H_d, ki pripada lastni vrednosti $r-1$, ima konstantne vrednosti na vsakem vlaknu, lastnemu vektorju, ki pripada lastni vrednosti -1, pa se komponente na vsakem vlaknu seštejejo v 0.

Naj bo sedaj θ lastna vrednost grafa H, ki je tudi lastna vrednost grafa G, in naj bo $\boldsymbol{x}$ lastni vektor grafa H za to lastno vrednost. Torej je vsota njegovih komponent na vsaj enem vlaknu različna od 0 (glej komentar k lemi 4.2.3). Ker pa je po lemi 6.1.2 vektor $\boldsymbol{x}$ tudi lastni vektor grafa H_d za lastno vrednost $v_d(\theta)$, je $v_d(\theta) = r-1$ (sicer bi bila vsota komponent vektorja $\boldsymbol{x}$ na vsakem vlaknu enaka 0). Zato so komponente vektorja $\boldsymbol{x}$ na vsakem vlaknu konstantne, torej je vektor $\boldsymbol{x}$ dobljen iz lastnega vektorja grafa G. Pokazali smo, da je vsak lastni vektor grafa H, ki pripada lastni vrednosti θ, dobljen iz lastnega vektorja grafa G tako, da je konstanten na vsakem vlaknu. Torej je večkratnost lastne vrednosti θ v grafu H kvečjemu toliko, kot v grafu G. □

V naslednjem izreku bomo pokazali, kako iz presečnih števil antipodnega kvocienta G antipodnega razdaljno-regularnega grafa H izračunamo tiste lastne vrednosti grafa H, ki niso lastne vrednosti kvocienta G.

Izrek 6.3.2 *Naj bo H antipoden razdaljno-regularen graf premera d in G njegov antipodni kvocient premera m. Krovni indeks naj bo r in naj bodo $\{b_0, \ldots, b_{m-1}; c_1, \ldots, c_m\}$ presečna števila grafa G. Potem velja naslednje.*

(i) Če je $d = 2m$, potem so lastne vrednosti grafa H, ki niso lastne vrednosti

grafa G, lastne vrednosti matrike

$$\begin{pmatrix} 0 & b_0 & & & & \\ c_1 & a_1 & b_1 & & 0 & \\ & c_2 & a_2 & b_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & c_{m-2} & a_{m-2} & b_{m-2} \\ & & & & c_{m-1} & a_{m-1} \end{pmatrix}.$$

(ii) Če je $d = 2m+1$, potem so lastne vrednosti grafa H, ki niso lastne vrednosti grafa G, lastne vrednosti matrike

$$\begin{pmatrix} 0 & b_0 & & & & \\ c_1 & a_1 & b_1 & & 0 & \\ & c_2 & a_2 & b_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & c_{m-1} & a_{m-1} & b_{m-1} \\ & & & & c_m & a_m - rt \end{pmatrix},$$

kjer je t iz izreka 4.4.2 (iv).

Opomba: Izrek sta prva dokazala Biggs in Gardiner v [4]. Izrek (s sicer bolj skopim dokazom) je naveden tudi v Brouwer et al. [7, Prop. 4.2.4.]. Vendar je dokaz, ki ga podajamo tukaj, različen od dokazov tega izreka v zgoraj omenjenih referencah. V dokazu bomo uporabili Godsilov pristop z bločnimi matrikami.

DOKAZ. Dokažimo najprej točko (i). Lastne vrednosti grafa H so enake lastnim vrednostim matrike, ki je podana z lemo 6.2.4. Če pa presečna števila grafa H izračunamo iz presečnih števil grafa G po izreku 4.4.2, potem vidimo, da so lastne vrednosti grafa H enake lastnim vrednostim matrike

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \boldsymbol{x}_1 & 0 \\ \boldsymbol{y}_1^T & a_m & \boldsymbol{y}_2^T \\ 0 & \boldsymbol{x}_2 & A_2 \end{pmatrix}.$$

Pri tem je A_1 matrika velikosti $m \times m$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & b_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & a_2 & b_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_{m-2} & a_{m-2} & b_{m-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_{m-1} & a_{m-1} \end{pmatrix},$$

matrika A_2 je preko svoje vodoravne in navpične osi prezrcaljena matrika A_1, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_1$ in $\boldsymbol{y}_2$ pa so $m \times 1$ vektorji:

$$\boldsymbol{x}_1^T = (0, \ldots, 0, b_{m-1}) \ , \ \boldsymbol{x}_2^T = (b_{m-1}, 0, \ldots, 0),$$

$$\boldsymbol{y}_1^T = (0, \ldots, 0, \frac{c_m}{r}) \ , \ \boldsymbol{y}_2^T = (\frac{(r-1)c_m}{r}, 0, \ldots, 0).$$

Z I_j označimo identično matriko velikosti $j \times j$, z K_j pa matriko, ki jo dobimo, če matriko I_j prezrcalimo preko njene navpične osi. Definirajmo naslednjo matriko:

$$R_1 := \begin{pmatrix} I_{m+1} & 0 \\ 0 & K_m \end{pmatrix}.$$

Matrika R_1 je inverzna, saj je sama sebi inverz. Poglejmo si produkt $R_1^{-1} A R_1 = R_1 A R_1$. Z nekoliko računanja pridemo do rezultata

$$R_1^{-1} A R_1 = \begin{pmatrix} A_1 & \boldsymbol{x}_1 & 0 \\ \boldsymbol{y}_1^T & a_d & \boldsymbol{y}_3^T \\ 0 & \boldsymbol{x}_1 & A_1 \end{pmatrix},$$

kjer je $y_3^T = (0, \ldots, 0, \frac{(r-1)c_m}{r})$. Z drugimi besedami: množenje z leve in desne z matriko R_1 zamenja vrstni red zadnjih m stolpcev in vrstic matrike A. Sedaj pa definirajmo še matriko R_2:

$$R_2 := \begin{pmatrix} I_m & 0 & (1-r)I_m \\ 0 & 1 & 0 \\ I_m & 0 & I_m \end{pmatrix}.$$

Hitro se lahko prepričamo, da je njena inverzna matrika enaka

$$R_2^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} I_m & 0 & \frac{r-1}{r} I_m \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{r} I_m & 0 & \frac{1}{r} I_m \end{pmatrix}.$$

Z nekaj sicer zamudnega računanja ugotovimo naslednje:

$$B := R_2^{-1} R_1 A R_1 R_2 = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix},$$

kjer je B_1 $(m+1) \times (m+1)$ matrika

$$\begin{pmatrix} 0 & b_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ c_1 & a_1 & b_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & c_2 & a_2 & b_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & c_{m-1} & a_{m-1} & b_{m-1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & c_m & a_m \end{pmatrix}.$$

Matriki A in B sta torej podobni in imata zato iste lastne vrednosti. Matrika B je bločnodiagonalna, zato so njene lastne vrednosti kar lastne vrednosti matrike B_1 in matrike A_1. Lastne vrednosti matrike B_1 so natanko lastne vrednosti grafa G. Torej so lastne vrednosti grafa H, ki niso lastne vrednosti grafa G, ravno lastne vrednosti matrike A_1. S tem je točka (i) dokazana.

Točko (ii) dokažemo na podoben način kot točko (ii). Matrika A velikosti $(d+1)\times(d+1) = 2(m+1)\times 2(m+1)$, ki ima iste lastne vrednosti kot graf H in ki jo dobimo s pomočjo izreka 4.4.2 in leme 6.2.4, je takšne oblike:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}.$$

Pri tem so A_1, A_2, A_3 in A_4 matrike velikosti $(m+1)\times(m+1)$. Matrika A_1 je enaka

$$\begin{pmatrix} 0 & b_0 & & & & \\ c_1 & a_1 & b_1 & & 0 & \\ & c_2 & a_2 & b_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & c_{m-1} & a_{m-1} & b_{m-1} \\ & & & & c_m & a_m-(r-1)t \end{pmatrix}.$$

Matriko A_4 dobimo tako, da matriko A_1 najprej prezrcalimo preko njene vodoravne in navpične osi, potem pa levi zgornji element $(a_m-(r-1)t)$ zamenjamo z $a_m - t$. Za matriki A_2 in A_3 pa velja

$$(A_2)_{i,j} = \begin{cases} (r-1)t, & (i,j) = (m+1,1) \\ 0, & \text{sicer} \end{cases},$$

$$(A_3)_{i,j} = \begin{cases} t, & (i,j) = (1,m+1) \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}.$$

Sedaj matriko A pomnožimo na desni z R in na levi z R^{-1}, kjer je

$$R = \begin{pmatrix} I_{m+1} & I_{m+1} \\ \frac{1}{1-r}K_{m+1} & K_{m+1} \end{pmatrix}, \qquad R^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{r-1}{r}I_{m+1} & \frac{1-r}{r}K_{m+1} \\ \frac{1}{r}I_{m+1} & \frac{r-1}{r}K_{m+1} \end{pmatrix}.$$

Dobimo matriko

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix},$$

kjer je B_1 matrika iz izreka 6.3.2 (ii), matrika B_2 pa matrika M_m iz leme 6.2.4. Ker je matrika B bločnodiagonalna, in ker so lastne vrednosti matrike B_2 natanko lastne vrednosti grafa G, so lastne vrednosti grafa H, ki niso lastne vrednosti grafa G, natanko lastne vrednosti matrike B_1. $\square$

Opomba: Lastne vrednosti antipodnega razdaljno-regularnega grafa H premera d in njegovega antipodnega kvocienta G premera m so povezane tudi na naslednji način (glej Brouwer et al.[7, str. 142]). Če so $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_d$ lastne vrednosti grafa H in $\overline{\theta_0}, \overline{\theta_1}, \dots, \overline{\theta_m}$ lastne vrednosti grafa G, potem je

$$\overline{\theta_0} = \theta_0,\ \overline{\theta_1} = \theta_2,\ \dots \overline{\theta_m} = \theta_{2m}.$$

Samo od sebe se seveda ponuja tudi naslednje vprašanje: kako so povezani Kreinovi parametri antipodnega razdaljno-regularnega grafa in Kreinovi parametri njegovega antipodnega kvocienta? Odgovor bomo podali v naslednjem izreku. Najprej pa rabimo definicijo tenzorskega produkta matrik.

Naj bosta $A = (a_{ij})$ in $B = (b_{ij})$ matriki poljubnih dimenzij. *Tenzorski* oz. *Kronekerjev produkt* $A \otimes B$ matrik A in B dobimo tako, da vsak element a_{ij} matrike A nadomestimo z $a_{ij}B$.

Izrek 6.3.3 *Naj bo H antipoden razdaljno-regularen graf premera d, r njegov krovni indeks in $0 \leq i, j, k \leq d$ cela števila. Če sta natanko dve izmed števil i, j in k sodi, potem je Kreinov parameter q_{ij}^k enak* 0.

Dokaz: Ker velja $q_{ij}^k = q_{ji}^k$ in $q_{ij}^k = 0 \iff q_{ik}^j = 0$ (glej naprimer Brouwer et al. [7, Lemma 2.3.1]), lahko privzamemo, da sta števili i in j sodi, število k pa liho. Naj bo G antipodni kvocient grafa H premera m. Naj bodo $\overline{E_0}$, $\overline{E_1}$, $\dots \overline{E_m}$ glavni idempotenti grafa G in E_0, E_1, $\dots E_d$ glavni idempotenti grafa H. Potem velja

$$E_{2h} = \frac{1}{r}\overline{E_h} \otimes J_r, \quad (0 \leq h \leq m),$$

kjer je J_r matrika dimenzije $r \times r$, sestavljena iz samih enic (glej Brouwer et al. [7, str. 53]. Ker je graf G razdaljno-regularen, velja po enačbi (5.5)

$$\overline{E_i} \circ \overline{E_j} = \frac{1}{n} \sum_{\ell=0}^{m} \overline{q_{ij}^{\ell}}\, \overline{E_\ell},$$

kjer so $\overline{q_{ij}^{\ell}}$ Kreinovi parametri grafa G. Od tod pa dobimo

$$\frac{1}{r^2}(\overline{E_i} \otimes J_r) \circ (\overline{E_j} \otimes J_r) = \frac{1}{nr} \sum_{\ell=0}^{m} \frac{1}{r}\overline{q_{ij}^{\ell}}(\overline{E_\ell} \circ J_r),$$

oziroma

$$E_{2i} \circ E_{2j} = \frac{1}{nr} \sum_{\ell=0}^{m} \frac{1}{r}\overline{q_{ij}^{\ell}} E_{2\ell}.$$

Po drugi strani pa spet po enačbi (5.5) dobimo tudi

$$E_{2i} \circ E_{2j} = \frac{1}{nr} \sum_{\ell=0}^{d} q_{ij}^{\ell} E_{\ell}.$$

Matriko $E_{2i} \circ E_{2j}$ Bose-Mesnerjeve algebre grafa H smo izrazili na dva načina. Ker pa so glavni idempotenti grafa H baza Bose-Mesnerjeve algebre grafa H, se morata ti dve izrazitvi ujemati. Torej je $q_{ij}^{k} = 0$, če je k liho število, in $q_{ij}^{k} = (1/r)\overline{q_{ij}^{k}}$, ko je k sodo število. □

6.4 Kreinovi parametri antipodnega razdaljno-regularnega grafa premera 4

V tem poglavju si bomo bolj natančno pogledali lastne vrednosti in Kreinove parametre razdaljno-regularnega antipodnega grafa premera 4. Naj bo H tak graf. Potem je njegov antipodni kvocient G razdaljno-regularen graf premera 2, torej krepko regularen graf. Naj bodo (n, k, λ, μ) njegovi parametri. Če je $k = \mu$, je G poln večdelni graf. Antipodni razdaljno-regularni krovi takih grafov so bili deležni precejšnje pozornosti raziskovalcev, glej na primer Drake [11] ali Gardiner [13]. Zato bomo v nadaljevanju tega poglavja in v naslednjem poglavju privzeli, da je $\mu < k$.

Po izreku 6.3.2 so lastne vrednosti grafa G (to so k, r in s, glej enačbo (1.4)) tudi lastne vrednosti krova H. Označili jih bomo s $k = \theta_0, r = \theta_2$ in $s = \theta_4$, njihove večkratnosti pa $1 = m_0, f = m_2$ in $g = m_4$. Po izreku 6.3.2 sta preostali dve lastni vrednosti, ki jih bomo označili s θ_1 in θ_3, lastni vrednosti matrike

$$\begin{pmatrix} 0 & k \\ 1 & \lambda - x \end{pmatrix},$$

torej ničli polinoma $x^2 - \lambda x - k$. Zato je

$$\theta_1, \theta_3 = \frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + 4k}}{2}$$

in

$$\theta_1 + \theta_3 = \lambda \qquad \theta_1 \theta_3 = -k. \tag{6.2}$$

Večkratnosti lastnih vrednosti θ_1 in θ_3 označimo z m_1 in m_3. Za lastne vrednosti grafa H in njihove večkratnosti mora veljati

$$1 + m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = n \cdot r \quad k + m_1\theta_1 + m_2\theta_2 + m_3\theta_3 + m_4\theta_4 = 0.$$

Ker je $1 + m_2 + m_4 = n$ in $k + m_2\theta_2 + m_4\theta_4 = 0$, dobimo dve enačbi za m_1 in m_3:

$$m_1 + m_3 = n(r-1) \quad , \quad m_1\theta_1 + m_3\theta_3 = 0.$$

Če iz teh dveh enačb izrazimo m_1 in m_3, dobimo

$$m_1 = \frac{n(r-1)\theta_3}{\theta_3 - \theta_1} \quad , \quad m_3 = n(r-1) - m_1. \tag{6.3}$$

Ker pa je

$$m_1 = \frac{n(r-1)\theta_3}{\theta_3 - \theta_1} = \frac{n(r-1)}{2}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + 4k}} + 1\right),$$

in je m_1 celo število, mora biti vrednost izraza $\sqrt{\lambda^2 + 4k}$, v primeru ko je $\lambda \neq 0$, celo število. Dokazali smo torej naslednjo lemo:

Lema 6.4.1 *Naj bo G krepko regularen graf s parametri (n, k, λ, μ) in H njegov antipoden razdaljno-regularen krov premera 4. Če je $\lambda \neq 0$, potem sta lastni vrednosti θ_1 in θ_3 celoštevilski.* □

Hitro lahko dokažemo tudi naslednjo lemo.

Lema 6.4.2 (Lemma 4.1 , [22]) *Naj bo H antipoden razdaljno-regularen graf premera 4 in*
$\theta_0, \ldots, \theta_4$ njegove lastne vrednosti. Potem je

$$(\theta_1 + 1)(\theta_3 + 1) = (\theta_2 + 1)(\theta_4 + 1).$$

Dokaz. Iz enačb (1.5) in (6.2) hitro dobimo, da je

$$\theta_1\theta_3 + \theta_1 + \theta_3 = \theta_2\theta_4 + \theta_2 + \theta_4.$$

□

Oglejmo si sedaj še Kreinove parametre antipodnega razdaljno-regularnega grafa premera 4. Presečna števila njegovega kvocienta G so $\{k, k-\lambda-1; 1, \mu\}$. Po izreku 4.4.2 (iv) so presečna števila njegovega krova H enaka $\{k, k-\lambda-1, (r-1)\mu/r, 1; 1, \mu/r, k-\lambda-1, k\}$, kjer je r krovni indeks. Od tod lahko hitro izračunamo polinome $v_{-1}(x), v_0(x), \ldots, v_4(x)$:

$$\begin{aligned}
v_{-1}(x) &= 0, \\
v_0(x) &= 1, \\
v_1(x) &= x, \\
v_2(x) &= \frac{r}{\mu}(x^2 - \lambda x - k), \\
v_3(x) &= \frac{1}{k-\lambda-1}\left((x-k+\mu)\frac{r}{\mu}(x^2-\lambda x-k) - (k-\lambda-1)x\right), \\
v_4(x) &= \frac{1}{k}\Big((x-\lambda)v_3(x) - \frac{(r-1)\mu}{r}v_2(x)\Big).
\end{aligned} \tag{6.4}$$

Sedaj pa sestavimo matriko P, ki je definirana tako: $(P)_{ij} = v_j(\theta_i)$. Matrika P ima takšno obliko:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \theta_0 & r\theta_0 b_1/\mu & \theta_0(r-1) & r-1 \\ 1 & \theta_1 & 0 & -\theta_1 & -1 \\ 1 & \theta_2 & -r(\theta_2+1) & \theta_2(r-1) & r-1 \\ 1 & \theta_3 & 0 & -\theta_3 & -1 \\ 1 & \theta_4 & -r(\theta_4+1) & \theta_4(r-1) & r-1 \end{pmatrix}.$$

Pozitivnost oziroma negativnost kreinovega parametra se ohranja, če permutiramo indekse i, j in k. Zato moramo po lemi 5.3.5 preveriti še 20 Kreinovih parametrov: $q_{11}^1, q_{11}^2, \ldots, q_{44}^4$. Izkaže se - glej Jurišić in Koolen [22] - da sta samo Kreinova parametra q_{11}^4 in q_{44}^4 netrivialno nenegativna. Neenakosti $q_{11}^4 \geq 0$ in $q_{44}^4 \geq 0$ se prevedeta v

$$\theta_3^2 \geq -\theta_4, \tag{6.5}$$

$$(\theta_2+1)^2(k^2+\theta_4^3) \geq (\theta_4+1)\mu^2. \tag{6.6}$$

V naslednjem poglavju bomo študirali antipodne razdaljno-regularne krove krepko regularnih grafov, t.j. antipodne razdaljno-regularne grafe premera 4 ali 5. Krepko regularne grafe pa ponavadi razdelimo na dve skupini: na konferenčne grafe in na ostale krepko regularne grafe. Če krepko regularen graf ni konferenčni graf, potem so njegove lastne vrednosti celoštevilske. Zato bo naslednji izrek, ki ga je prvi dokazal van Bon, zelo uporaben. Dokaz je povzet po [21, Cor. 4.15].

Izrek 6.4.3 *Edini konferenčni graf, ki ima antipoden razdaljno-regularen krov, je petcikel (pentagon). Njegov krov je dekagon, ki je antipoden razdaljno-regularen graf premera* 5.

Dokaz. Naj bo G konferenčni graf. Kot vemo, je potem G krepko regularen graf s parametri $(4\mu+1, 2\mu, \mu-1, \mu)$. Če je $\mu = 1$ je G pentagon, njegov antipoden razdaljno-regularen krov pa je dekagon. Torej lahko privzamemo, da je $\mu > 1$.

Predpostavimo najprej, da ima G antipoden razdaljno-regularen krov H premera 4. Ker je $\lambda = \mu - 1 > 0$, sta lastni vrednosti θ_1 in θ_3 grafa H celoštevilski. Zato mora biti število $\lambda^2 + 4k = \mu^2 + 6\mu + 1$ popolen kvadrat. Torej

$$\mu^2 + 6\mu + 1 = (\mu+3)^2 - 8 = m^2$$

za neko naravno število m. Od tod pa dobimo

$$(\mu + 3 - m)(\mu + 3 + m) = 8.$$

Ker je $\mu > 1$, mora biti $\mu + 3 + m = 8$ in $\mu + 3 - m = 1$, kar pa pomeni $2\mu = 3$. To pa je v protislovju s tem, da mora biti μ celo število.
Predpostavimo sedaj, da ima G antipoden razdaljno-regularen krov H premera 5. Potem so presečna števila grafa H enaka

$$\{2\mu,\, \mu,\, t(r-1),\, \mu,\, 1\,;\, 1,\, \mu,\, t,\, \mu,\, 2\mu\}.$$

Ker mora biti po lemi 2.3.1 zaporedje $b_0, \dots, b_4$ padajoče, zaporedje $c_1, \dots, c_5$ pa naraščajoče, mora biti $t = \mu$ in $r = 2$. Ker je $a_i + b_i + c_i = b_0 = 2\mu$ za $0 \le i \le 5$, je $a_2 = a_3 = 0$ in $a_1 = \mu - 1 \neq 0$. To pomeni, da je vsaka povezava vsebovana vsaj v enem trikotniku. Naj bo u neko vozlišče grafa H in $x \in S_2(u)$ ter $y \in S_3(u)$ povezani vozlišči. Ker povezava od x do y leži v vsaj enem trikotniku, mora ena stranica tega trikotnika povezovati dve vozlišči iz $S_2(u)$ ali pa $S_3(u)$. To pa je v protislovju s tem, da je $a_2 = a_3 = 0$. Izrek je s tem dokazan. □

6.5 Tesni antipodni razdaljno-regularni grafi premera 4

Videli smo, da sta pri antipodnih razdaljno-regularnih grafih samo dva Kreinova parametra netrivialno nenegativna in zato predstavljata nova potrebna pogoja za obstoj takih grafov. To sta Kreinova parametra q_{11}^4 in q_{44}^4. Naravno vprašanje, ki se pojavi, je naslednje: kakšni so antipodni razdaljno-regularni grafi premera 4, za katere je eden od teh dveh Kreinovih parametrov (ali oba) enak 0? Kakšne so njihove lastnosti? Ali lahko o njih povemo kaj več?

Definicija 6.5.1 *Antipoden razdaljno-regularen graf H premera 4 je tesen, če je Kreinov parameter q_{11}^4 enak 0. Družino vseh tesnih antipodnih razdaljno-regularnih grafov premera 4 bomo označevali z AT4.*

Opomba: Pojem tesnih razdaljno-regularnih grafov je dosti širši, vendar se njihova definicija v primeru, ko je H antipoden razdaljno-regularen graf premera 4, ujema z zgornjo. Splošno definicijo tesnih razdaljno-regularnih grafov in pregled nekaterih njihovih lastnosti naj bralec poišče v Jurišić, Koolen in Terwilliger [23]. Za obširnejši pregled družine AT4 pa bralcu priporočam članka Jurišić in Koolen [22] in Jurišić [20]. Članku [22] bomo tudi v tem razdelku v grobem sledili.

Videli smo, da se pogoj $q_{11}^4 \ge 0$ pri antipodnih razdaljno-regularnih grafih premera 4 prevede na

$$\theta_3^2 \ge -\theta_4,$$

kjer sta θ_3 in θ_4 lastni vrednosti grafa H. Torej je antipoden razdaljno-regularen graf H premera 4 član družine $AT4$, če velja $\theta_3^2 = -\theta_4$.

Naj bo H tesen antipoden razdaljno-regularen graf premera 4, G njegov antipodni kvocient in (n, k, λ, μ) parametri grafa G (graf G je krepko regularen). Hitro lahko vidimo, da je v tem primeru $\lambda \neq 0$. Če bi namreč bil $\lambda = 0$, potem bi se enakost $\theta_3^2 = -\theta_4$ prevedla na enakost $(k-\mu)(k-1) = 0$, kar pa ne gre. Torej je vseh 5 lastnih vrednosti grafa H celoštevilskih. Sedaj pa pokažimo, da lahko vse parametre grafa G (in s tem tudi presečna števila grafa H) izrazimo s parametroma $p = \theta_2$ in $q = -\theta_3$.

Lema 6.5.1 *Naj bo graf H tesen antipoden razdaljno-regularen graf premera 4, graf G njegov antipodni kvocient s parametri (n, k, λ, μ) in $\theta_0, \ldots, \theta_4$ lastne vrednosti grafa H. Naj bo $p = \theta_2$ in $q = -\theta_3$. Potem je $k = \theta_0 = q(pq + p + q)$, $\lambda = p(q + 1)$, $\mu = q(p + q)$, $\theta_1 = pq + p + q$ in $\theta_4 = -q^2$.*

Dokaz. Ker je H tesen antipoden razdaljno-regularen graf premera 4, je $\theta_4 = -\theta_3^2 = -q^2$. Po lemi 6.4.2 je

$$\theta_1 = \frac{(\theta_2 + 1)(\theta_4 + 1)}{\theta_3 + 1} - 1 = pq + p + q.$$

Dalje imamo $k = \theta_0 = -\theta_1\theta_3 = q(pq+p+q)$ in $\lambda = \theta_1 + \theta_3 = pq + p = p(q+1)$, ter $\mu = \lambda - \theta_2 - \theta_4 = q(p + q)$. □

Parametra p in q ne moreta biti čisto poljubna. Zadoščati morata nekaterim pogojem, ki pa niso zadostni. Naštejmo jih v naslednjem izreku, katerega dokaz lahko bralec najde v Jurišić in Koolen [22].

Izrek 6.5.2 *Naj bo H tesen antipoden razdaljno-regularen graf premera 4, $p = \theta_2$, $q = -\theta_3$ in r velikost njegovih antipodnih razredov. Potem so p, q in r naravna števila, za katera velja $p \geq 1$, $q \geq 2$, $r \geq 2$, ter*

(i) število $pq(p + q)/r$ je sodo,

(ii) $r(p + 1) \leq q(p + q)$,

(iii) število r deli število $p + q$,

(iv) $p \geq q - 2$,

(v) število $p + q$ deli število $q^2(q^2 - 1)$,

(vi) število $p + q^2$ deli število $q^2(q^2 - 1)(q^2 + q - 1)(q + 2)$. □

Privzemimo sedaj, da je za graf tesen antipoden razdaljno-regularen graf H premera 4 tudi Kreinov parameter q_{44}^4 enak 0. To pomeni, da je

$$(\theta_2+1)^2(k^2+\theta_4^3)=(\theta_4+1)\mu^2.$$

Z uporabo leme 6.5.1 se ta enakost prevede na

$$p\,(2+p-q)\,q^2\,(1+q)\,(p+q)\,(p+2q+pq)=0.$$

Ker sta p in q naravni števili, mora biti $q=2+p$. Parametrizacija takih grafov se tako še poenostavi.

Izrek 6.5.3 *Naj bo H tesen antipoden razdaljno-regularen graf premera 4 in $p=\theta_2$, $q=-\theta_3$. Potem je $q_{44}^4=0$ natanko tedaj, ko je $\theta_3=-p-2$. V tem primeru je $k=(p^2+4p+2)(p+2)$, $\lambda=p(p+3)$, $\mu=2(p+2)(p+1)$, $\theta_1=(p+2)^2-2$ in $\theta_4=-(p+2)^2$.*

DOKAZ. Če je $q_{44}^4=0$, potem je (kot smo videli zgoraj) $q=p+2$. Prav tako lahko hitro preverimo tudi obratno: če je $q=p+2$, potem je $q_{44}^4=0$. Drugi del izreka sledi iz leme 6.5.1. □

Mogoče so bo bralcu zdelo, da morajo biti grafi, ki imajo $q_{11}^4=0$ in $q_{44}^4=0$ zelo redki. Dejstvo pa je, da za vse do sedaj znane primere možnih naborov presečnih števil za antipodne razdaljno-regularne grafe premera 4 velja, da iz $q_{44}^4=0$ sledi $q_{11}^4=0$. Zato je primerno, da ta razdelek zaključimo z domnevo, ki jo je izpostavil že Jurišić v [20].

Domneva: Naj bo H antipoden razdaljno-regularen graf premera 4, za katerega je $q_{44}^4=0$. Potem je tudi $q_{11}^4=0$.

Poglavje 7

ANTIPODNI RAZDALJNO-REGULARNI GRAFI PREMERA 4 IN 5

Antipodni razdaljno-regularni grafi premera 4 in 5 so zanimivi zato, ker so njihovi antipodni kvocienti razdaljno-regularni grafi premera 2, torej krepko regularni grafi. Krepko regularni grafi so najenostavnejši netrivialni razdaljno-regularni grafi. Zato jih dosti lažje razumemo in si jih dosti lažje predstavljamo kot razdaljno-regularne grafe večjih premerov.

Krepko regularni grafi pa so zanimivi iz še enega razloga. Medtem ko so za velike premere izmed razdaljno-regularnih grafov več ali manj poznani samo Johnsonovi in Hammingovi grafi, so krepko regularni grafi mnogo bolj raznovrstni. Veliko krepko regularnih grafov namreč ne izhaja iz Johnsonovih in Hammingovih grafov, temveč iz drugih struktur, kot so naprimer Latinski kvadrati, končne geometrije, itd.

Naj bo H antipoden razdaljno-regularen graf premera 4 ali 5 na v vozliščih in G njegov antipodni kvocient na n vozliščih. Potem velja $v = n \cdot r$, kjer je r velikost antipodnih razredov grafa H. Že Van Bon in Brouwer sta v [5] dokazala, da za antipodne razdaljno-regularen grafe premera 5 velja

$$k \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor, \tag{7.1}$$

kjer je k stopnja grafa. Za antipodne razdaljno-regularne grafe premera 4 pa je bila neenakost šibkejša:

$$k \leq \left\lfloor \frac{r(n-1)}{2r-1} \right\rfloor.$$

Ker pa je za vse znane dopustne nabore presečnih števil antipodnih razdaljno-regularnih grafov premera 4 tudi veljala neenakost 7.1, je Jurišić v [18] in [22]

postavil domnevo, da neenakost 7.1 velja tudi v tem primeru.
V prvem razdelku tega poglavja bomo pokazali neenakost 7.1 v primeru antipodnih razdaljno-regularnih grafov premera 5. V drugem razdelku bomo dokazali glavni rezultat tega magistrskega dela, namreč da ta neenačba drži tudi v primeru, ko je premer 4. V tretjem razdelku pa bomo nakazali možnost za izboljšanje te neenakosti.

Ker konferenčni krepko regularni grafi (razen petcikla) nimajo antipodnih razdaljno-regularnih krovov (glej izrek 6.4.3), se bomo v tem poglavju omejili na nekonferenčne krepko regularne grafe. To so tisti krepko regularni grafi s parametri (n, k, λ, μ), za katere je $\sqrt{(\lambda-\mu)^2 + 4(k-\mu)}$ celo število.

7.1 Primer $d = 5$

Najprej si bomo ogledali antipodne razdaljno-regularne grafe premera 5. Naj bo G krepko regularen graf s parametri (n, k, λ, μ) in H njegov antipodni razdaljno-regularni r-krov premera 5. Presečna števila grafa G so $b_0 = k, b_1 = k - \lambda - 1, c_1 = 1$ in $c_2 = \mu$. Po izreku 4.4.2 so presečna števila grafa H enaka

$$\{k, k-\lambda-1, (r-1)t, \mu, 1; 1, \mu, t, k-\lambda-1, k\},$$

kjer je t neko naravno število. Ker je zaporedje b_i padajoče (oziroma zaporedje c_i naraščajoče), od tod takoj dobimo dva potrebna pogoja za obstoj krova:

- $1 \leq \mu \leq t$
- $(r-1)t \leq k - \lambda - 1$

Sedaj ni težko dokazati naslednjega izreka, ki sta ga prva dokazala van Bon in Brouwer v [5]:

Izrek 7.1.1 *Naj bo G krepko regularen graf s parametri (n, k, λ, μ), ki premore antipoden razdaljno-regularen krov premera 5. Potem je*

$$k \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor.$$

DOKAZ. Če G ima antipoden razdaljno-regularen krov H premera 5, potem zaradi neenakosti $b_1 \geq b_3$ presečnih števil b_i grafa H veljati

$$k - \lambda - 1 \geq \mu.$$

Sedaj pa iz enačbe (1.1) sledi:

$$n = 1 + k + \frac{k(k-\lambda-1)}{\mu} \geq 1 + k + \frac{k\mu}{\mu} = 1 + 2k,$$

oziroma $k \leq (n-1)/2$. Ker je k naravno število, je izrek dokazan. □

7.2 Primer $d = 4$

Nekoliko več dela bomo imeli v primeru, ko je premer antipodnega razdaljno-regularnega grafa enak 4. Jurišić je v [18] in v [22] (skupaj z J. Koolen) postavil domnevo, da neenakost iz izreka 7.1.1 drži tudi v tem primeru. Izkaže se, da je domneva pravilna. V tem razdelku bomo razen za nekaj izjem dokazali celo nekoliko ostrejšo neenakost, potrebovali pa bomo tudi malce več priprave.

Naj bo G krepko regularen graf s parametri (n, k, λ, μ) in presečnimi števili $\{k, k-\lambda-1; 1, \mu\}$. Po izreku 4.4.2 ima njegov antipoden razdaljno-regularen r-krov H premera 4 presečna števila $\{k, k-\lambda-1, (r-1)\mu/r, 1; 1, \mu/r, k-\lambda-1, k\}$. Tudi od tu dobimo nekaj potrebnih pogojev za obstoj r-krova H:

- $\mu/r \leq k - \lambda - 1$
- krovni indeks r mora deliti parameter μ

Če bi tudi v tem primeru hoteli poiskati zgornjo mejo za stopnjo k na enak način kot v izreku 7.1.1, bi dobili nekoliko šibkejšo oceno:

$$k \leq \left\lfloor \frac{r(n-1)}{2r-1} \right\rfloor.$$

Res je, da se za velika števila r vrednost $r(n-1)/(2r-1)$ približuje $(n-1)/2$. Vendar so krovni indeksi do sedaj znani primerov pokritij 2, 3 ali kvečjemu 4. V teh treh primerih pa razlika med $r(n-1)/(2r-1)$ in $(n-1)/2$ ni zanemarljiva, še posebej, če je število vozlišč n veliko.
Naslednja lema je "šibka verzija" izreka, ki sta ga dokazala Bose in Dowling [6].

Lema 7.2.1 *Naj bo G regularen graf stopnje k, za katerega velja, da imata vsaki dve sosednji vozlišči natanko λ skupnih sosedov, vsaki dve vozlišči na razdalji 2 pa natanko enega skupnega soseda. Potem število $\lambda + 1$ deli število k.*

DOKAZ. Naj bosta u in v dve sosednji vozlišči grafa G. Če je $\lambda \geq 2$, potem morata biti poljubna dva skupna soseda vozlišč u in v povezana (ker sta na razdalji 2 in imata vsaj dva skupna soseda). Torej je vsaka maksimalna klika v G velikosti $\lambda + 2$. Naj bosta K in L dve taki maksimalni kliki grafa G, ki vsebujeta vozlišče u. Naj bo poleg vozlišča u v preseku teh dveh klik še kakšno drugo vozlišče, recimo vozlišč x. Z $|K \cap L|$ označimo moč preseka $K \cap L$. Vozlišči u in x sta povezani in imata

$$2(\lambda + 2 - |K \cap L|) + |K \cap L| - 2 = 2\lambda + 2 - |K \cap L| > 2\lambda + 2 - \lambda - 2 = \lambda,$$

skupnih sosed, kar pa ni možno. Torej množice $K \setminus \{u\}$, kjer je K maksimalna klika grafa G, ki vsebuje vozlišče u, določajo particijo množice vseh sosed vozlišča u. Torej mora biti $k/(\lambda + 1)$ celo število. $\square$

Lema 7.2.2 *Naj bo H razdaljno-regularen graf premera 4 in G njegov antipodni kvocient s parametri (n,k,λ,μ). Potem je $\lambda < k/4$, razen če je G eden od naslednjih krepko-regularnih grafov:*

- *komplement trikotniškega grafa $T(7)$,*
- *antipodni kvocient Johnsonovega grafa $J(8,4)$,*
- *antipodni kvocient polovične kocke Q_8,*
- *srg$(126,45,12,18)$,*
- *srg$(378,117,36,36)$,*
- *srg$(250,81,24,27)$,*
- *srg$(638,189,60,54)$,*
- *srg$(900,261,84,72)$.*

Opomba: Za zadnje tri zgoraj naštete krepko regularne grafe ni še znano, ali sploh obstajajo.

DOKAZ. Dokaz bomo razdelili na dva dela. V prvem delu bomo privzeli, da je graf H tesen antipoden razdaljno-regularen graf in torej velja $\theta_3^2 = -\theta_4$. V drugem delu pa bomo privzeli, da graf H ni tesen, in zato velja $\theta_3^2 > -\theta_4$.

1. Predpostavimo, da je $\theta_3^2 = -\theta_4$ in da je $\lambda \geq k/4$. Če uporabimo parametrizacijo za tesne antipodne razdaljno-regularne grafe (lema 6.5.1), to pomeni, da je $4pq+4p \geq pq^2+pq+q^2-4$, torej $p(q-4)(q+1) \leq -q^2 < 0$. Zato je $q \in \{2,3\}$.

   Primer $q = 2$ Iz pogojev v izreku 6.5.2 dobimo $p \in \{1,2,4\}$. Za $p = 1$ dobimo komplement trikotniškega grafa $T(7)$, ki je antipodni kvocient Conway-Smithovega grafa. Za $p = 2$ dobimo antipodni kvocient Johnsonovega grafa $J(8,4)$, za $p = 4$ pa antipodni kvocient polovične kocke Q_8.

   Primer $q = 3$ Iz pogojev v izreku 6.5.2 dobimo $p \in \{1,3,6,9,15,21\}$. Primer $p = 1$ ni možen po Jurišić in Koolen [22, Thm. 6.4]. Za $p = 3,6,9,15,21$ pa dobimo ostale v lemi naštete krepko regularne grafe.

2. Predpostavimo, da je $\theta_3^2 > -\theta_4$ in $\lambda \geq k/4 > 0$. Lastni vrednost θ_1 in θ_3 sta zato celoštevilski, po enakosti (6.2) pa imamo $\theta_1 + \theta_3 = \lambda \geq k/4$, torej $\theta_1 \geq k/4 - \theta_3 > k/4$. Po drugi strani pa je $k = \theta_1(-\theta_3) > k/4(-\theta_3)$, torej $-\theta_3 < 4$. Ker mora biti po predpostavki $\theta_3^2 > -\theta_4$ (graf H ni tesen), in ker

sta θ_1 in θ_3 celoštevilski, imamo naslednje možnosti: $\theta_3 = -2$, $\theta_4 = -3$ in $\theta_3 = -3$, $\theta_4 \in \{-4, -5, -6, -7, -8\}$. Vsako izmed teh možnosti bomo obravnavali posebej.

Primer $\boldsymbol{\theta_3 = -2, \theta_4 = -3}$. Iz 6.2 in leme 6.4.2 dobimo $\theta_1 = \lambda + 2$ in $\theta_2 = (\lambda+3)/2 - 1$. Ker mora biti θ_2 celo število, je $\lambda = 2\ell - 1$ za neko naravno število ℓ. Dalje imamo $k = -\theta_1\theta_3 = 2(2\ell+1), \mu = k+\theta_2\theta_4 = \ell+2$ in $k(k-\lambda-1)/\mu = 4(2\ell+1)(\ell+1)/(\ell+2) = 8\ell - 4 + 12/(\ell+2)$. Ker je $k(k-\lambda-1)/\mu$ tudi celo število, je $\ell \in \{1, 2, 4, 10\}$. Če je $\ell = 1$, dobimo komplement trikotniškega grafa $T(6)$, ki ima $\lambda < k/4$. Primera $\ell = 2$ in $\ell = 4$ nista možna, ker večkratnosti m_1 v teh dveh primerih nista celoštevilski. Pri izberi $\ell = 10$ pa večkratnost m_2 ni celoštevilska.

Primer $\boldsymbol{\theta_3 = -3, \theta_4 = -4}$. Na isti način kot v prejšnjem primeru dobimo $\theta_1 = \lambda+3$ in $\theta_2 = 2(\lambda+4)/3 - 1$, torej je $\lambda = 3\ell - 1$ za neko naravno število ℓ. Dalje imamo $k = 9\ell+6, \mu = \ell+2$ in $k(k-\lambda-1)/\mu = 18(3\ell+2)(\ell+1)/(\ell+2) = 54\ell-18+72/(\ell+2)$. Zato je $\ell \in \{1, 2, 4, 6, 7, 10, 16, 22, 34, 70\}$. Večkratnost m_2 je celoštevilska samo za $\ell \in \{2, 10\}$. Toda v teh dveh primerih večkratnost m_1 ni celoštevilska.

Primer $\boldsymbol{\theta_3 = -3, \theta_4 = -5}$. V tem primeru dobimo $k = 6\ell + 9, \lambda = 2\ell, \mu = \ell+4$ in $k(k-\lambda-1)/\mu = 12(2\ell+3)(\ell+2)/(\ell+4) = 24\ell-12+120/(\ell+4)$ za neko nenegativno celo število ℓ. Torej je $\ell \in \{0, 1, 2, 4, 6, 8, 11, 16, 20, 26, 36, 56, 116\}$. Večkratnost m_2 je celoštevilska samo za $\ell \in \{0, 6, 16\}$. Primer $\ell = 0$ ne zadošča Kreinovemu pogoju $q^4_{44} \geq 0$. Za $\ell = 6$ večkratnost m_1 ni celoštevilska. Za $\ell = 16$ je večkratnost m_1 celoštevilska samo v primeru, ko je $r = \mu$, glej enačbo (6.3). Torej za graf H velja $c_2 = 1$. Poleg tega je $\lambda + 1 = 33$ in $k = 106$, zato graf H po lemi 7.2.1 ne more obstajati.

Primer $\boldsymbol{\theta_3 = -3, \theta_4 = -6}$. V tem primeru imamo $k = 15\ell - 3, \lambda = 5\ell-4, \mu = 3\ell+3$ in $k(k-\lambda-1)/\mu = 10(5\ell-1)\ell/(\ell+1) = 50\ell-60+60/(\ell+1)$ za neko naravno število ℓ. Torej je $\ell \in \{1, 2, 3, 4, 5, 9, 11, 14, 19, 29, 59\}$. Večkratnost m_2 je celoštevilska samo za $\ell \in \{2, 5, 9, 11\}$. Za $\ell = 2$ dobimo možen krepko regularen graf s parametri (88,27,6,9), za katere pa velja $\lambda < k/4$. Ostali trije primeri nimajo celoštevilske večkratnosti m_1.

Primer $\boldsymbol{\theta_3 = -3, \theta_4 = -7}$. Dobimo $k = 9\ell+6, \lambda = 3\ell-1, \mu = 2\ell+6$ in $k(k-\lambda-1)/\mu = 9(3\ell+2)(\ell+1)/(\ell+3) = 27\ell-36+126/(\ell+3)$. Zato je $\ell \in \{3, 4, 6, 11, 15, 18, 39, 60, 123\}$. Večkratnost m_2 je celoštevilska samo za $\ell \in \{3, 11, 18\}$. Ti trije primeri pa so izločeni zato, ker večkratnost m_1 ni celoštevilska ali pa s pomočjo Brouwer et al. [7, Prop. 1.2.1].

Primer $\boldsymbol{\theta_3 = -3, \theta_4 = -8}$. V tem primeru pa dobimo $k = 3(7\ell+6), \lambda = 7\ell + 3, \mu = 5(\ell+2)$ in $k(k-\lambda-1)/\mu = 42(7\ell+6)(\ell+1)/(5(\ell+2)) =$

$1/5(249\ell - 42 + 336/(\ell+2))$. Torej je $\ell \in \{2, 4, 12, 14, 19, 22, 54, 82, 334\}$. Samo za $\ell = 4$ je večkratnost m_2 celoštevilska. V primeru $\ell = 4$ pa večkratnost m_1 ni celoštevilska.
Lema je tako dokazana. □

V naslednji lemi bomo omejili še μ.

Lema 7.2.3 *Naj bo H antipoden razdaljno-regularen graf premera 4 in G njegov antipodni kvocient. Če so (n, k, λ, μ) parametri grafa G in če je $\mu < k$, potem je $\mu < k/2$, razen če je G komplement trikotniškega grafa $T(6)$, komplement trikotniškega grafa $T(7)$ ali antipodni kvocient Johnsonovega grafa $J(8, 4)$.*

Dokaz. Predpostavimo, da je $\mu \geq k/2$. Če je $\lambda \geq k/4$, potem po lemi 6.4.1 dobimo 8 možnosti, od katerih samo komplement trikotniškega graf $T(7)$ in antipodni kvocient Johnsonovega grafa $J(8, 4)$ zadoščata neenakosti $\mu \geq k/2$. Vzemimo sedaj, da je $\lambda < k/4$. Ker je $-\theta_2\theta_4 = k - \mu$, imamo $-\theta_2\theta_4 \leq k/2$. Iz $\theta_2 + \theta_4 = \lambda - \mu$ pa dobimo $2\theta_2 + 2\theta_4 < -k/2$. Če ti dve neenakosti seštejemo, dobimo

$$\theta_2 < \frac{-2\theta_4}{2 - \theta_4} = 2 - \frac{4}{2 - \theta_4}.$$

Desna stran te neenačbe je vedno manjša od 2, torej $\theta_2 < 2$. Ker pa je θ_2 tudi lastna vrednost kvocientnega grafa G in ker konferenčni grafi nimajo antipodnega razdaljno-regularnega krova premera 4 (izrek 6.4.3), je θ_2 nenegativno celo število. Če je $\theta_2 = 0$, je $k = \mu$. Torej mora biti $\theta_2 = 1$.

Komplement $\overline{G}$ grafa G je spet krepko regularen graf z lastnimi vrednostmi $n-k-1, -\theta_4 - 1$ in $-\theta_2 - 1 = -2$, glej Brouwer et al. [7, Thm. 1.3.1]. Seidel je v [28] (glej tudi Brouwer et al. [7, Thm. 3.12.4]) dokazal, da je v tem primeru graf $\overline{G}$ lahko samo eden od naslednjih grafov:

(i) trikotniški graf $T(n)$ za $n \geq 5$,

(ii) mrežni graf $L_2(n)$ za $n \geq 3$,

(iii) popolen večdelni graf $K_{n\times 2}$ za $n \geq 2$,

(iv) Petersenov graf,

(v) Clebschev graf (glej Brouwer et al. [7, str. 104]),

(vi) Schläflijev graf (glej Brouwer et al. [7, str. 103]),

(vii) Shrikhandejev graf (glej Brouwer et al. [7, str. 104]),

(viii) Changovi grafi $T'(8), T''(8), T'''(8)$ (glej Brouwer et al. [7, str. 105]).

Graf G je torej potem komplement enega od teh grafov. Grafi (iv) - (viii) ne pridejo v poštev, ker lastni vrednosti θ_1 in θ_3, ki pripadata njihovim komplementom, nista celoštevilski.
Grafi pod (iii) ne pridejo v poštev, ker njihovi komplementi niso povezani.
Če je G izomorfen kateremu izmed komplementov grafov pod (i), potem vemo po Brouwer et al. [5, Prop. 4.2], da G nima antipodnega razdaljno-regularnega krova za $n > 7$. Če je $n = 6$ ali $n = 7$, potem ima G enolično določen antipoden razdaljno-regularen krov. Če je $n = 5$, je $T(5)$ Petersenov graf, ki je bil že obravnavan zgoraj.
Če je graf G izomorfen enemu od grafov pod (ii), potem ne more imeti antipodnega razdaljno-regularnega krova po Van Bon, Brouwer [5, str. 148]. S tem je dokaz leme končan. □

Dokažimo sedaj glavni izrek tega razdelka:

Izrek 7.2.4 *Naj bo H antipoden razdaljno-regularen graf premera 4 in G njegov antipodni kvocient. Če ima G parametre (n, k, λ, μ) in če je $\mu < k$, potem je*

$$k < \left\lfloor \frac{2(n+1)}{5} \right\rfloor,$$

razen če je G komplement trikotniškega grafa $T(7)$, antipodni kvocient Johnsonovega graf $J(8,4)$ ali antipodni kvocient polovične 8-kocke."

Dokaz. Če je $\lambda \geq k/4$ ali $\mu \geq k/2$, potem imamo po lemah 7.2.2 in 7.2.3 za graf G 9 možnosti: $\overline{T(6)}, \overline{T(7)}$, antipodni kvocient Johnsonovega grafa $J(8,4)$, antipodni kvocient polovične 8-kocke, krepko regularen graf s parametri (126, 45, 12, 18) ali (378,117,36,36), ali pa možen krepko regularen graf s parametri (250,81,24,27), (638,189,60,54) ali (900,261,84,72). Hitro se lahko prepričamo, da izmed teh grafov samo $\overline{T(7)}$, antipodni kvocient Johnsonovega grafa $J(8,4)$ in antipodni kvocient polovične 8-kocke ne zadoščajo neenakosti iz izreka.
Sedaj pa vzemimo, da je $\lambda < k/4$ in $\mu < k/2$. Potem imamo po enačbi (1.1)

$$n = 1 + k + \frac{k(k-\lambda-1)}{\mu} > 1 + k + \frac{3k}{2} - 2 = \frac{5k}{2} - 1.$$

Torej je $k \leq 2(n+1)/5$. Ker pa je k naravno število, je dokaz končan. □

Posledica 7.2.5 *Naj bo H antipoden razdaljno-regularen graf premera 4 in G njegov antipodni kvocient. Če so (n, k, λ, μ) parametri grafa G in če je $\mu < k$, potem je*

$$k \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor.$$

Enakost je dosežena samo za $\overline{T(7)}$.

DOKAZ. Če je graf G eden izmed treh izjem iz izreka 7.2.4, potem se lahko hitro prepričamo, da je $k \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor$ in da je enakost dosežena v primeru, ko je $G = \overline{T(7)}$. Če pa G ni eden izmed teh treh izjem, potem velja $k \leq 2(n+1)/5$. Če je $2(n+1)/5 > (n-1)/2$, potem mora biti $n < 9$. Hitro pa se lahko prepričamo, da tak krepko regularen graf ne obstaja (glej tudi tabele v Brouwer et al. [7, str. 421]. □

Naj bo sedaj G krepko regularen graf na n točkah stopnje k. Kot smo povedali že v prvem poglavju, je njegov komplement $\overline{G}$ tudi krepko regularen graf. Njegova stopnja je $n-k-1$. Od tu lahko dobimo naslednjo zanimivo posledico.

Posledica 7.2.6 *Naj bo G krepko regularen graf s parametri $(n.k, \lambda, \mu)$ za katerega je $\mu < k$. Naj bo $\overline{G}$ njegov komplement. Potem ima antipoden razdaljno-regularen krov premera 4 kvečjemu eden od grafov G in $\overline{G}$.*

DOKAZ. Po izreku 6.4.3 in posledici 7.2.5 je komplement trikotniškega grafa $T(7)$ edini krepko regularen graf, ki lahko ima antipoden razdaljno-regularen krov premera 4 (in ga v tem konkretnem primeru tudi dejansko ima) in za katerega je $k = \lfloor (n-1)/2 \rfloor$. Njegov komplement, trikotniški graf $T(7)$, nima antipodnega razdaljno-regularnega krova premera 4, glej Van Bon in Brouwer [5].
Za vse druge krepko regularne grafe, za katere je $\mu < k$ in ki lahko imajo antipoden razdaljno-regularen krov premera 4, pa velja

$$k < \frac{n-1}{2}.$$

Torej je

$$n - k - 1 > n - \frac{n-1}{2} - 1 = \frac{n-1}{2}.$$

Torej komplement $\overline{G}$ po posledici 7.2.5 ne more imeti razdaljno-regularnega antipodnega krova premera 4. □

7.3 Posplošitev neenakosti

V lemi 7.2.2 smo iskali antipodne kvociente antipodnih razdaljno-regularnih grafov premera 4, za katere je $\lambda \geq k/4$. Na podoben način lahko poiščemo vse antipodne kvociente antipodnih razdaljno-regularnih grafov premera 4, za katere je $\lambda \geq k/m$, kjer je m poljubno naravno število. V tem primeru imamo namreč po eni strani $\theta_1 + \theta_3 = \lambda \geq k/m$, in zato $\theta_1 > k/m$. Po drugi strani pa je $k = \theta_1(-\theta_3) > k/m(-\theta_3)$, torej $-\theta_3 < m$. Torej je $\theta_3 \in \{-1, -2, \ldots, -m+1\}$.

Zaradi kreinovega pogoja $\theta_3^2 \geq \theta_4$ odpade možnost $\theta_3 = -1$. Zaradi istega kreinovega pogoja moramo preveriti končno mnogo možnosti:

$$(\theta_3, \theta_4) \in \{(a, b); a, b \in \mathbb{N}\,,\ -2 \geq a \geq -m+1\ ,\ a-1 \geq b \geq -a^2\}.$$

Število možnosti, ki jih moramo preveriti, pa na žalost hitro narašča. Če hočemo poiskati vse antipodne kvociente antipodnih razdaljno-regularnih grafov premera 4, za katere je $\lambda \geq k/m$, moramo preveriti $\frac{1}{3}(m^2-m)(m-2)$ možnosti. Če predpostavimo, da smo že pregledali vse možnosti, za katere je $\lambda \geq k/(m-1)$, se število novih primerov nekoliko zmanjša: m^2-3m+2. Toda vseeno moramo za $m=5$ preveriti 12 novih možnosti, 20 novih možnosti za $m=6$, za $m=7$ dobimo 30 novih možnosti, in tako naprej.

Kar pa je za nas prenaporno delo, nebi smelo biti prenaporno za računalnik. Cel postopek iskanja antipodnih razdaljno-regularnih grafov, ki imajo $a_1 = \lambda \geq k/m$ smo sprogramirali v Mathematici. V dodatku na koncu dela so podane tabele antipodnih razdaljno-regularnih grafov, za katere je $\lambda \geq k/m$ za nekatere vrednosti števila m.

Prav tako se da nekoliko posplošiti lemo 7.2.3. V lemi 7.2.3 smo iskali antipodne kvociente antipodnih razdaljno-regularnih grafov premera 4, za katere je $\mu \geq k/2$. Poglejmo si, kako bi postopali v primeru, ko bi hoteli poiskati ustrezne krepko regularne grafe z $\mu \geq k/m$. Najprej preverimo, kateri od grafov, ki imajo $\lambda \geq k/(m+1)$, imajo tudi $\mu \geq k/m$. Nato predpostavimo, da je $\lambda < k/(m+1)$. Torej imamo

$$\theta_2(-\theta_4) = k - \mu \leq \frac{k(m-1)}{m} \tag{7.2}$$

in

$$\theta_2 + \theta_4 = \lambda - \mu \leq -\frac{k}{m(m+1)}. \tag{7.3}$$

Enačbo 7.3 pomnožimo z m^2-1 ter ji nato prištejemo enačbo 7.2. Dobimo

$$(m^2-1)\theta_2 + (m^2-1)\theta_4 - \theta_2\theta_4 \leq 0$$

oziroma

$$\theta_2 \leq \frac{-(m^2-1)\theta_4}{m^2-1-\theta_4} = m^2 - 1 - \frac{m^4-2m^2+1}{m^2-1-\theta_4}.$$

Desna stran neenačbe je strogo manjša od m^2-1 (lahko predpostavimo, da je $m \geq 2$, torej je $\theta_2 \in \{1, 2, \ldots, m^2-2\}$.
Fiksirajmo sedaj $\theta_2 := a$, kjer je $1 \leq a \leq m^2-2$. Ker je $\lambda = \mu + \theta_2 + \theta_4 = k + \theta_2\theta_4 + \theta_2 + \theta_4 < k/(m+1)$, velja

$$k < -\frac{m+1}{m}(a\,\theta_4 + a + \theta_4).$$

Iz Kreinovega pogoja, ki ustreza parametru q_{44}^4 za antipodne razdaljno-regularne grafe premera 4, pa dobimo

$$k \geq \frac{\theta_4^2 + 2a\theta_4^2 - a^2\theta_4}{2a + a^2 - \theta_4}.$$

Grafa funkcij $f(\theta_4) = -(a\theta_4 + a + \theta_4)(m+1)/m$ in $g(\theta_4) = (\theta_4^2 + 2a\theta_4^2 - a^2\theta_4)/(2a + a^2 - \theta_4)$ se sekata v dveh točkah: $T_1(x_1, y_1)$ in $T_2(x_2, y_2)$. Da se videti, da je $x_1 < -1$ in $-1 < x_2 < 0$. Ker je $-a(m+1)/m = f(0) < 0 = g(0)$, ustrezen k obstaja samo v primeru, ko je $x_1 \leq \theta_4 \leq -1$. Od tod dobimo zgornjo mejo za k:

$$k \leq \frac{m+1}{m}(-ax_1 - a - x_1).$$

Na žalost moramo tudi v tem primeru pregledati kar dosti možnost, tako da preverjanje ne gre brez pomoči računalnika.

Seveda pa na tak način lahko izboljšamo tudi oceno iz izreka 7.2.4. Če namreč poznamo vse ustrezne krepko regularne grafe, za katere je $\lambda \geq k/m_1$ in $\mu \geq k/m_2$, potem za ostale ustrezne krepko regularne grafe velja

$$n - 1 = k + \frac{k(k - \lambda - 1)}{\mu} > k + k\frac{m_1 m_2 - m_2}{m_1} - m_2,$$

oziroma

$$n - 1 > k\frac{m_1 + m_1 m_2 - m_2}{m_1} - m_2.$$

Od tu pa dobimo

$$k \leq \left\lfloor \frac{m_1(n - 1 + m_2)}{m_1 + m_1 m_2 - m_2} \right\rfloor.$$

V izreku 7.2.4 smo imeli $m_1 = 4$ in $m_2 = 2$, torej

$$k \leq \left\lfloor \frac{2(n+1)}{5} \right\rfloor.$$

Če pa je $m_1 = m_2 = m$, dobimo neenakost

$$k \leq \left\lfloor \frac{n - 1 + m}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n-1}{m} + 1 \right\rfloor.$$

Poglavje 8

PREMER RAZDALJNO-REGULARNEGA GRAFA

Znani so samo trije razdaljno-regularni grafi, katerih premer d je večji ali enak $2k$, kjer je k stopnja grafa. To so

- Tutteova 12-kletka s presečnimi števili $\{3, 2, 2, 2, 2, 2; 1, 1, 1, 1, 1, 3\}$,
- Biggs-Smithov graf s presečnimi števili $\{3, 2, 2, 2, 1, 1, 1; 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3\}$,
- Fosterjev graf s presečnimi števili $\{3, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1; 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3\}$.

Razlaga tega dejstva (oziroma konstrukcija razdaljno-regularnih grafov, za katere je $d \geq 2k$) in konstrukcija dobre zgornje meje za premer razdaljno-regularnega grafa sta verjetno dva glavna odprta problema na področju teorije razdaljno-regularnih grafov. Oba pa sta globoko povezana s še enim ciljem, to je klasifikacijo razdaljno-regularnih grafov.

Znanih je kar nekaj zgornjih mej za premer razdaljno-regularnih grafov. Terwilliger [31] je podal zgornjo mejo za premer dvodelnih razdaljno-regularnih grafov, ki je izražena s stopnjo grafa k in dolžino najkrajšega cikla grafa. Godsil [15, Thm. 13.5.5] je podaj zgornjo mejo za premer razdaljno-regularnih grafov, ki niso popolni večdelni grafi. Njegova meja je izražena z večkratnostjo netrivialne lastne vrednosti. Mejo za premer razdaljno-regularnih grafov sta podala tudi A.A. Ivanov [7, Thm. 5.9.8] ter Bannai & Ito [2].

V tem poglavju si bomo ogledali dve meji za premer razdaljno-regularnih grafov. V prvem razdelku bomo dokazali Pyberjevo neenakost, v drugem pa Hiraki-Koolenovo neenakost.

8.1 Pyberjeva neenakost

Izpeljali bomo zgornjo mejo za premer razdaljno-regularnih grafov, katere avtor je Laszlo Pyber [27]. Njegovemu dokazu neenakosti bomo v tem razdelku tudi sledili. Pyber je zgornjo mejo za premer grafa izrazil s številom vozlišč tega grafa. Njegov izrek se glasi takole.

Izrek 8.1.1 (Pyber [27]) *Naj bo G razdaljno-regularen graf na n vozliščih, stopnje $k \geq 3$ in premera d. Potem je*

$$d \leq 5 \log_2 n.$$

Najprej pa dokažimo nekaj pomožnih rezultatov, ki jih bomo potrebovali pri dokazovanju tega izreka.

Lema 8.1.2 (Koolen [25]) *Naj bo G razdaljno-regularen graf premera d in $c_{e-1} < c_e$ za neko naravno število $e \in \{2, \ldots, d\}$. Potem*

(i) Za poljubni dve vozlišči u in u' ki sta na razdalji e obstaja bijektivna preslikava

$$\Phi : S(u) \cap S_{e-1}(u') \to S_{e-1}(u) \cap S(u'),$$

za katero je $d(v, \Phi(v)) > e - 2$

(ii) $c_i + c_{e-i} \leq c_e$ za vsak i, $1 \leq i \leq e - 1$.

Dokaz. Naj bosta u in u' vozlišči grafa G na razdalji e.
(i) Definirajmo naslednji množici:

$$C := S(u) \cap S_{e-1}(u')\,, \quad C' := S_{e-1}(u) \cap S(u').$$

Za vsako vozlišče $c \in C$ in vsako vozlišče $c' \in C'$ definirajmo

$$P_c := \{x' \in C'\,;\, d(c, x') \geq e - 1\}\,, \quad P'_{c'} := \{x \in C\,;\, d(x, c') \geq e - 1\}.$$

Po sami definiciji presečnih števil c_i velja $|C| = |C'| = c_e$. Ker razdalja med poljubnima vozliščema $c \in C$ ter $c' \in C'$ ne more biti manjša od $e - 2$, je

$$P_c = C' \setminus S_{e-2}(c) = C' \setminus \Big(S(u') \cap S_{e-2}(c)\Big)$$

ter

$$P'_{c'} = C \setminus S_{e-2}(c') = C \setminus \Big(S(u) \cap S_{e-2}(c')\Big).$$

Zato je $|P_c| = |P'_{c'}| = c_e - c_{e-1}$, kar pa je po predpostavki strogo večje od 0.
Naj bo Δ graf z množico vozlišč $C \cup C'$. Vozlišče $c \in C$ naj bo povezano z vsemi vozlišči iz P_c, vozlišče $c' \in C'$ pa z vozlišči iz $P'_{c'}$. Z drugimi besedami:

vozlišče $c \in C$ je povezano z vsemi tistimi vozlišči $c' \in C'$, ki so od njega oddaljeni za $e-1$ ali e. Torej je graf Δ dobro definiran. Poleg tega je regularen stopnje $c_e - c_{e-1}$ in dvodelen. Po znanem Hallovem izreku iz teorije grafov – glej naprimer Diestel [9, Thm. 2.1.2, Cor. 2.1.4] – zato vsebuje popolno prirejanje, ki nam definira funkcijo Φ iz.

(ii) Vozlišči u in u' naj bosta vozlišči grafa G, ki sta na razdalji e. Naj bo $1 \le i \le e-1$ in naj bo v vozlišče, za katero velja $d(u,v) = i$ in $d(v,u') = e-i$. Definirajmo

$$A := \{c \in C\,;\, d(c,v) = i-1\} \quad \text{in} \quad A' := \{c' \in C'\,;\, d(v,c') = e-i-1\}.$$

Ker je $A = S(u) \cap S_{i-1}(v)$ in $A' = S(u') \cap S_{e-i-1}(v)$, je $|A| = c_i$ in $|A'| = c_{e-i}$. Trdimo, da je $\Phi(A) \cap A' = \emptyset$. Pa naj bo $x \in \Phi(A) \cap A'$. Potem obstaja tak $y \in A$, za katerega je $x = \Phi(y)$. Toda $d(y, \Phi(y)) \le d(y,v) + d(v,\Phi(y)) = i-1+e-i-1 = e-2$, kar pa je v protislovju z lastnostjo funkcije Φ, ki smo jo dokazali v (i). Sedaj pa imamo

$$c_i + c_{e-i} = |A| + |A'| = |\Phi(A)| + |A'| = |\Phi(A) \cup A'| \le |C'| = c_e.$$

□

Naslednja lema se pokaže na zelo podoben način, zato jo bomo navedli brez dokaza.

Lema 8.1.3 (Pyber [27]) *Naj bo G razdaljno-regularen graf premera d in naj bo $b_{d-e+1} < b_{d-e}$ za neko celo število $e \in \{2, \ldots, d\}$. Potem*

(i) Za poljubni dve vozlišči u in u' ki sta na razdalji $d-e$ obstaja bijektivna preslikava

$$\Phi : S(u) \cap S_{d-e+1}(u') \to S_{d-e+1}(u) \cap S(u'),$$

za katero je $d(v, \Phi(v)) < d-e+2$

(ii) $c_{e-i} + c_i \le b_{d-e}$ za vsak i, $1 \le i \le e-1$. □

Tudi naslednji rezultat Ivanova bomo navedli brez dokaza. Bralec lahko dokaz prebere v Brouwer et al. [7, Cor. 5.9.6]:

Trditev 8.1.4 (A.A. Ivanov) *Naj bo G razdaljno-regularen graf in $i > 1$ naravno število. Če za presečna števila grafa G velja $(c_{i-1}, b_{i-1}) \ne (c_i, b_i) = \cdots = (c_{i+j}, b_{i+j})$, potem*

(i) $j + 1 \le i$

(ii) če je $j+2 \le i$, potem je $b_j \ge 2c_{j+1}$ □

Rabili bomo tudi naslednjo lemo:

Lema 8.1.5 (Pyber [27]) *Naj bo G razdaljno-regularen graf stopnje $k > 2$ in premera $d > 2$. Če obstaja tak indeks ℓ za katerega je $2 > k_{\ell+1}/k_\ell$, potem velja naslednje:*

(i) $\ell \leq \log_2 k_\ell$,

(ii) če za presečna števila grafa G velja

$$(c_i, b_i) = \cdots = (c_{i+j+1}, b_{i+j+1})$$

za nek $i \geq 1$ in $j \geq 0$, potem je $j + 1 \leq \ell$.

Opomba: Če indeks ℓ ne obstaja, če je torej $2 \leq k_i/k_{i-1}$ za vsak $1 \leq i \leq d$, potem imamo

$$k_d \geq 2k_{d-1} \geq 2^2 k_{d-2} \geq \cdots \geq 2^d,$$

in zato $d \leq \log_2 k_d \leq \log_2 n$. Premer takega grafa torej že ustreza neenakosti, ki jo hočemo dokazati.

DOKAZ. (i) Iz leme 2.3.1 sledi, da je zaporedje k_i/k_{i-1} monotono padajoče. Torej je $k_i/k_{i-1} \geq 2$ za $1 \leq i \leq \ell$ in od tod $k_\ell \geq 2k_{\ell-1} \geq 2^2 k_{\ell-2} \geq \cdots \geq 2^\ell$. Točka (i) sledi.
(ii) Ker je $k_{i+1}/k_i = b_i/c_{i+1}$, je po predpostavkah točke (ii)

$$\frac{k_{i+1}}{k_i} = \frac{k_{i+2}}{k_{i+1}} = \cdots = \frac{k_{i+j+1}}{k_{i+j}}.$$

Po definiciji števila ℓ pa imamo

$$\frac{k_\ell}{k_{\ell-1}} > \frac{k_{\ell+1}}{k_\ell}.$$

Če je $i < \ell$, potem je tudi $i + j + 1 \leq \ell$ in trditev (ii) sledi.
Če pa je $i \geq \ell$, potem imamo

$$\frac{b_i}{c_{i+1}} = \frac{k_{i+1}}{k_i} \leq \frac{k_{\ell+1}}{k_\ell} < 2.$$

Če je $(c_1, b_1) = (c_i, b_i) = (c_{i+1}, b_{i+1})$, potem je $c_{i+1} = c_1 = 1$ in $b_i/c_{i+1} = b_i < 2$. Zato je $b_1 = b_i = 1$. Ker pa je zaporedje b_i padajoče in je $b_{d-1} > 0$, je $b_1 = \cdots = b_{d-1} = 1$. Po lemi 2.3.1 je tudi $c_1 = \cdots = c_{d-1} = 1$. Če je $a_1 > 0$, potem je vsaka povezava grafa G vsebovana v nekem trikotniku. Vzemimo sedaj poljubno povezavo med $S_1(u)$ in $S_2(u)$, kjer je u poljubno vozlišče grafa G. Ker mora biti ta povezava vsebovana v nekem trikotniku in ker je $b_1 = 1$, je $c_2 \geq 2$,

torej $d = 2$. To pa je v protislovju s predpostavko leme, da je $d > 2$. Torej je $a_1 = 0$, kar pa pomeni, da je $k = c_1 + b_1 = 2$. To pa je spet v protislovju s predpostavko leme, da je $k > 2$.
Zato je $(c_1, b_1) \neq (c_i, b_i)$ in po trditvi 8.1.4 (i) dobimo, da je $j + 2 \leq i$, po trditvi 8.1.4 (ii) pa

$$\frac{k_{j+1}}{k_j} = \frac{b_j}{c_{j+1}} \geq 2.$$

Po definiciji števila ℓ velja $j < \ell$ oziroma $j + 1 \leq \ell$. □

Sedaj pa dokažimo glavni izrek tega poglavja.

Dokaz izreka 8.1.1. Če za vse indekse $i \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$ velja, da je $2 < k_{i+1}/k_i$, potem je izrek že dokazan (glej opombo po lemi 8.1.5.
Sicer pa naj bo število ℓ definirano kot v lemi 8.1.5. Pokažimo, da za nek indeks $x \in \{2\ell+2, 2\ell+3 \ldots, 3\ell+2\}$ velja $c_{x-1} < c_x$ ali $b_{x-1} > b_x$. Če velja

$$(c_{2\ell+2}, b_{2\ell+2}) = \cdots = (c_{3\ell+2}, b_{3\ell+2}), \tag{8.1}$$

potem je po lemi 8.1.5 (ii) $c_{2\ell+1} < c_{2\ell+2}$ ali pa $b_{2\ell+1} > b_{2\ell+2}$. Če pa enakost (8.1) ne velja, potem je $c_{x-1} < c_x$ ali $b_{x-1} > b_x$ že za nek indeks $x \in \{2\ell+3, \ldots, 3\ell+2\}$. Vsako izmed možnosti $c_{x-1} < c_x$ oziroma $b_{x-1} > b_x$ si bomo ogledali posebej.

Primer $\boldsymbol{c_{x-1} < c_x}$: V tem primeru dobimo po lemi 8.1.2 za $i = \ell + 1$:

$$c_x \geq c_{\ell+1} + c_{x-\ell-1}.$$

Upoštevajmo, da je zaporedje števil c_i naraščajoče, da je $x - \ell - 1 \geq \ell + 1$, in da je $b_\ell < 2c_{\ell+1}$ ter dobimo

$$c_x \geq 2c_{\ell+1} > b_\ell.$$

Po lemi 2.3.1 (iv) pa je potem $d < x + \ell$. Ker pa je $x \leq 3\ell + 2$, sledi od tod $d \leq 4\ell + 2$.

Primer $\boldsymbol{b_{x-1} > b_x}$: Predpostavimo v tem primeru, da je

$$d \geq 5\ell + 3 \geq (x-1) + 2(\ell + 1).$$

Po lemi 8.1.3 (ii) imamo za $i = \ell + 1$

$$b_\ell \geq b_{x-1} \geq c_{\ell+1} + c_{d-x+1-\ell-1}.$$

Ker pa je $d - x + 1 - \ell - 1 \geq 5\ell + 3 - 3\ell - 2 - \ell = \ell + 1$, je

$$b_\ell \geq 2c_{\ell+1},$$

kar pa je v protislovju z definicijo števila ℓ.

Torej v obeh dveh primerih dobimo $d \leq 5\ell + 2$. Če je sedaj $k_\ell \leq n/2$, potem dobimo po lemi 8.1.5 (i) željeno oceno:

$$d \leq 5\ell + 2 \leq 5 \log_2 k_\ell + 2 \leq 5 \log_2 \frac{n}{2} + 2 \leq 5 \log_2 n.$$

Če pa je $k_\ell > \frac{n}{2}$, potem pa je

$$\frac{b_\ell}{c_{\ell+1}} = \frac{k_{\ell+1}}{k_\ell} < 1,$$

torej $b_\ell < c_{\ell+1}$. Po lemi 2.3.1 (iv) dobimo zato zopet isto oceno:

$$d \leq 2\ell \leq 2 \log_2 n \leq 5 \log_2 n.$$

$\square$

Dokazana ocena je najboljša do konstante natančno. Z drugimi besedami, če hočemo oceno izboljšati, lahko izboljšamo samo konstanto 5. Če namreč za graf G vzamemo d-kocko, ima graf 2^d vozlišč in premer d, torej

$$d = \log_2 n.$$

Funkcija $log_2 n$ je torej v nekem smislu najboljša možna izbira.

8.2 Hiraki-Koolenova neenakost

V tem razdelku bomo dokazali zgornjo mejo za premer razdaljno-regularnih grafov, ki sta jo dokazala A. Hiraki in J. Koolen v [17]. Dokaz bo povzet po tem članku. Spet bomo najprej potrebovali nekaj pomožnih rezultatov. Za začetek pa dve definiciji.

Definicija 8.2.1 *Naj bo G razdaljno-regularen graf premera d s presečnimi števili $\{b_0, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$ in naj bo $c \leq c_d$ naravno število. Definirajmo*

$$\eta_c := |\{i; c_i = c\}| \quad \textit{in} \quad \xi_c := \min\{i; c_i \geq c\}.$$

Definicija 8.2.2 *Naj bo G razdaljno-regularen graf in u, v povezani vozlišči grafa G. Potem je*

$$D^i_j = D^i_j(u, v) := S_i(u) \cap S_j(v).$$

Lema 8.2.1 *Naj bo G razdaljno-regularen graf premera d, $\{b_0, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$ njegova presečna števila in u, v sosednji vozlišči grafa G. Če je $c_i = c_{i+1}$ za neko naravno število i, potem med množicama D_i^{i+1} in $D_i^i \cup D_{i+1}^i$ ni nobenih povezav.*

DOKAZ. Naj bo x točka iz množice D_i^{i+1}. Ker je točka x na razdalji $i+1$ od točke u, poteka od to"ke x natanko c_{i+1} povezav do točk, ki so na razdalji i od točke u, torej do množic d_{i-1}^i, D_i^i ter D_{i+1}^i. Po drugi strani pa je točka x na razdalji i od točke v. Zato od to"ke x poteka natanko c_i povezav do točk, ki so na razdalji $i-1$ od točke v, torej do množice d_{i-1}^i. Ker pa je po predpostavki leme $c_{i+1} = c_i$, med množicama D_i^{i+1} in $D_i^i \cup D_{i+1}^i$ ne more biti nobene povezave.

□

Lema 8.2.2 (Hiraki in Koolen [17]) *Naj bo G razdaljno-regularen graf premera d in $1 < c \leq c_d$ naravno število. Potem je $\eta_c \leq 2\xi_c - 3$.*

DOKAZ. Označimo $\eta := \eta_c$ in $m := \xi_c$. Predpostavimo, da je $\eta \geq 2m - 2$ in poskušajmo priti do protislovja. Najprej iz te predpostavke zaključimo naslednje:

$$c \leq c_m \leq c_{3m-3} \leq c_{m+\eta-1} = c_m,$$

torej

$$c_m = c_{m+1} = \cdots = c_{m+\eta-1}. \tag{8.2}$$

Za dve vozlišči x in y grafa G ki sta na razdalji $j \in \{1, 2, \ldots, d\}$ definirajmo naslednje množice:

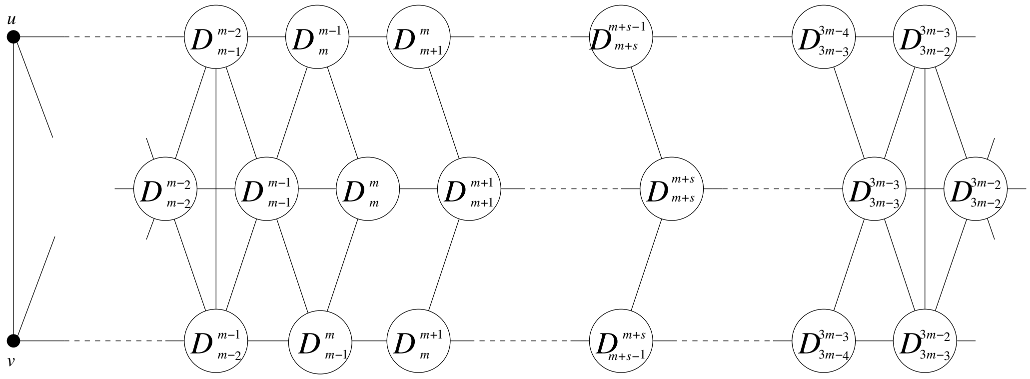
$$\begin{aligned} C_j(x,y) &:= S_{j-1}(x) \cap S(y), \\ A_j(x,y) &:= S_j(x) \cap S(y), \\ B_j(x,y) &:= S_{j+1}(x) \cap S(y). \end{aligned}$$

Zgornje množice imajo po definiciji presečnih števil grafa G ravno c_j, a_j in b_j elementov.
Izberimo si povezavo (u, v) grafa G. Narišimo razdaljno particijo grafa G glede na to povezavo, glej sliko (8.1). Pri tem upoštevamo lemo 8.2.1. Dokaz bomo naredili po korakih.

(i) Med D_{m-1}^m in D_m^{m-1} ni nobene povezave.
Recimo, da bi obstajala povezava (w_o, w_1), tako da bi $w_0 \in D_m^{m-1}$ in $w_1 \in D_{m-1}^m$. Vzemimo $w_{i+1} \in D_{m+i-1}^{m+i} \cap S(w_i)$ za vsak $1 \leq i \leq m-1$. Ker je $c_m = \cdots = c_{3m-3}$, dobimo zaradi leme 8.2.1

$$C_m(w_m, w_0) = S_{m-1}(w_m) \cap S(w_0) \subseteq$$

$$\subseteq D_{m-1}^m \cap S(w_0) \subseteq C_m(v, w_0) \setminus C_{m-1}(u, w_0).$$



Slika 8.1: razdaljna particija grafa G glede na povezavo (u, v)

Ker pa je $C_{m-1}(u, w_0) \subseteq C_m(v, w_0)$, je $c_m \leq c_m - c_{m-1}$. Zato mora biti $c_{m-1} = 0$, kar pa je protislovje. S tem smo pokazali, da med množicama D^m_{m-1} in D^{m-1}_m ni nobene povezave.

Vzemimo sedaj poljuben $x_1 \in D^m_{m-1}$ in $x_{i+1} \in D^{m+i}_{m+i-1} \cap S(x_i)$ za vsak $1 \leq i \leq m-1$. Ker po definiciji števila $m = \xi_c$ velja $c_{m-1} < c_m$, obstaja $x_0 \in C_m(u, x_1) \backslash C_{m-1}(v, x_1)$. Ker je $C_m(u, x_1) \subseteq D^{m-1}_{m-1} \cup D^{m-1}_{m-2}$, je $x_0 \in D^{m-1}_{m-1} \cup D^{m-1}_{m-2}$. Če bi $x_0 \in D^{m-1}_{m-2}$, bi x_0 pripadal tudi množici $C_{m-1}(v, x_1)$, torej $x_0 \in D^{m-1}_{m-1}$.

(ii) $C_{m-1}(u, x_0) \subseteq B_m(x_m, x_0)$.
Res, naj bo w poljubno vozlišče iz $C_{m-1}(u, x_0)$. To pomeni, da je w povezan z x_0 in da je $w \in D^{m-2}_{m-1} \cup D^{m-2}_{m-2}$. V obeh dveh primerih je $w \in S_{m+1}(x_m)$, torej $y \in B_m(x_0, x_m)$.

(iii) $B_{m-1}(v, x_0) \cap C_{m-1}(u, x_0) = \emptyset$.
Naj bo $w \in B_{m-1}(v, x_0) \cap C_m(x_m, x_0)$. Ker je $w \in B_{m-1}(v, x_0)$, je $w \in D^m_m \cup D^{m-1}_m$. Ker pa je $w \in C_{m-1}(u, x_0)$, je $w \in D^{m-2}_{m-1} \cup D^{m-2}_{m-2}$. Ti dve množici pa se ne sekata, torej je naša trditev pravilna.

(iv) $B_{m-1}(v, x_0) \cap A_m(x_m, x_0) \neq \emptyset$
Recimo, da velja nasprotno: $B_{m-1}(v, x_0) \cap A_m(x_m, x_0) = \emptyset$. Vzemimo poljuben $w \in B_{m-1}(v, x_0)$. Torej je $w \in D^m_m \cup D - m^{m-1}$. Ker $w \notin A_m(x_m, x_0)$, je $d(w, x_m) \neq m$. torej je $d(w, x_m) = m + 1$ in zato $y \in B_m(x_m, x_0)$ oziroma $B_{m-1}(v, x_0) \subseteq B_m(x_m, x_0)$. Ker je po koraku (ii) tudi $C_{m-1}(u, x_0) \subseteq B_m(x_0, x_m)$, je $C_{m-1}(u, x_0) \cup B_{m-1}(v, x_0 \subseteq B_m(x_0, x_m)$. Ker

pa je po koraku (iii) presek $B_{m-1}(v, x_0) \cap C_{m-1}(u, x_0)$ prazna množica, je $c_{m-1} + b_{m-1} \leq b_m$, kar pa je v protislovju z dejstvom, da je $b_{m-1} \geq b_m$.

Naj bo sedaj y poljubno vozlišče iz $B_{m-1}(v, x_0) \cap A_m(x_m, x_0)$. Očitno je $y \in D_m^m$. Naj bo s tako največje celo število med 0 in $2m-3$, da obstajata povezani vozlišči $z_0 \in D_{m+s}^{m+s}$ in $z_1 \in D_{m+s-1}^{m+s}$, tako da velja $d(x_0, z_0) = s+1$. Poti dolžine m med y in x_m nam zagotavlja obstoj števila s. Definirajmo še vozlišča $z_{i+1} \in D_{m+s+i-1}^{m+s+i} \cap S(z_i)$ za vsak $1 \leq i \leq 2m-s-3$. Zaradi leme 8.2.1, je $d(z_0, z_{2m-s-2}) = 2m-s-2$.

(v) $C_{2m-s-2}(z_{2m-s-2}, z_0) \subseteq D_{m+s-1}^{m+s}$
Naj bo $w \in C_{2m-s-2}(z_{2m-s-2}, z_0)$. Torej je $w \in D_{m+s-1}^{m+s} \cup D_{m+s+1}^{m+s+1}$. Toda če bi bil $w \in D_{m+s+1}^{m+s+1}$, bi bilo to v protislovju z maksimalnostjo števila s.

(vi) $C_{s+1}(x_0, z_0) \cup C_{2m-s-2}(z_{2m-s-2}, z_0) \subseteq C_{m+s}(v, z_0)$
Če je $w \in C_{s+1}(x_0, z_0)$, je $w \in D_{m+s-1}^{m+s-1}$, zato je $d(w, v) = m+s-1$. Torej je $w \in C_{m+s}(v, z_0)$. Če pa je $w \in C_{2m-s-2}(z_{2m-s-2}, z_0)$, je po koraku (v) $w \in D_{m+s-1}^{m+s}$, kar pa spet pomeni, da je $d(w, v) = m+s-1$, torej $w \in C_{m+s}(v, z_0)$.

(vii) $C_{s+1}(x_0, z_0) \cap C_{2m-s-2}(z_{2m-s-2}, z_0) = \emptyset$
Naj bo $w \in C_{s+1}(x_0, z_0) \cap C_{2m-s-2}(z_{2m-s-2}, z_0)$. Podobno kot v koraku (vi) vidimo, da mora potem veljati $w \in D_{m+s-1}^{m+s-1} \cap D_{m+s-1}^{m+s}$. Toda $D_{m+s-1}^{m+s-1} \cap D_{m+s-1}^{m+s} = \emptyset$. S tem je korak (vii) dokazan.

Iz korakov (vi), (vii) in enakosti 8.2 pa takoj sledi, da je $c_{s+1} + c_{2m-s-2} \leq c_{m+s} \leq c_{m+2m-3} = c_m$. Sedaj moramo obravnavati dve možnosti. Če je $m-1 \leq s$ dobimo

$$c \leq c_m \leq c_{s+1} < c_{s+1} + c_{2m-s-2} \leq c_m,$$

kar je protislovje. Če pa je $s \leq m-2$, potem imamo

$$c \leq c_m \leq c_{2m-s-2} < c_{s+1} + c_{2m-s-2} \leq c_m,$$

kar je spet protislovje. Lema je s tem dokazana. □

Lema 8.2.3 (Hiraki in Koolen [17]) *Naj bo G razdaljno-regularen graf premera d in c naravno število, za katerega je $\eta_c \neq 0$. Potem je $\xi_c \leq \frac{c^2}{4}\eta_1 + 1$.*

Dokaz. Ker je $\eta_c \neq 0$, je očitno $c \leq c_d$. Naj bo sedaj c najmanjše tako število, za katerega zgornja lema ne drži. Za to število potem velja

$$\eta_c \neq 0 \quad \text{in} \quad \xi_c \geq \frac{c^2}{4}\eta_1 + 2. \tag{8.3}$$

Poskušajmo pridelati protislovje. Ker je $\xi_1 = 1$ lema drži za $c = 1$. Ker je $\xi_2 = \eta_1 + 1$ lema drži tudi za $c = 2$. Zato velja $c \geq 3$.
Vpeljimo naslednje oznake:

$$\xi := \xi_c \ , \ t := [\xi/2] \ , \ \alpha := c_t \ , \ s := \xi_\alpha.$$

Ker je $c_\xi > c_{\xi-1}$, dobimo z lemo 8.1.2 (ii) naslednjo neenakost:

$$c = c_\xi \geq c_s + c_{\xi-s} \geq \alpha + \alpha = 2\alpha$$

(upoštevali smo, da je $\xi - s \geq s$, ker je $s \leq \xi/2$). Očitno je $\eta_\alpha \neq 0$ in $\alpha < c$. Zato iz zgornje neenakosti ter minimalnosti števila c sledi

$$s = \xi_\alpha \leq \frac{\alpha^2}{4}\eta_1 + 1 \leq \frac{c^2}{16}\eta_1 + 1. \tag{8.4}$$

Zaradi predpostavke (8.3) in ker je $c \geq 3$, velja tudi $\xi_c > 2\eta_1 + 2$. Torej je $t = [\xi/2] \geq \eta_1 + 1$ in zato $\alpha = c_t > c_1 = 1$. Po lemi 8.2.2 imamo sedaj

$$s + \eta_\alpha \leq s + 2s - 3 = 4(s-1) + 1 - s. \tag{8.5}$$

Iz neenakosti (8.4) in zaradi minimalnosti števila c pa dobimo še

$$4(s-1) + 1 - s \leq \frac{c^2}{4}\eta_1 + 1 - s < \xi - s,$$

torej iz neenakosti (8.5) sledi

$$s + \eta_\alpha < \xi - s. \tag{8.6}$$

Ker je zaporedje števil $\{c_i\}$ monotono nepadajoče, dobimo z upoštevanjem definicije števila ξ_α neenakost

$$\beta := c_{\xi-s} \geq c_{s+\eta_\alpha} > \alpha,$$

in zaradi $\alpha = c_t$ še

$$t + 1 \leq \xi_\beta. \tag{8.7}$$

Iz predpostavke (8.3), definicije števila t, neenakosti (8.7 in minimalnosti števila c (saj je $\beta < c$ in $\eta_\beta \neq 0$) pa sledi

$$c^2\eta_1 \leq 4(\xi - 2) < 8t \leq 8(\xi_\beta - 1) \leq 2\beta^2\eta_1,$$

torej $c < \sqrt{2}\beta$.
Po drugi strani pa spet iz leme 8.2.2 dobimo

$$t \leq s + \eta_\alpha - 1 \leq s + 2s - 3 - 1 = 3s - 4.$$

Zato po predpostavki (8.3), definiciji števila t, zgornji neenakosti in minimalnosti števila c (saj je $\alpha < c$), dobimo

$$\frac{c^2}{4}\eta_1 \leq \xi - 2 \leq 2t - 1 \leq 6s - 9 < 6(s-1) \leq 6\,\frac{\alpha^2}{4}\,\eta_1.$$

Torej je $c < \sqrt{6}\alpha$.
Sedaj pa imamo po lemi 8.1.2 (ii)

$$c = c_\xi \geq c_s + c_{\xi - s} = \alpha + \beta > \frac{c}{\sqrt{6}} + \frac{c}{\sqrt{2}} > c,$$

kar pa je protislovje. S tem je dokaz končan. □

Sedaj pa pokažimo prvega izmed dveh glavnih rezultatov tega razdelka.

Izrek 8.2.4 (Hiraki and Koolen [17]) *Naj bo G razdaljno regularen graf premera d in stopnje $k > 2$. Potem je*

$$d < \frac{1}{2}\,k^2\eta_1.$$

Dokaz. Naj bo $c := c_d$. Vzemimo najprej, da je $2c \leq k$. Če je $c = 1$, potem trditev izreka očitno drži, ker je $\eta_1 = d$. Sicer pa imamo po lemi 8.2.2 in lemi 8.2.3

$$d = \xi_c + \eta_c - 1 < \xi_c + 2\,\xi_c - 3 < 3(\xi_c - 1) \leq 3\frac{c^2}{4}\eta_1 \leq \frac{3}{4}\frac{k^2}{4}\eta_1 < \frac{1}{2}\,k^2\eta_1.$$

Naj bo sedaj $k/2 < c \leq k - 1$. Potem iz $a_i + b_i + c_i = k$ za $i = \xi_c$ sledi $b_{\xi_c} = k - a_{\xi_c} - c_{\xi_c} \leq k - c_{\xi_c} < c_{\xi_c}$. Od tod pa iz leme 2.3.1 in leme 8.2.3 sledi

$$d < 2\xi_c \leq 2\frac{c^2}{4}\,\eta_1 + 2 \leq \frac{k^2}{2}\,\eta_1 - k\eta_1 + \frac{\eta_1}{2} + 2.$$

Ker pa je $k > 2$ in $\eta_1 \geq 1$, je $k\eta_1 - \eta_1/2 - 2 = \eta_1(k - 1/2) - 2 \geq 1/2$, in zato

$$d < \frac{1}{2}\,k^2\eta_1.$$

Na koncu si oglejmo še primer, ko je $c = k$. Ker je po lemi 2.3.1 $b_{d-1} > 0$, je $c_{d-1} < k$ in zato $\xi_c = d$. Če je $d = 1$ ali $d = 2$ trditev očitno drži. Če pa je $d \geq 3$, potem imamo po lemi 8.2.3

$$d \leq 2d - 3 = 2\xi_c - 3 \leq 2\frac{c^2}{4}\,\eta_1 + 2 - 3 = \frac{1}{2}\,k^2\eta_1 - 1 < \frac{1}{2}\,k^2\eta_1.$$

Izrek je s tem dokazan. □

Naslednji izrek navedimo brez dokaza [7, Thm. 5.9.9].

Izrek 8.2.5 (Ivanov) *Naj bo G razdaljno-regularen graf stopnje k in $r := \max\{i; (b_i, c_i) = (b_1, c_1)\}$. Potem je*

$$\eta_1 \leq kr.$$

□

Od tod in iz izreka 8.2.4 pa hitro dobimo naslednjo posledico, s katero tudi zaključujemo razdelek.

Posledica 8.2.6 (Hiraki in Koolen [17]) *Naj bo G razdaljno-regularen graf premera d in stopnje k. Naj bo $r := \max\{i; (b_i, c_i = (b_1, c_1)\}$. Potem je*

$$d < \frac{1}{2}k^3 r.$$

Poglavje 9

TÖPLITZOVE MATRIKE

V tem poglavju bomo dokazali izrek, ki govori o faktorizaciji determinante Töplitzove matrike. Faktorizacija determinante töplitzovih matrik majhnih dimenzij močno spominja na razbitje matrike, iz katere izračunamo lastne vrednosti antipodnega razdaljno-regularnega grafa. Matriko v tem primeru razbijemo na dve manjši matriki. Iz prve nato izračunamo tiste lastne vrednosti tega grafa, ki so tudi lastne vrednosti njegovega antipodnega kvocienta, iz druge pa še ostale lastne vrednost, glej izrek 6.3.2. Isti pristop kot v dokazu izreka 6.3.2 se izkaže za uspešnega tudi v tem primeru. Izrek je v svojem doktoratu napisal in podal skico dokaza z ekvitabilnimi particijami že Jurišić [18, Prop. 7.2.2].

V prvem razdelku poglavja bomo podali definicijo Töplitzove matrike in si ogledali dva primera faktorizacije njene determinante. V drugem in tretjem razdelku pa bomo ločeno obravnavali dva primera: primer, ko je matrika kvadratna sode dimenzije, in primer, ko je matrika kvadratna lihe dimenzije.

9.1 Definicija töplitzove matrike

Definicija 9.1.1 *Matrika T velikosti $n \times n$ je Töplitzova matrika, če velja*

$$|i-j| = |k-h| \Longrightarrow (T)_{ij} = (T)_{kh}.$$

Töplitzova matrika je torej matrika take oblike:

$$T = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_n \\ a_2 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & \dots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & a_1 \end{pmatrix}.$$

Za majhna števila n lahko determinanto Töplitzove matrike T hitro razcepimo na dva faktorja. Za $n = 5$ imamo naprimer

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ b & a & b & c & d \\ c & b & a & b & c \\ d & c & b & a & b \\ e & d & c & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2c & 2b \\ c & a+c & b+d \\ b & b+d & a+e \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a-c & b-d \\ b-d & a-e \end{vmatrix},$$

za $n = 6$ pa

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e & f \\ b & a & b & c & d & e \\ c & b & a & b & c & d \\ d & c & b & a & b & c \\ e & d & c & b & a & b \\ f & e & d & c & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+d \\ b+c & a+d & b+e \\ c+d & b+e & a+f \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a-b & b-c & c-d \\ b-c & a-d & b-e \\ c-d & b-e & a-f \end{vmatrix}.$$

Poskusimo najti pravilo za splošen n.

9.2 Primer $n = 2k$

Najprej si oglejmo primer, ko je n sodo število, ko je torej $n = 2k$ za neko število k. V tem primeru je matrika T takšne oblike:

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & A \end{pmatrix},$$

kjer sta A in B matriki velikosti $k \times k$. Matrika A je simetrična glede na obe svoji diagonali, matrika B pa samo glede na drugo glavno diagonalo (od leve proti desni od spodaj navzgor). Za poljubno matriko M označimo z M_v matriko, ki jo dobimo, če matriko M prezrcalimo preko njene vodoravne osi, z M_n pa matriko, ki jo dobimo, če M prezrcalimo preko njene navpične osi. Dokažimo sedaj naslednji izrek:

Izrek 9.2.1 *Naj bo T Töplitzova matrika velikosti $n \times n$, kjer je n sodo število. Matriki A in B naj bosta matriki, ki sta definirani zgoraj. Potem je*

$$\det(T) = \det(A - B_v) \cdot \det(A + B_v).$$

Dokaz. Dokazali bomo, da je matrika T podobna matriki

$$U = \begin{pmatrix} A - B_v & 0 \\ 0 & A + B_v \end{pmatrix}.$$

Ni težko videti, da za matriko A velja $(A_v)_n = (A_n)_v = A$, za matriko B pa $B_n = (B^T)_v$ in $B_v = (B^T)_n$. Kot v 6. poglavju z I_k označimo identično matriko velikosti $k \times k$, z K_k pa preko vodoravne (ali navpične) osi prezrcaljeno matriko I_k. Za vsako $k \times k$ matriko M velja $MK_k = M_n$ in $K_kM = M_v$. Definirajmo matriko R:

$$R = \begin{pmatrix} K_k & K_k \\ -I_k & I_k \end{pmatrix}.$$

Matrika R je obrnljiva, saj je njen inverz enak

$$R^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} K_k & -I_k \\ K_k & I_k \end{pmatrix}.$$

Pokažimo sedaj, da je $TR = RU$. Imamo torej

$$TR = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} K_k & K_k \\ -I_k & I_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_n - B & A_n + B \\ (B^T)_n - A & (B^T)_n + A \end{pmatrix}.$$

Po drugi strani pa je

$$RU = \begin{pmatrix} K_k & K_k \\ -I_k & I_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A - B_v & 0 \\ 0 & A + B_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_v - (B_v)_v & A_v + (B_v)_v \\ B_v - A & A + B_v \end{pmatrix}.$$

Ker pa je $A_v = A_n$, $(B_v)_v = B$ in $B_v = (B^T)_n$, je $TR = RU$. Matriki T in U sta si torej podobni in imata zato enaki determinanti. □

9.3 Primer $n = 2k + 1$

Oglejmo si sedaj primer, ko ima Töplitzova matrika velikost $n \times n$, kjer je n liho število. V tem primeru je matrika T enaka

$$T = \begin{pmatrix} A & \boldsymbol{x} & B \\ \boldsymbol{x}^T & a_1 & (\boldsymbol{x}^T)_n \\ B^T & \boldsymbol{x}_v & A \end{pmatrix},$$

kjer sta A in B matriki velikosti $k \times k$, $\boldsymbol{x}^T = (a_{k+1}, a_k, \ldots, a_2)^T$ pa je vektor velikosti k. Matrika A je simetricna glede na obe svoji diagonali, matrika B pa samo glede na drugo glavno diagonalo (od leve proti desni od spodaj navzgor). Naj bo C matrika velikosti $k + 1 \times k + 1$, ki je definirana takole:

$$C = \begin{pmatrix} a_1 & 2(\boldsymbol{x}^T)_n \\ \boldsymbol{x}_v & A + B_v \end{pmatrix}.$$

Izrek se v tem primeru glasi takole:

Izrek 9.3.1 *Naj bo T Töplitzova matrika velikosti $n \times n$, kjer je $n = 2k = 1$ liho število. Matrike A, B in C naj bodo matrike, ki so definirane zgoraj. Potem je*

$$\det(T) = \det(A - B_v) \cdot \det(C).$$

DOKAZ. Tudi v tem primeru bomo pokazali, da sta matriki T in U podobni. kjer je matrika U definirana takole:

$$U = \begin{pmatrix} A - B_v & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 2(\boldsymbol{x}^T)_n \\ 0 & \boldsymbol{x}_v & A + B_v \end{pmatrix}.$$

Matrika R, za katero velja $TR = RU$ je v tem primeru enaka

$$R = \begin{pmatrix} K_k & 0 & K_k \\ 0 & 1 & 0 \\ -I_k & 0 & I_k \end{pmatrix},$$

njen inverz pa je

$$R^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} K_k & 0 & -I_k \\ 0 & 2 & 0 \\ K_k & 0 & I_k \end{pmatrix}.$$

Najprej izračunajmo produkt TR:

$$TR = \begin{pmatrix} A & \boldsymbol{x} & B \\ \boldsymbol{x}^T & a_1 & (\boldsymbol{x}^T)_n \\ B^T & \boldsymbol{x}_v & A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} K_k & 0 & K_k \\ 0 & 1 & 0 \\ -I_k & 0 & I_k \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A_n - B & \boldsymbol{x} & A_n + B \\ 0 & a_1 & 2(\boldsymbol{x}^T)_n \\ (B^T)_n - A & \boldsymbol{x}_v & (B^T)_n + A \end{pmatrix}.$$

Produkt RU pa je enak

$$RU = \begin{pmatrix} K_k & 0 & K_k \\ 0 & 1 & 0 \\ -I_k & 0 & I_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A - B_v & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 2(\boldsymbol{x}^T)_n \\ 0 & \boldsymbol{x}_v & A + B_v \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A_v - (B_v)_v & (\boldsymbol{x}_v)_v & A_v + (B_v)_v \\ 0 & a_1 & 2(\boldsymbol{x}^T)_n \\ B_v - A & \boldsymbol{x}_v & A + B_v \end{pmatrix}.$$

Ker pa je $A_v = A_n$, $(B_v)_v = B$, $(B^T)_n = B_v$ in $(\boldsymbol{x}_v)_v = \boldsymbol{x}$, je $TR = RU$. Dokaz je s tem končan. □

Poglavje 10

TABELE DOPUSTNIH PRESEČNIH ŠTEVIL

Zaporedje števil $\{b_0, \ldots, b_{d-1}\,;\, c_1, \ldots, c_d\}$ je *dopustno*, če izpolnjuje vse do sedaj znane pogoje, katerim ustreza zaporedje presečnih števil razdaljno-regularnega grafa. V tem poglavju bomo podali tabele (majhnih) dopustnih presečnih števil za antipodne razdaljno-regularne grafe premera 4. Ker je antipodni kvocient takega grafa krepko regularen graf, je potrebnih pogojev nekaj več kot za splošen razdaljno-regularen graf premera 4. Presečna števila bomo razvrstili po velikost presečnega števila a_1 (oziroma λ v pripadajočem antipodnem kvocientu) glede na $b_0 = k$.

Za dane parametre (n, k, λ, μ) najprej preverimo, če zadoščajo vsem znanim potrebnim pogojem za obstoj netrivialnega nekonferenčnega krepko regularnega grafa:

a) $0 < \mu < k < n - 1$,

b) $v - 2k + \mu - 2 \geq 0$,

c) $v - 2k + \lambda > 0$,

d) $k(k - \lambda - 1) = \mu(n - k - 1)$,

d) $(\mu - \lambda)^2 + 4(k - \mu)$ je popolen kvadrat,

e) Kreinova pogoja $q_{11}^1 \geq 0$ in $q_{22}^2 \geq 0$,

f) absolutne meje (glej Brouwer et al. [7, Thm. 2.3.3]),

g) če je $\lambda \leq 1$ ali $\mu = 1$, potem mora število $\lambda + 1$ deliti stopnjo k, glej Brouwer et al. [7, Prop. 1.2.1].

Če parametri (n, k, λ, μ) zadoščajo tem potrebnim pogojem, preverimo še potrebne pogoje za obstoj antipodnega krova indeksa r:

a) $k \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor$,

b) r mora deliti μ,

c) če je $\lambda > 0$ potem mora biti $\lambda^2 + 4k$ popolen kvadrat,

d) Kreinov pogoj $q_{11}^4 \geq 0$,

e) absolutne meje (glej Brouwer et al. [7, Thm. 2.3.3]),

f) če je $\mu = 2r$ in $k < \frac{1}{2}\lambda(\lambda + 3)$, potem mora $\lambda + 1$ deliti k (glej Brouwer et al. [7, str. 6]).

V prvem stolpcu tabele so presečna števila $\{b_0, b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3, c_4\}$ antipodnega razdaljno-regularnega krova premera 4. V drugem stolpcu so podane lastne vrednosti $\theta_0 > \cdots > \theta_4$ krova, kjer eksponent pomeni večkratnost ustrezne lastne vrednosti. V tretjem stolpcu pa bomo navedli, kaj vemo o obstoju grafa. Znak "∃!" pomeni, da obstaja do izomorfizma samo en antipoden razdaljno-regularen graf z danimi presečnimi števili. Znak "∃" pomeni, da je grafov več, oziroma da še ni dokazano, da je en sam. Znak "//" pomeni, da graf ne obstaja. Če pa je tretji stolpec brez oznake, potem to pomeni, da o obstoju antipodnega razdaljno-regularnega grafa z danimi presečnimi števili še ni nič znanega.

10.1 $\lambda \geq \frac{k}{3}$

{16,9,4,1;1,4,9,16,}	$16^1, 8^7, 2^{20}, -2^{28}, -4^{14}$	∃!
{28,15,6,1;1,6,15,28}	$28^1, 14^8, 4^{28}, -2^{56}, -4^{35}$	∃!
{28,15,9,1;1,3,15,28}	$28^1, 14^{24}, 4^{28}, -2^{168}, -4^{35}$	//

10.2 $\frac{k}{3} > \lambda \geq \frac{k}{4}$

$\{10, 6, 3, 1 ; 1, 3, 6, 10\}$	$10^1, 5^6, 1^{14}, -2^{15}, -4^6$	//
$\{10, 6, 4, 1 ; 1, 2, 6, 10\}$	$10^1, 5^{12}, 1^{14}, -2^{30}, -4^6$	∃!
$\{45, 32, 9, 1 ; 1, 9, 32, 45\}$	$45^1, 15^{21}, 3^{90}, -3^{105}, -9^{35}$	
$\{45, 32, 12, 1 ; 1, 6, 32, 45\}$	$45^1, 15^{42}, 3^{90}, -3^{210}, -9^{35}$	∃
$\{45, 32, 15, 1 ; 1, 3, 32, 45\}$	$45^1, 15^{105}, 3^{90}, -3^{525}, -9^{35}$	
$\{81, 56, 18, 1 ; 1, 9, 56, 81\}$	$81^1, 27^{50}, 6^{144}, -3^{450}, -9^{105}$	
$\{81, 56, 24, 1 ; 1, 3, 56, 81\}$	$81^1, 27^{200}, 6^{144}, -3^{1800}, -9^{105}$	
$\{117, 80, 18, 1 ; 1, 18, 80, 117\}$	$117^1, 39^{27}, 9^{182}, -3^{351}, -9^{195}$	
$\{117, 80, 24, 1 ; 1, 12, 80, 117\}$	$117^1, 39^{54}, 9^{182}, -3^{702}, -9^{195}$	∃
$\{117, 80, 27, 1 ; 1, 9, 80, 117\}$	$117^1, 39^{81}, 9^{182} - 3^{1053}, -9^{195}$	
$\{117, 80, 30, 1 ; 1, 6, 80, 117\}$	$117^1, 39^{135}, 9^{182}, -3^{1755}, -9^{195}$	
$\{117, 80, 32, 1 ; 1, 4, 80, 117\}$	$117^1, 39^{216}, 9^{182}, -3^{2808}, -9^{195}$	
$\{117, 80, 33, 1 ; 1, 3, 80, 117\}$	$117^1, 39^{297}, 9^{182}, -3^{3861}, -9^{195}$	
$\{189, 128, 27, 1 ; 1, 27, 128, 189\}$	$189^1, 63^{29}, 15^{231}, -3^{609}, -9^{406}$	
$\{189, 128, 36, 1 ; 1, 18, 128, 189\}$	$189^1, 63^{58}, 15^{231}, -3^{1218}, -9^{406}$	
$\{189, 128, 45, 1 ; 1, 9, 128, 189\}$	$189^1, 63^{145}, 15^{231}, -3^{3045}, -9^{406}$	
$\{189, 128, 48, 1 ; 1, 6, 128, 189\}$	$189^1, 63^{232}, 15^{231}, -3^{4872}, -9^{406}$	
$\{189, 128, 51, 1 ; 1, 3, 128, 189\}$	$189^1, 63^{493}, 15^{231}, -3^{10353}, -9^{406}$	
$\{261, 176, 36, 1 ; 1, 36, 176, 261\}$	$261^1, 87^{30}, 21^{261}, -3^{870}, -9^{638}$	
$\{261, 176, 54, 1 ; 1, 18, 176, 261\}$	$261^1, 87^{90}, 21^{261}, -3^{2610}, -9^{638}$	
$\{261, 176, 60, 1 ; 1, 12, 176, 261\}$	$261^1, 87^{150}, 21^{261}, -3^{4350}, -9^{638}$	
$\{261, 176, 63, 1 ; 1, 9, 176, 261\}$	$261^1, 87^{210}, 21^{261}, -3^{6090}, -9^{638}$	
$\{261, 176, 64, 1 ; 1, 8, 176, 261\}$	$261^1, 87^{240}, 21^{261} - 3^{6960}, -9^{638}$	
$\{261, 176, 66, 1 ; 1, 6, 176, 261\}$	$261^1, 87^{330}, 21^{261}, -3^{9570}, -9^{638}$	
$\{261, 176, 68, 1 ; 1, 4, 176, 261\}$	$261^1, 87^{510}, 21^{261}, -3^{14790}, -9^{638}$	
$\{261, 176, 69, 1 ; 1, 3, 176, 261\}$	$261^1, 87^{690}, 21^{261}, -3^{20010}, -9^{638}$	

10.3 $\frac{k}{4} > \lambda \geq \frac{k}{5}$

$\{27, 20, 6, 1 ; 1, 3, 20, 27\}$	$27^1, 9^{44}, 3^{55}, -3^{132}, -6^{32}$	
$\{96, 75, 16, 1 ; 1, 16, 75, 96\}$	$96^1, 24^{46}, 4^{252}, -4^{276}, -16^{69}$	
$\{96, 75, 24, 1 ; 1, 8, 75, 96\}$	$96^1, 24^{138}, 4^{252}, -4^{828}, -16^{69}$	
$\{96, 75, 28, 1 ; 1, 4, 75, 96\}$	$96^1, 24^{322}, 4^{252}, -4^{1932}, -16^{69}$	
$\{104, 81, 20, 1 ; 1, 4, 81, 104\}$	$104^1, 26^{304}, 8^{247}, -4^{1976}, -10^{208}$	
$\{128, 99, 24, 1 ; 1, 8, 99, 128\}$	$128^1, 32^{175}, 8^{308}, -4^{1400}, -12^{216}$	
$\{176, 135, 24, 1 ; 1, 24, 135, 176\}$	$176^1, 44^{56}, 8^{440}, -4^{616}, -16^{231}$	
$\{176, 135, 32, 1 ; 1, 16, 135, 176\}$	$176^1, 44^{112}, 8^{440}, -4^{1232}, -16^{231}$	
$\{176, 135, 36, 1 ; 1, 12, 135, 176\}$	$176^1, 44^{168}, 8^{440}, -4^{1848}, -16^{231}$	
$\{176, 135, 40, 1 ; 1, 8, 135, 176\}$	$176^1, 44^{280}, 8^{440}, -4^{3080}, -16^{231}$	
$\{176, 135, 42, 1 ; 1, 6, 135, 176\}$	$176^1, 44^{392}, 8^{440}, -4^{4312}, -16^{231}$	
$\{176, 135, 44, 1 ; 1, 4, 135, 176\}$	$176^1, 44^{616}, 8^{440}, -4^{6776}, -16^{231}$	
$\{176, 135, 45, 1 ; 1, 3, 135, 176\}$	$176^1, 44^{840}, 8^{440}, -4^{9240}, -16^{231}$	
$\{176, 135, 32, 1 ; 1, 4, 135, 176\}$	$176^1, 44^{558}, 14^{341}, -4^{6138}, -10^{495}$	

$\{308, 234, 21, 1\ ;\ 1, 21, 234, 308\}$	$308^1, 77^{100}, 38^{308}, -4^{1925}, -7^{1716}$	
$\{308, 234, 28, 1\ ;\ 1, 14, 234, 308\}$	$308^1, 77^{200}, 38^{308}, -4^{3850}, -7^{1716}$	
$\{308, 234, 35, 1\ ;\ 1, 7, 234, 308\}$	$308^1, 77^{500}, 38^{308}, -4^{9625}, -7^{1716}$	
$\{308, 234, 36, 1\ ;\ 1, 6, 234, 308\}$	$308^1, 77^{600}, 38^{308}, -4^{11550}, -7^{1716}$	
$\{308, 234, 39, 1\ ;\ 1, 3, 234, 308\}$	$308^1, 77^{1300}, 38^{308}, -4^{25025}, -7^{1716}$	
$\{320, 243, 30, 1\ ;\ 1, 30, 243, 320\}$	$320^1, 80^{77}, 26^{440}, -4^{1540}, -10^{1176}$	
$\{320, 243, 40, 1\ ;\ 1, 20, 243, 320\}$	$320^1, 80^{154}, 26^{440}, -4^{3080}, -10^{1176}$	
$\{320, 243, 45, 1\ ;\ 1, 15, 243, 320\}$	$320^1, 80^{231}, 26^{440}, -4^{4620}, -10^{1176}$	
$\{320, 243, 48, 1\ ;\ 1, 12, 243, 320\}$	$320^1, 80^{308}, 26^{440}, -4^{6160}, -10^{1176}$	
$\{320, 243, 50, 1\ ;\ 1, 10, 243, 320\}$	$320^1, 80^{385}, 26^{440}, -4^{7700}, -10^{1176}$	
$\{320, 243, 54, 1\ ;\ 1, 6, 243, 320\}$	$320^1, 80^{693}, 26^{440}, -4^{13860}, -10^{1176}$	
$\{320, 243, 55, 1\ ;\ 1, 5, 243, 320\}$	$320^1, 80^{847}, 26^{440}, -4^{16940}, -10^{1176}$	
$\{320, 243, 56, 1\ ;\ 1, 4, 243, 320\}$	$320^1, 80^{1078}, 26^{440}, -4^{21560}, -10^{1176}$	
$\{320, 243, 57, 1\ ;\ 1, 3, 243, 320\}$	$320^1, 80^{1463}, 26^{440}, -4^{29260}, -10^{1176}$	
$\{336, 255, 40, 1\ ;\ 1, 40, 255, 336\}$	$336^1, 84^{64}, 16^{b693}, -4^{1344}, -16^{714}$	
$\{336, 255, 60, 1\ ;\ 1, 20, 255, 336\}$	$336^1, 84^{192}, 16^{693}, -4^{4032}, -16^{714}$	
$\{336, 255, 64, 1\ ;\ 1, 16, 255, 336\}$	$336^1, 84^{256}, 16^{693}, -4^{5376}, -16^{714}$	
$\{336, 255, 70, 1\ ;\ 1, 10, 255, 336\}$	$336^1, 84^{448}, 16^{693}, -4^{9408}, -16^{714}$	
$\{336, 255, 72, 1\ ;\ 1, 8, 255, 336\}$	$336^1, 84^{576}, 16^{693}, -4^{12096}, -16^{714}$	
$\{336, 255, 75, 1\ ;\ 1, 5, 255, 336\}$	$336^1, 84^{960}, 16^{693}, -4^{20160}, -16^{714}$	
$\{336, 255, 76, 1\ ;\ 1, 4, 255, 336\}$	$336^1, 84^{1216}, 16^{693}, -4^{25536}, -16^{714}$	
$\{336, 255, 24, 1\ ;\ 1, 12, 255, 336\}$	$336^1, 84^{247}, 50^{285}, -4^{5187}, -6^{2431}$	
$\{336, 255, 32, 1\ ;\ 1, 4, 255, 336\}$	$336^1, 84^{988}, 50^{285}, -4^{20748}, -6^{2431}$	
$\{392, 297, 68, 1\ ;\ 1, 4, 297, 392\}$	$392^1, 98^{1340}, 32^{469}, -4^{32830}, -10^{1540}$	
$\{416, 315, 48, 1\ ;\ 1, 48, 315, 416\}$	$416^1, 104^{66}, 20^{780}, -4^{1716}, -16^{1001}$	
$\{416, 315, 64, 1\ ;\ 1, 32, 315, 416\}$	$416^1, 104^{132}, 20^{780}, -4^{3432}, -16^{1001}$	$\exists$
$\{416, 315, 72, 1\ ;\ 1, 24, 315, 416\}$	$416^1, 104^{198}, 20^{780}, -4^{5148}, -16^{1001}$	
$\{416, 315, 80, 1\ ;\ 1, 16, 315, 416\}$	$416^1, 104^{330}, 20^{780}, -4^{8580}, -16^{1001}$	
$\{416, 315, 84, 1\ ;\ 1, 12, 315, 416\}$	$416^1, 104^{462}, 20^{780}, -4^{12012}, -16^{1001}$	
$\{416, 315, 88, 1\ ;\ 1, 8, 315, 416\}$	$416^1, 104^{726}, 20^{780}, -4^{18876}, -16^{1001}$	
$\{416, 315, 90, 1\ ;\ 1, 6, 315, 416\}$	$416^1, 104^{990}, 20^{780}, -4^{25740}, -16^{1001}$	
$\{416, 315, 92, 1\ ;\ 1, 4, 315, 416\}$	$416^1, 104^{1518}, 20^{780}, -4^{39468}, -16^{1001}$	
$\{416, 315, 93, 1\ ;\ 1, 3, 315, 416\}$	$416^1, 104^{2046}, 20^{780}, -4^{53196}, -16^{1001}$	
$\{480, 363, 93, 1\ ;\ 1, 3, 363, 480\}$	$480^1, 120^{2296}, 32^{615}, -4^{68880}, -12^{1680}$	
$\{896, 675, 96, 1\ ;\ 1, 96, 675, 896\}$	$896^1, 224^{71}, 44^{1064}, -4^{3976}, -16^{2982}$	
$\{896, 675, 128, 1\ ;\ 1, 64, 675, 896\}$	$896^1, 224^{142}, 44^{1064}, -4^{7952}, -16^{2982}$	
$\{896, 675, 144, 1\ ;\ 1, 48, 675, 896\}$	$896^1, 224^{213}, 44^{1064}, -4^{11928}, -16^{2982}$	
$\{896, 675, 160, 1\ ;\ 1, 32, 675, 896\}$	$896^1, 224^{355}, 44^{1064}, -4^{19880}, -16^{2982}$	
$\{896, 675, 168, 1 : 1, 24, 675, 896\}$	$896^1, 224^{497}, 44^{1064}, -4^{27832}, -16^{2982}$	
$\{896, 675, 176, 1\ ;\ 1, 16, 675, 896\}$	$896^1, 224^{781}, 44^{1064}, -4^{43736}, -16^{2982}$	
$\{896, 675, 180, 1\ ;\ 1, 12, 675, 896\}$	$896^1, 224^{1065}, 44^{1064}, -4^{59640}, -16^{2982}$	
$\{896, 675, 184, 1\ ;\ 1, 8, 675, 896\}$	$896^1, 224^{1633}, 44^{1064}, -4^{91448}, -16^{2982}$	
$\{896, 675, 186, 1\ ;\ 1, 6, 675, 896\}$	$896^1, 224^{2201}, 44^{1064}, -4^{123256}, -16^{2982}$	
$\{896, 675, 188, 1\ ;\ 1, 4, 675, 896\}$	$896^1, 224^{3337}, 44^{1064}, -4^{186872}, -16^{2982}$	
$\{896, 675, 189, 1\ ;\ 1, 3, 675, 896\}$	$896^1, 224^{4473}, 44^{1064}, -4^{250488}, -16^{2982}$	
$\{1136, 855, 120, 1\ ;\ 1, 120, 855, 1136\}$	$1136^1, 284^{72}, 56^{1136}, -4^{5112}, -16^{4047}$	
$\{1136, 855, 180, 1\ ;\ 1, 60, 855, 1136\}$	$1136^1, 284^{216}, 56^{1136}, -4^{15336}, -16^{4047}$	
$\{1136, 855, 192, 1\ ;\ 1, 48, 855, 1136\}$	$1136^1, 284^{288}, 56^{1136}, -4^{20448}, -16^{4047}$	

$\{1136, 855, 200, 1 ; 1, 40, 855, 1136\}$	$1136^1, 284^{360}, 56^{1136}, -4^{25560}, -16^{4047}$	
$\{1136, 855, 210, 1 ; 1, 30, 855, 1136\}$	$1136^1, 284^{504}, 56^{1136}, -4^{35784}, -16^{4047}$	
$\{1136, 855, 216, 1 ; 1, 24, 855, 1136\}$	$1136^1, 284^{648}, 56^{1136}, -4^{46008}, -16^{4047}$	
$\{1136, 855, 220, 1 ; 1, 20, 855, 1136\}$	$1136^1, 284^{792}, 56^{1136}, -4^{56232}, -16^{4047}$	
$\{1136, 855, 224, 1 ; 1, 16, 855, 1136\}$	$1136^1, 284^{1008}, 56^{1136}, -4^{71568}, -16^{4047}$	
$\{1136, 855, 225, 1 ; 1, 15, 855, 1136\}$	$1136^1, 284^{1080}, 56^{1136}, -4^{76680}, -16^{4047}$	
$\{1136, 855, 228, 1 ; 1, 12, 855, 1136\}$	$1136^1, 284^{1368}, 56^{1136}, -4^{97128}, -16^{4047}$	
$\{1136, 855, 230, 1 ; 1, 10, 855, 1136\}$	$1136^1, 284^{1656}, 56^{1136}, -4^{117576}, -16^{4047}$	
$\{1136, 855, 232, 1 ; 1, 8, 855, 1136\}$	$1136^1, 284^{2088}, 56^{1136}, -4^{148248}, -16^{4047}$	
$\{1136, 855, 234, 1 ; 1, 6, 855, 1136\}$	$1136^1, 284^{2808}, 56^{1136}, -4^{199368}, -16^{4047}$	
$\{1136, 855, 235, 1 ; 1, 5, 855, 1136\}$	$1136^1, 284^{3384}, 56^{1136}, -4^{240264}, -16^{4047}$	
$\{1136, 855, 236, 1 ; 1, 4, 855, 1136\}$	$1136^1, 284^{4248}, 56^{1136}, -4^{301608}, -16^{4047}$	
$\{1136, 855, 237, 1 ; 1, 3, 855, 1136\}$	$1136^1, 284^{5688}, 56^{1136}, -4^{403848}, -16^{4047}$	

10.4 $\frac{k}{5} > \lambda \geq \frac{k}{6}$

$\{6, 4, 2, 1 ; 1, 1, 4, 6\}$	$6^1, 3^{12}, 1^9, -2^{18}, -3^5$	∃!
$\{56, 45, 12, 1 ; 1, 12, 45, 56\}$	$56^1, 14^{36}, 2^{140}, -4^{126}, -16^{21}$	
$\{56, 45, 16, 1 ; 1, 8, 45, 56\}$	$56^1, 14^{72}, 2^{140}, -4^{252}, -16^{21}$	∃!
$\{56, 45, 18, 1 ; 1, 6, 45, 56\}$	$56^1, 14^{108}, 2^{140}, -4^{378}, -16^{21}$	//
$\{56, 45, 20, 1 ; 1, 4, 45, 56\}$	$56^1, 14^{180}, 2^{140}, -4^{630}, -16^{21}$	
$\{56, 45, 21, 1 ; 1, 3, 45, 56\}$	$56^1, 14^{252}, 2^{140}, -4^{882}, -16^{21}$	
$\{175, 144, 25, 1 ; 1, 25, 144, 175\}$	$175^1, 35^{85}, 5^{560}, -5^{595}, -25^{119}$	
$\{175, 144, 40, 1 ; 1, 10, 144, 175\}$	$175^1, 35^{340}, 5^{560}, -5^{2380}, -25^{119}$	
$\{175, 144, 45, 1 ; 1, 5, 144, 175\}$	$175^1, 35^{765}, 5^{560}, -5^{5355}, -25^{19}$	
$\{175, 144, 7, 1 ; 1, 7, 144, 175\}$	$175^1, 35^{247}, 23^{455}, -5^{1729}, -7^{1520}$	
$\{220, 180, 22, 1 ; 1, 11, 180, 220\}$	$220^1, 44^{290}, 17^{550}, -5^{2552}, -11^{870}$	
$\{220, 180, 30, 1 ; 1, 3, 180, 220\}$	$220^1, 44^{1450}, 17^{550}, -5^{12760}, -11^{870}$	
$\{325, 264, 50, 1 ; 1, 25, 264, 325\}$	$325^1, 65^{210}, 10^{1040}, -5^{2730}, -25^{429}$	
$\{325, 264, 60, 1 ; 1, 15, 264, 325\}$	$325^1, 65^{420}, 10^{1040}, -5^{5460}, -25^{429}$	
$\{325, 264, 70, 1 ; 1, 5, 264, 325\}$	$325^1, 65^{1470}, 10^{1040}, -5^{19110}, -25^{429}$	
$\{325, 264, 72, 1 ; 1, 3, 264, 325\}$	$325^1, 65^{2520}, 10^{1040}, -5^{32760}, -25^{429}$	
$\{475, 384, 50, 1 ; 1, 50, 384, 475\}$	$475^1, 95^{115}, 15^{1425}, -5^{2185}, -25^{874}$	
$\{475, 384, 75, 1 ; 1, 25, 384, 475\}$	$475^1, 95^{345}, 15^{1425}, -5^{6555}, -25^{874}$	
$\{475, 384, 80, 1 ; 1, 20, 384, 475\}$	$475^1, 95^{460}, 15^{1425}, -5^{8740}, -25^{874}$	
$\{475, 384, 90, 1 ; 1, 10, 384, 475\}$	$475^1, 95^{1035}, 15^{1425}, -5^{19665}, -25^{874}$	
$\{475, 384, 95, 1 ; 1, 5, 384, 475\}$	$475^1, 95^{2185}, 15^{1425}, -5^{41515}, -25^{874}$	
$\{475, 384, 96, 1 ; 1, 4, 384, 475\}$	$475^1, 95^{2760}, 15^{1425}, -5^{52440}, -25^{874}$	
$\{675, 544, 63, 1 ; 1, 9, 544, 675\}$	$675^1, 135^{1444}, 67^{675}, -5^{38988}, -9^{5100}$	
$\{775, 624, 75, 1 ; 1, 75, 624, 775\}$	$775^1, 155^{125}, 25^{1984}, -5^{3875}, -25^{2015}$	
$\{775, 624, 100, 1 ; 1, 50, 624, 775\}$	$775^1, 155^{250}, 25^{1984}, -5^{7750}, -25^{2015}$	
$\{775, 624, 120, 1 ; 1, 30, 624, 775\}$	$775^1, 155^{500}, 25^{1984}, -5^{15500}, -25^{2015}$	
$\{775, 624, 125, 1 ; 1, 25, 624, 775\}$	$775^1, 155^{625}, 25^{1984}, -5^{19375}, -25^{2015}$	
$\{775,624, 135, 1 ; 1, 15, 624, 775\}$	$775^1, 155^{1125}, 25^{1984}, -5^{34875}, -25^{2015}$	
$\{775, 624, 140, 1 ; 1, 10, 624, 775\}$	$775^1, 155^{1750}, 25^{1984}, -5^{54250}, -25^{2015}$	

{775, 624, 144, 1 ; 1, 6, 624, 775}	$775^{1}, 155^{3000}, 25^{1984}, -5^{93000}, -25^{2015}$	
{775, 624, 145, 1 ; 1, 5, 624, 775}	$775^{1}, 155^{3625}, 25^{1984}, -5^{112375}, -25^{2015}$	
{775, 624, 147, 1 ; 1, 3, 624, 775}	$775^{1}, 155^{6125}, 25^{1984}, -5^{189875}, -25^{2015}$	
{975, 784, 125, 1 ; 1, 25, 784, 975}	$975^{1}, 195^{759}, 55^{1287}, -5^{29601}, -15^{4784}$	
{1075, 864, 100, 1 ; 1, 100, 864, 1075}	$1075^{1}, 215^{130}, 35^{2365}, -5^{5590}, -25^{3354}$	
{1075, 864, 150, 1 ; 1, 50, 864, 1075}	$1075^{1}, 215^{390}, 35^{2365}, -5^{16770}, -25^{3354}$	
{1075, 864, 160, 1 ; 1, 40, 864, 1075}	$1075^{1}, 215^{520}, 35^{2365}, -5^{22360}, -25^{3354}$	
{1075, 864, 175, 1 ; 1, 25, 864, 1075}	$1075^{1}, 215^{910}, 35^{2365}, -5^{39130}, -25^{3354}$	
{1075, 864, 180, 1 ; 1, 20, 864, 1075}	$1075^{1}, 215^{1170}, 35^{2365}, -5^{50310}, -25^{3354}$	
{1075, 864, 190, 1 ; 1, 10, 864, 1075}	$1075^{1}, 215^{2470}, 35^{2365}, -5^{106210}, -25^{3354}$	
{1075, 864, 192, 1 ; 1, 8, 864, 1075}	$1075^{1}, 215^{3120}, 35^{2365}, -5^{134160}, -25^{3354}$	
{1075, 864, 195, 1 ; 1, 5, 864, 1075}	$1075^{1}, 215^{5070}, 35^{2365}, -5^{218010}, -25^{3354}$	
{1075, 864, 196, 1 ; 1, 4, 864, 1075}	$1075^{1}, 215^{6370}, 35^{2365}, -5^{273910}, -25^{3354}$	
{1375, 1104, 125, 1 ; 1, 125, 1104, 1375}	$1375^{1}, 275^{133}, 45^{2640}, -5^{7315}, -25^{4807}$	
{1375, 1104, 200, 1 ; 1, 50, 1104, 1375}	$1375^{1}, 275^{532}, 45^{2640}, -5^{29260}, -25^{4807}$	
{1375, 1104, 225, 1 ; 1, 25, 1104, 1375}	$41375^{1}, 275^{1197}, 45^{2640}, -5^{65835}, -25^{4807}$	
{1375, 1104, 240, 1 ; 1, 10, 1104, 1375}	$1375^{1}, 275^{3192}, 45^{2640}, -5^{175560}, -25^{4807}$	
{1375, 1104, 245, 1 ; 1, 5, 1104, 1375}	$1375^{1}, 275^{6517}, 45^{2640}, -5^{358435}, -25^{4807}$	
{2875, 2304, 250, 1 ; 1, 250, 2304, 2875}	$2875^{1}, 575^{139}, 95^{3335}, -5^{15985}, -25^{12788}$	
{2875, 2304, 375, 1 ; 1, 125, 2304, 2875}	$2875^{1}, 575^{417}, 95^{3335}, -5^{47955}, -25^{12788}$	
{2875, 2304, 400, 1 ; 1, 100, 2304, 2875}	$2875^{1}, 575^{556}, 95^{3335}, -5^{63940}, -25^{12788}$	
{2875, 2304, 450, 1 ; 1, 50, 2304, 2875}	$2875^{1}, 575^{1251}, 95^{3335}, -5^{143865}, -25^{12788}$	
{2875, 2304, 475, 1 ; 1, 25, 2304, 2875}	$2875^{1}, 575^{2641}, 95^{3335}, -5^{303715}, -25^{12788}$	
{2875, 2304, 480, 1 ; 1, 20, 2304, 2875}	$2875^{1}, 575^{3336}, 95^{3335}, -5^{383640}, -25^{12788}$	
{2875, 2304, 490, 1 ; 1, 10, 2304, 2875}	$2875^{1}, 575^{6811}, 95^{3335}, -5^{783265}, -25^{12788}$	
{2875, 2304, 495, 1 ; 1, 5, 2304, 2875}	$2875^{1}, 575^{13761}, 95^{3335}, -5^{1582515}, -25^{12788}$	
{2875, 2304, 496, 1 ; 1, 4, 2304, 2875}	$2875^{1}, 575^{17236}, 95^{3335}, -5^{1982140}, -25^{12788}$	
{3475, 2784, 300, 1 ; 1, 300, 2784, 3475}	$3475^{1}, 695^{140}, 115^{3475}, -5^{19460}, -25^{16124}$	
{3475, 2784, 450, 1 ; 1, 150, 2784, 3475}	$3475^{1}, 695^{420}, 115^{3475}, -5^{58380}, -25^{16124}$	
{3475, 2784, 480, 1 ; 1, 120, 2784, 3475}	$3475^{1}, 695^{560}, 115^{3475}, -5^{77840}, -25^{16124}$	
{3475, 2784, 500, 1 ; 1, 100, 2784, 3475}	$3475^{1}, 695^{700}, 115^{3475}, -5^{97300}, -25^{16124}$	
{3475, 2784, 525, 1 ; 1, 75, 2784, 3475}	$3475^{1}, 695^{980}, 115^{3475}, -5^{136220}, -25^{16124}$	
{3475, 2784, 540, 1 ; 1, 60, 2784, 3475}	$3475^{1}, 695^{1260}, 115^{3475}, -5^{175140}, -25^{16124}$	
{3475, 2784, 550, 1 ; 1, 50, 2784, 3475}	$3475^{1}, 695^{1540}, 115^{3475}, -5^{214060}, -25^{16124}$	
{3475, 2784, 560, 1 ; 1, 40, 2784, 3475}	$3475^{1}, 695^{1960}, 115^{3475}, -5^{272440}, -25^{16124}$	
{3475, 2784, 570, 1 ; 1, 30, 2784, 3475}	$3475^{1}, 695^{2660}, 115^{3475}, -5^{369740}, -25^{16124}$	
{3475, 2784, 575, 1 ; 1, 25, 2784, 3475}	$3475^{1}, 695^{3220}, 115^{3475}, -5^{447580}, -25^{16124}$	
{3475, 2784, 576, 1 ; 1, 24, 2784, 3475}	$3475^{1}, 695^{3360}, 115^{3475}, -5^{467040}, -25^{16124}$	
{3475, 2784, 580, 1 ; 1, 20, 2784, 3475}	$3475^{1}, 695^{4060}, 115^{3475}, -5^{564340}, -25^{16124}$	
{3475, 2784, 585, 1 ; 1, 15, 2784, 3475}	$3475^{1}, 695^{5460}, 115^{3475}, -5^{758940}, -25^{16124}$	
{3475, 2784, 588, 1 ; 1, 12, 2784, 3475}	$3475^{1}, 695^{6860}, 115^{3475}, -5^{953540}, -25^{16124}$	
{3475, 2784, 590, 1 ; 1, 10, 2784, 3475}	$3475^{1}, 695^{8260}, 115^{3475}, -5^{1148140}, -25^{16124}$	
{3475, 2784, 592, 1 ; 1, 8, 2784, 3475}	$3475^{1}, 695^{10360}, 115^{3475}, -5^{1440040}, -25^{16124}$	
{3475, 2784, 594, 1 ; 1, 6, 2784, 3475}	$3475^{1}, 695^{13860}, 115^{3475}, -5^{1926540}, -25^{16124}$	
{3475, 2784, 595, 1 ; 1, 5, 2784, 3475}	$3475^{1}, 695^{16660}, 115^{3475}, -5^{2315740}, -25^{16124}$	
{3475, 2784, 596, 1 ; 1, 4, 2784, 3475}	$3475^{1}, 695^{20860}, 115^{3475}, -5^{2899540}, -25^{16124}$	
{3475, 2784, 597, 1 ; 1, 3, 2784, 3475}	$3475^{1}, 695^{27860}, 115^{3475}, -5^{3872540}, -25^{16124}$	

Literatura

[1] Artin, E., *Geometric Algebra*, Interscience, New York (1957).

[2] Bannai, E. and T. Ito, *On distance-regular graphs with fixed valency, III*, J. Algebra **107** (1987), 43-52.

[3] Biggs, N.L., *Algebraic graph theory*, Cambridge Univercity Press, Cambridge (1974).

[4] Biggs, N.L. and A. Gardiner, *The classification of distance transitive graphs*, unpublished manuscript (1974).

[5] Bon, J.T.M. van, and A.E. Brouwer, *The distance-regular antipodal covers of classical distance-regular graphs*, pp. 141-166 in: *Colloq. Math. Soc. János Bolyai, Proc. Eger 1987*, 1988.

[6] Bose, R.C., and T.A. Dowling, *A generalization of Moore graphs of diameter two*, J. Combin. Th. (B) **11** (1971), 213-226 .

[7] Brouwer, A.E., A.M. Cohen and A. Neumaier, *Distance-regular graphs*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1989.

[8] Cameron, P.J., J.M. Goethals and J.J. Seidel, *Strongly regular graphs having strongly regular subconstituents*, J. Algebra **55** (1978), 257-280.

[9] Diestel, R., *Graph theory*, Springer, 1997.

[10] Dieudonne, J., *La geometrie des groupes classiques*, Springer, Berlin (1963)

[11] Drake, D.A., *Partial lambda geometries and generalized Hadamard matrices over groups*, Canad. J. Math. **31** (1979), 617-627.

[12] Egawa, Y.,*Association schemes of quadratic forms*, J. Combin. Th. (A) **38** (1985), 1-14.

[13] Gardiner, A., *Imprimitive distance-regular graphs and projective planes*, J. Combin. Th. (B) **16** (1974), 274-281.

[14] Gardiner, A., *Antipodal covering graphs*, J. Combin. Th. (B) **16** (1974), 255-273.

[15] Godsil, C.D., *Algebraic Combinatorics*, Chapman&Hall, New York, London, 1993.

[16] Hensel, A.D., *Antipodal distance-regular graphs*, Master thesis, University of Waterloo, Canada, 1988.

[17] Hiraki, A., and J. Koolen, *An improvement of the Ivanov Bound*, Annals of combinatorics **2** (1998), 131-135.

[18] Jurišić, A., *Antipodal Covers*, Ph.D Thesis, University of Waterloo, Canada, 1995.

[19] Jurišić, A., *Antipodal covers of strongly regular graphs*, Discrete Math. **182** (1998), 177-189.

[20] Jurišić, A., *AT4 family and 2-homogeneous graphs*, sprejeto v objavo v Discrete Math.

[21] Jurišić, A., *Distance-regular antipodal covers of strongly regular graphs*, Master essay, University of Waterloo, Canada, 1990.

[22] Jurišić, A., and J. Koolen, *Krein parameters and antipodal tight graphs with diameter 3 and 4*, Discrete Math. **244**(1-3)(2002), 181-202.

[23] Jurišić, A., J. Koolen and P. Terwilliger, *Tight distance-regular graphs*, Journal of Algebraic Combinatorics **12** (2000), 163-197.

[24] Lint, J.H. van, and R.M. Wilson, *A course in combinatorics*, Cambridge university press, Cambridge, 1992.

[25] Koolen, J.H., *On subgraphs in distance-regular graphs*, Journal of Algebraic Combinatorics **1** (1992), 353-362.

[26] Miklavič, Š., *Valency of distance-regular antipodal graphs with diameter* 4, European J. Combin., sprejeto v objavo.

[27] Pyber, L., *A bound for the parameter of distance-regular graphs*, Combinatorica **19** (4) (1999), 549-553.

[28] Seidel, J.J., *Strongly regular graphs with* $(-1, 1, 0)$ *adjacency matrix having eigenvalue 3*, Lin. Alg. Appl. **1** (1968), 281-298.

[29] Smith, D.H., *Primitive and imprimitive graphs*, Quart. J. Math. Oxford (2) **22** (1971), 551-557.

[30] Terwilliger, P., *P- and Q-polynomial association schemes and their antipodal P-polynomial covers*, European J. Combin. **14** (1993), 355-358.

[31] Terwilliger, P., *The diameter of bipartite distance-regular graphs*, J. Combin. Th. (B) **32** (1982), 182-188.